СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

11 - 6875

С.Х.Бычваров

О РЕАЛИЗАЦИИ ПРАВИЛ УМОЛЧАНИЯ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

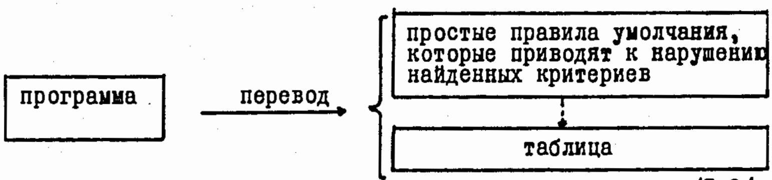
11 - 6875

С.Х.Бычваров

О РЕАЛИЗАЦИИ ПРАВИЛ УМОЛЧАНИЯ

В работе /I/ обоснован метод описания правил умолчания (определения концепции умолчания), удобный для использования программистом при задании этих правил. В работе[3] обоснован метод описания правил умолчания, который является удобным в использовании при задании правил умолчания в памяти ЭВМ для их последующего выполнения.

В данной работе предложен алгоритм перевода программы, определяющей концепцию умолчания средствами первого метода, в таблицу, определяющую концепцию умолчания средствами второго метода. Найдены критерии, которые должны быть удовлетворены, для того, чтобы этот перевод был возможным. Общая схема реализации правил умолчания следующая:



Перевод каскада простых правил умолчания (подпрограммы)[I,2] в таблицу возможен, если предложенный алгоритм применим (условие 2 теоремы Т3), и его работа заканчивается успешно (условие 3 теоремы Т3). Теоремы ТI,Т2,Т6 и Т7 дают критерии применимости предложенного алгоритма, а теорема Т4 имеет отношение к технике его реализации. Теорема Т5 определяет критерий возможности перевода каскада простых правил умолчания в таблицу, а теоремы Т8 и Т9 - критерии возможности перевода дерева описания правил умолчания (программы) в таблицу.

I. О реализации каскада простых правил умолчания

Пусть задан каскад простых правил умолчания I относительно совокупности $\{M_i,\ i = 1,2,\dots,\ n\}$, который определяет функцию F . Более подробно, пусть задано:

I. Пустое ключевое множество K_0

2. Совокупность множеств альтернативных элементов $\{M'_i, i = 1,2,\dots,n_1\}$ (предполагаем, что $\{M_i, i = 1,2,\dots,n\} = \{B_i, i = 1,2,\dots,m\} \cup \{E_i, i = 1,2,\dots,\ell\}$).

3. Множество дополнительных элементов N_0

4. Последовательность простых правил умолчания (L_i, R_i) $(1 \le i \le p)$.

Обозначаем $R = \bigcup_{i=1}^{p} R_i$. В этих условиях справедлива теорема T1.

T1. Пусть $F(M_q) = M_s$ и $M_q \subset M_r \subset M_s$ $(1 \le q, r, s \le n)$. Если для любого i $(1 \le i \le p)$ $L_i \cap R = \emptyset$ то $F(M_r) = M_s$.

Доказательство

В самом деле, если $R = \emptyset$, то утверждение теоремы очевидно, так как $M_q = M_r = M_s$.

Пусть $R \ne \emptyset$.

Если L_1 не является подмножеством M_q, то L_1 не является подмножеством M_r, так как $M_r \setminus M_q \subset R$ и $L_1 \cap R = \emptyset$.

Пусть простое правило умолчания (L_1, R_1) не выполняется при преобразовании M_q (т.е. при получении $F(M_q)$). Тогда или L_1 не является подмножеством M_q и, следовательно, L_1 не является подмножеством M_r; или $R_1 \cup M_q \notin \{M_i, i = 1,2,\dots,n\}$ и, следовательно, $R_1 \cup M_r \notin \{M_i, i = 1,2,\dots,n\}$; или $r_1 \in M_q$ и, следовательно, $r_1 \in M_r$. Получили, что (L_1, R_1) не выполняется при преобразовании M_r.

Пусть простое правило умолчания (L_1, R_1) выполняется при преобразовании M_q. Тогда $L_1 \subset M_q$ и, следовательно, $L_1 \subset M_r$, а также $r_1 \in M_s$. Если $r_1 \notin M_r$, то (L_1, R_1) выполняется при преобразовании M_r; в противном случае (L_1, R_1) не выполняется.

Обозначим через Y_i множество, которое получим после применения каскада простых правил умолчания $(L_1, R_1), (L_2, R_2), \dots, (L_{i-1}, R_{i-1})$ $(i \ge 1)$ к M_q, а через Z_i – множество, которое получим после применения этого каскада к M_r.

Рассмотрим равенство

$$Z_i = Y_i \cup (M_r \setminus M_q). \qquad (1.1)$$

Очевидно, оно имеет место при $i = 1$.

Приведенные выше рассуждения показывают, что равенство (1.1) имеет место при $i = 2$. Предположим, что равенство (1.1) имеет место при $i = k$ $(k \le p)$. Докажем, что оно имеет место при $i = k+1$.

В самом деле, пусть простое правило умолчания (L_k, R_k) не выполняется при преобразовании Y_k. Тогда или L_k не является подмножеством Y_k и, следовательно, L_k не является подмножеством Z_k (так как $Z_k \setminus Y_k \subset M_r \setminus M_q \subset R$ и $L_k \cap R = \emptyset$); или $R_k \cup Y_k \notin \{M_i, i = 1,2,\dots,n\}$ и, следовательно, $R_k \cup Z_k \notin \{M_i, i = 1,2,\dots,n\}$ или $r_k \in Y_k$ и, следовательно, $r_k \in Z_k$. Получили, что (L_k, R_k) не выполняется при преобразовании Z_k.

Пусть простое правило умолчания (L_k, R_k) выполняется при преобразовании Y_k. Тогда $L_k \subset Y_k$ и, следовательно, $L_k \subset Z_k$, а также $r_k \in M_s$ $(Z_k = Y_k \cup (M_r \setminus M_q) \subset M_s)$. Если $r_k \notin Z_k$, то (L_k, R_k) выполняется при преобразовании Z_k; в противном случае (L_k, R_k) не выполняется.

Окончательно мы получаем:

$F(M_r) = Z_{p+1} = Y_{p+1} \cup (M_r \setminus M_q) = M_s \cup (M_r \setminus M_q) = M_s$, т.е. $F(M_r) = M_s$. Теорема доказана.

Обозначим $R_0^k = \bigcup R_i$, где индекс i пробегает все i $(1 \le i \le k-1;\ k \le p)$, для которых $L_i \subset L_k \setminus (L_k \cap R)$.

Следующая теорема является обобщением T1.

T2. Пусть $F(M_q) = M_s$ и $M_q \subset M_r \subset M_s$ $(1 \le q, r, s \le n)$. Если для любого i $(1 \le i \le p)$ $L_i \cap R \subset R_0^i$, то $F(M_r) = M_s$.

Доказательство

Доказательства теорем T1 и T2 полностью совпадают за исключением того места, где доказывается следующее утверждение: "Если L_k не является подмножеством Y_k, то L_k не является подмножеством Z_k". Докажем это утверждение.

В самом деле, допустим, что $L_k \subset Z_k$. Тогда существует элемент x такой, что $x \in L_k$ (и, следовательно, $x \in Z_k$) и $x \notin Y_k$. Из $Z_k \setminus Y_k \subset M_r \setminus M_q \subset R$ следует, что $x \in R$ (так как $x \in Z_k \setminus Y_k$). С другой стороны, $L_k \cap R \subset R_0^k$. Следовательно, $x \in R_0^k$, т.е. существует простое правило умолчания (L_i, R_i) $(1 \le i \le k-1;\ k \le p)$, для которого $r_i = x$ и

$L_i \subset L_k \setminus (R \cap L_k)$. Из $L_i \subset L_k \setminus (R \cap L_k)$ и $L_k \setminus (R \cap L_k) \subset Z_k$ получаем $L_i \subset Z_k$. Из $L_i \subset Z_k$ и $L_i \cap R = \emptyset$ (так как $L_i \subset L_k \setminus (R \cap L_k)$) получаем последовательно $L_i \subset Y_k$ и $L_i \subset Y_i$. Из $x \in Z_k$ и $Y_k \subset Z_k$ следует, что $\{x\} \cup \{Y_k\} \in \{M_i, i = 1,2,\ldots,n\}$ и, следовательно $\{x\} \cup \{y_i\} \in \{M_i, i = 1, 2,\ldots, n\}$ (так как $Y_i \subset Y_k$). Простое правило умолчания (L_i, R_i) выполняется (так как $R_i \cup \{Y_i\} \in \{M_i, i = 1,2,\ldots,n\}$, $L_i \subset Y_i$ и $r_i \notin Y_i$) и, следовательно, $x \in Y_{i+1}$. Получили, что $x \in Y_k$, т.е. пришли к противоречию. Следовательно, L_k не является подмножеством Z_k.

Приведем два примера, которые показывают, что если $F(M_q)=M_s$ и $M_q \subset M_r \subset M_s$, то не всегда $F(M_r) = M_s$.

В самом деле, пусть задана совокупность множеств альтернативных элементов, которая состоит из следующих множеств: $\{a_3\}$, $\{a_1, a_4\}$, $\{a_1, a_5\}$ и $\{a_2, a_5\}$, и задана следующая последовательность простых правил умолчания:
$(\{a_2\}, \{a_4\})$, $(\{\}, \{a_1\})$, $(\{\}, \{a_2\})$, $(\{\}, \{a_3\})$, $(\{\}, \{a_4\})$. Возьмем $M_q = \{\}$ и $M_r = \{a_2\}$. Тогда $M_s = \{a_1, a_2, a_3\}$ (так как $F(\{\}) = \{a_1, a_2, a_3\}$) и $F(\{a_2\}) = \{a_2, a_3, a_4\}$ т.е. $F(M_r) \neq M_s$.

Второй пример взят из языка программирования PL/I [6]. Совокупность множеств альтернативных элементов состоит из следующих множеств:

{FLOAT, Scale-factor, PICTURE-N}, {FLOAT, FIXED, PICTURE-N},
{DECIMAL, BINARY, PICTURE-N}, {REAL, COMPLEX},
{Number-of-digits, PICTURE -N}, {I-N, N-I-N} и
{ALIGNED, UNALIGNED}.

Последовательность простых правил умолчания следующая:

({DECIMAL}, {FLOAT}), ({BINARY}, {FLOAT}), ({REAL}, {FLOAT}),
({COMPLEX}, {FLOAT}), ({FLOAT}, {DECIMAL}), ({FIXED}, {DECIMAL}),

({REAL}, {DECIMAL}), ({COMPLEX}, {DECIMAL}),
({DECIMAL}, {REAL}), ({BINARY}, {REAL}), ({FLOAT}, {REAL}),
({FIXED}, {REAL}), ({I-N}, {REAL}),
({I-N}, {FIXED}), ({I-N}, {BINARY}), ({N-I-N}, {REAL}),
({N-I-N}, {FLOAT}), ({N-I-N}, {DECIMAL}),
({PICTURE-N}, {UNALIGNED}), ({}, Number-of-digits}),
({}, {ALIGNED}), ({}, {FIXED}), ({}, {Scale-factor}).

Возьмем M_q = {I-N} и M_r = {I-N, REAL}. Тогда
M_s = {I-N, REAL, FIXED, BINARY, Number-of-digits, ALIGNED, Scale-factor} (так как F ({I-N}) = {I-N, REAL, FIXED, BINARY, Number-of-digits, ALIGNED, Scale-factor})
и F ({I-N, REAL}) = {I-N, REAL, FLOAT, DECIMAL, Number-of-digits, ALIGNED}, т.е. $F(M_r) \neq M_s$.

Нетрудно убедиться в том, что условия Т2 не выполняются как в первом, так и во втором примерах.

Обозначим через $\{A_i, i = 1,2,\ldots,n'\}$ совокупность результирующих множеств полного каскада простых правил умолчания относительно совокупности $\{M_i, i = 1,2,\ldots, n\}$, определяющего функцию F.

Если $F(A_i \cap A_j) = A_i (i \neq j)$, то, по определению, A_i предшествует A_j или A_j следует за A_i (обозначаем $A_i < A_j$ или $A_i \longrightarrow A_j$). Если $F(A_i \cap A_j) = A_k (k \neq i$ и $k \neq j)$, то A_k предшествует как A_i, так и A_j.

Зависимость $A_{i_1} \rightarrow A_{i_2} \rightarrow \ldots A_{i_n} \rightarrow A_{i_1}$ $(1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_n < n'$; $n \geq 2$; $i_k \neq i_e$ если $k \neq \ell$) назовем циклом в совокупности результирующих множеств.

Пусть в совокупности результирующих множеств нет циклов. Тогда эту совокупность можно упорядочить с соблюдением отношения предшествования (следования).

Предположим, что применение правила умолчания /3/ к упорядоченной совокупности результирующих множеств определяет функцию G.

Пусть множество $M_k \in \{M_i,\ i = 1,2,\dots,n\}$ и $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_p}$ $(p \geq 2)$ – все множества совокупности $\{A_i,\ i = 1,2,\dots,n^1\}$, для которых $M_k \subset A_{i_\ell}$ $(1 \le \ell \le p)$. Предположим, что для функции F имеет место следующее утверждение: если $F(M_q) = A_s$ и $M_q \subset M_r \subset A_s$, то $F(M_r) = A_s$ $(1 \le q, r \le n;\ 1 \le s \le n^1)$. Очевидно, что для функции G имеет место то же самое утверждение, т.е. если $G(M_q) = A_s$ и $M_q \subset M_t \subset A_s$, то $G(M_r) = A_s$ $(1 \le q, z \le n;\ 1 \le s \le n^1)$.

Из сделанных предположений следует, что существует t $(1 \le t \le p)$, для которого $F(M_k) = A_{i_t}$. Тогда $F(A_{i_t} \cap A_{i_\ell}) = A_{i_t}$ $(1 \le \ell \le p)$, так как $M_k \subset A_{i_t} \cap A_{i_\ell} \subset A_{i_t}$. Следовательно, A_{i_t} предшествует всем A_i $(\ell \ne t,\ 1 \le \ell \le p)$. Получили $G(M_k) = A_{i_t}$ и, следовательно, $F(M_k) = A_i = G(M_k)$.

Случай, когда для M_k существует единственное результирующее множество A_i $(1 \le i \le n^1)$ – такое, что $M_k \subset A_i$, является тривиальным. Тогда, очевидно, $F(M_k) = A_i$, $G(M_k) = A_i$ и $F(M_k) = G(M_k)$.

Итак, доказали следующую теорему:

Т3. Пусть каскад простых правил умолчания относительно совокупности $\{M_i,\ i = 1,2,\dots,n\}$:

1) является полным;

2) определяет функцию F, для которой: если $F(M_q) = A_s$ и $M_q \subset M_r \subset A_s$ $(1 \le q, r \le n,\ 1 \le s \le n^1)$, то $F(M_r) = A_s$;

3) в его совокупности результирующих множеств нет циклов.

Тогда имеет место следующее равенство:

$$F(M_k) = G(M_k),$$

где $M_k \in \{M_i,\ i = 1,2,\dots,n\}$

Замечание: Пусть множество дополнительных элементов пустое. Тогда совокупность результирующих множеств совпадает с семейством максимальных множеств совокупности $\{M_i,\ i = 1,2,\dots,n\}$.

Отметим следующее простое, но практически важное утверждение:

Т4. Пусть функция F обладает следующим свойством: если $F(M_q) = A_s$ и $M_q \subset M_r \subset A_s$ $(1 \le q, r \le n,\ 1 \le s \le n^1)$ то $F(M_r) = A_s$. Тогда из $F(A_i \cap A_j) = A_k$ $(k \ne i$ и $k \ne j)$ следует, что $F(A_k \cap A_i) = A_k$ и $F(A_k \cap A_j) = A_k$.

В самом деле, из $A_i \cap A_j \subset A_k$ следует $A_i \cap A_j \subset A_k \cap A_i$ и $A_i \cap A_j \subset A_k \cap A_j$. Следовательно, $A_i \cap A_j \subset A_k \cap A_i \subset A_k$ и $A_i \cap A_j \subset A_k \cap A_j \subset A_k$ и тогда $F(A_k \cap A_i) = A_k$ и $F(A_k \cap A_j) = A_k$. Теорема доказана.

Т5. Пусть задан каскад простых правил умолчания относительно совокупности $\{M_i,\ i = 1,2,\dots,n\}$, определяющий функцию F, такой, что для любого i $(1 \le i \le p)$ $L_i \cap R \subset R_0^i$. Тогда в совокупности пар множеств /3/, задающих F, нет циклов.

Доказательство

Предположим, что утверждение теоремы не верно. Тогда в совокупности пар, задающих F, имеется цикл:

$$(\alpha_1, \beta_1) \to (\alpha_2, \beta_2) \to \dots \to (\alpha_q, \beta_q) \to (\alpha_{q+1}, \beta_{q+1}),$$

где $q \geq 2$, $\alpha_1 = \alpha_{q+1}$ и $\beta_1 = \beta_{q+1}$.

Без ограничения общности можно считать, что

$$\alpha_i = \beta_i \cap \beta_{i+1} \qquad (1 \le i \le q), \tag{1.2}$$

так как из $\alpha_i \subset \beta_i \cap \beta_{i+1} \subset \beta_i$ в силу Т2 следует равенство

$$F(\alpha_i) = F(\beta_i \cap \beta_{i+1}) = \beta_i.$$

Обозначим $\beta_i = \alpha_i \cup \alpha_{i-1} \cup \delta_i$ $(1 \le i \le q+1)$, где по определению $\alpha_0 = \alpha_q$, $\delta_1 = \delta_{q+1}$ и

$$\delta_i \cap (\alpha_i \cup \alpha_{i-1}) = \emptyset. \tag{1.3.}$$

Вследствие (1.2) и (1.3) получаем, что

$$\delta_i \cap \delta_{i+1} = \emptyset \qquad (1 \le i \le q). \tag{1.4}$$

Из $F(\alpha_i) = \beta_i$ следует, что $\delta_i \subset R$ и $(\alpha_{i-1} \setminus \alpha_i) \subset R$.

Следовательно,

$$\bigcup_{i=1}^{q} \delta_i \subset R \qquad \text{и} \tag{1.5}$$

$$\bigcup_{i=1}^{q} (\alpha_{i-1} \setminus \alpha_i) \subset R. \qquad (I.6)$$

Нетрудно показать, что имеет место следующее равенство:

$$\bigcup_{i=1}^{q} (\alpha_{i-1} \setminus \alpha_i) = \bigcup_{i=1}^{q} \alpha_i \setminus \bigcap_{i=1}^{q} \alpha_i .$$

В силу (I.6) получим следующее включение:

$$\bigcup_{i=1}^{q} \alpha_i \setminus \bigcap_{i=1}^{q} \alpha_i \subset R \qquad (I.7)$$

(I.8). Без ограничения общности предположим, что совокупность

$$\{(\alpha_u , \beta_u) \longrightarrow (\alpha_v , \beta_v) \mid (1 \le u, v \le q \ ; \ v \ne u+1)\}$$

содержит только элемент $(\alpha_q , \beta_q) \longrightarrow (\alpha_1 , \beta_1)$.

При $q = 2$ имеем: $(\alpha_1 , \beta_1) \longrightarrow (\alpha_2 , \beta_2) \longrightarrow (\alpha_1 , \beta_1)$.
В силу (I.2) получим $\alpha_1 = \alpha_2$ и, следовательно, $\beta_1 = F(\alpha_1) = F(\alpha_2) = \beta_2$.
Пришли к противоречию (так как $\beta_1 \ne \beta_2$). Поэтому в дальнейшем будем считать, что $q > 2$.

Из (I.8) и $q > 2$ следует, что α_i не является подмножеством α_j ($i \ne j$; $I \le i$, $j \le q$) и, следовательно, для любого i ($I \le i \le q$) имеем:

$$\alpha_{i-1} \setminus \alpha_i \ne \emptyset. \qquad (I.9)$$

Пусть существует минимальное K ($I \le K \le P$) такое, что

$$r_K \in \bigcup_{i=1}^{q} (\alpha_{i-1} \setminus \alpha_i) \qquad (I.IO)$$

и

$$L_K \subset \bigcup_{i=1}^{q} \beta_i . \qquad (I.II)$$

Если L_K не является подмножеством $\bigcup_{i=1}^{q} \beta_i$, то простое правило умолчания (L_K , R_K) не будет выполняться при преобразовании $F(\alpha_i)$ ($I \le i \le q$), так как в противном случае получили бы $F(\alpha_i) \ne \beta_i$.

Пусть существует минимальное j ($I \le j < K$) такое, что $r_j \in \bigcup_{i=1}^{q} \delta_i$ и $L_j \subset \bigcup_{i=1}^{q} \beta_i$. Из $L_j \cap R \subset R_o^i$ (по условию теоремы) и $L_j \subset \bigcup_{i=1}^{q} \beta_i$ следует, что $L_j \subset \bigcap_{i=1}^{q} \alpha_i$. Допустим, $r_j \in \delta_i$ ($I \le i \le q$). Тогда $r_j \in F(\alpha_{i-1})$ и $r_j \notin \beta_{i-1}$.
Пришли к противоречию (так как $F(\alpha_{i-1}) = \beta_{i-1}$). Следовательно, не существует минимального j ($I \le j < K$) такого, что $r_j \in \bigcup_{i=1}^{q} \delta_i$ и $L_j \subset \bigcup_{i=1}^{q} \beta_i$.

Существует ℓ ($I \le \ell \le q$) такое, что $r_K \notin \beta_\ell$ и $r_K \in \beta_{\ell+1}$. Тогда $r_K \in F(\alpha_\ell)$. Пришли к противоречию (так как $F(\alpha_\ell) = \beta_\ell$). Следовательно, не существует минимального K ($I \le K \le P$) со свойствами (I.IO) и (I.II).

Из $F(\alpha_i) = \beta_i$ ($I \le i \le q$), (I.6) и (I.9) следует, что минимальное K со свойствами (I.IO) и (I.II) всегда существует. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема Т5 является обобщением теоремы Т2. В самом деле, пусть $F(M_q) = M_s$, $M_q \subset M_r \subset M_s$ и $F(M_r) \ne M_s$. Тогда получим цикл

$$(M_q , M_s) \longrightarrow (M_r , F(M_r)) \longrightarrow (M_q , M_s).$$

Следовательно, $F(M_r) = M_s$.

Т6. Пусть задан каскад простых правил умолчания относительно совокупности $\{M_i , \ i = I,2,\dots, n\}$, который определяет функцию F . Обозначим последовательность простых правил умолчания (L_i , R_i) ($I \le i \le P$) этого каскада следующим образом:

$$(L_1, R_1), (L_2, R_2), \dots, (L_{i_1}, R_{i_1}), \dots, (L_{i_{K-1}+1}, R_{i_{K-1}+1}),$$

$$(L_{i_{K-1}+2}, R_{i_{K-1}+2}), \dots, (L_{i_K}, R_{i_K}), \dots, (L_{i_\ell}, R_{i_\ell}).$$

Пусть для заданного каскада выполнены следующие условия:

1) $L_{i_{K-1}+1} = L_{i_{K-1}+2} = \cdots L_{i_K}$ $(1 \le K \le \ell)$,
где по определению $i_o = 0$.

2) $L_{i_K} \cup \bigcup_{j=1}^{i_K - i_{K-1}} R_{i_{K-1}+j} \in \{N_i , \ i = 1,2,\dots, m\}$,

где $\{N_i , \ i = I,2,\dots, m\}$ является совокупностью результирующих множеств заданного каскада. (В дальнейшем для краткости будем обозначать:

$$A_{i_k} = L_{i_k} \cup \bigcup_{j=1}^{i_k - i_{k-1}} R_{i_{k-1}+j}) .$$

3) Если существует элемент x такой, что $L_{i_v} \cup \{x\} \in \{M_i, i = 1,2,\dots, n\}$, $L_{i_v} \cup \{x\} \notin \{N_i, i=1,2,\dots,m\}$ и $x \notin A_{i_v}$, то существует L_{i_u} такое, что $L_{i_u} = L_{i_v} \cup \{x\}$ и $u < v$.

4) Если существует множество X такое, что $L_{i_u} \subset X \subset A_{i_u}$ и $L_{i_v} \subset X \subset A_{i_v}$, то $A_{i_u} = A_{i_v}$.

При этих предположениях функция F обладает **следующими** свойствами:

а) если $M_q \subset M_r \subset M_s$ $(F(M_q) = M_s)$ $(1 \le q, r, s \le n)$, то $F(M_r) = M_s$;

б) если $M_s \notin \{A_{i_k}, k = 1,2,\dots,\ell\}$, то $M_q = M_s$.

Доказательство

Пусть k $(1 \le k \le \ell)$ является минимальным целым числом, для которого $L_{i_k} \subset M_q$. Если существует элемент $x \in M_q$ и $x \notin A_{i_k}$, то в силу условия (3) существует L_{i_u} такое, что $L_{i_u} \subset M_q$ и $u < k$. Пришли к противоречию с минимальностью k. Следовательно, $L_{i_k} \subset M_q \subset A_{i_k}$, т.е. $F(M_q) = A_{i_k} = M_s$.

Рассмотрим случай, когда $M_q \subset M_r \subset M_s$. Пусть v $(1 \le v \le \ell)$ является минимальным целым числом, для которого $L_{i_v} \subset M_r$. Из условия (3) следует, что $L_{i_v} \subset M_r \subset A_{i_v}$ и $F(M_r) = A_{i_v}$. Если $k = v$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть $k \ne v$. Из $L_{i_k} \subset M_q \subset A_{i_k}$, $A_{i_k} = M_s$ и $M_q \subset M_r \subset M_s$ следует, что $L_{i_k} \subset M_r \subset A_{i_k}$. Из $L_{i_k} \subset M_r \subset A_{i_k}$ и $L_{i_v} \subset M_r \subset A_{i_v}$ в силу условия (4) следует, что $A_{i_v} = A_{i_k} = M_s$, т.е. $F(M_r) = A_{i_v} = M_s$.

Рассмотрим случай, когда $M_s \notin \{A_{i_k}, k = 1,2,\dots,\ell\}$. Предположим, что u $(1 \le u \le \ell)$ является минимальным целым числом – таким, что $L_{i_u} \subset M_q$. Из условия (3) следует, что $L_{i_u} \subset M_q \subset A_{i_u}$. Итак, $M_s = A_{i_u}$, т.е. пришли к противоречию. Получили, что не существует u $(1 \le u \le \ell)$ такого, что $L_{i_u} \subset M_q$ и, следовательно, $M_q = M_s$ (так как $F(M_q) = M_q$ и $F(M_q) = M_s$).

Теорема доказана.

Пусть задан каскад простых правил умолчания относительно совокупности $\{M_i, i = 1,2,\dots, n\}$, который имеет следующую последовательность простых правил умолчания: (L_1, R_1), (L_2, R_2), ..., (L_p, R_p). Множество L_i $(1 \le i \le p)$ назовем минимальным относительно заданного каскада, если не существует L_j $(1 \le j \le p$; $i \ne j)$ такого, что $L_j \subset L_i$.

Т7. Пусть задан каскад простых правил умолчания относительно совокупности $\{M_i, i = 1,2,\dots, n\}$, который определяет функцию F и имеет следующую последовательность простых правил умолчания: (L_1, R_1), (L_2, R_2), ..., (L_m, R_m), ..., (L_p, R_p) $(1 \le m < p)$. Пусть каскад, полученный из заданного путем отбрасывания последовательности простых правил умолчания (L_{m+1}, R_{m+1}), (L_{m+2}, R_{m+2}), ..., (L_p, R_p), определяет функцию F_1 и удовлетворяет условиям теоремы Т6, а каскад, полученный из заданного путем отбрасывания последовательности простых правил умолчания (L_1, R_1), (L_2, R_2), ..., (L_m, R_m), определяет функцию F_2 и удовлетворяет условиям теоремы Т2. Сделаем еще одно предположение:

$$(\bigcup_k L_k) \cap R_2 = \emptyset , \qquad (1.12)$$

где k принимает все целочисленные значения между 1 и m, для которых L_k является минимальным относительно каскада F_1 (т.е. каскада, определяющего функцию F_1) и $R_2 = \bigcup_{i=m+1}^{p} R_i$.

При этих предположениях, если $F(M_q) = M_s$ и $M_q \subset M_r \subset M_s$, то $F(M_r) = M_s$.

Доказательство.

Если существует $L_k (I \le k \le m)$ такое, что $L_k \subset M_q$, то $F(M_q) = F_1(M_q)$ и $F(M_r) = F_1(M_r)$. Из Т6 следует, что $F_1(M_r) = M_S$ (так как $F_1(M_q) = M_S$). Следовательно, $F(M_r) = F_1(M_r) = M_S$.

Пусть не существует $L_k (I \le k \le m)$ такого, что $L_k \subset M_q$. Тогда $F(M_q) = F_2(M_q) = M_S$. Предположим, что существует $L_k (I \le k \le m)$ такое, что $L_k \subset M_r$. Тогда существует минимальное множество $L_i (I \le i \le m)$ такое, что $L_i \subset M_r$. Итак, существует элемент x такой, что $x \in L_i$, $x \notin M_q$, $x \in M_r$. В силу (I.I2) утверждения $F_2(M_q) = M_S$, $x \in L_i$, $x \notin M_q$ и $x \in M_r$ являются противоречивыми. Следовательно, не существует $L_k (I \le k \le m)$ такого, что $L_k \subset M_r$, т.е. $F(M_r) = F_2(M_r) = M_S$.

Теорема доказана.

Из Т7 легко вытекает следующее следствие: если a) $\alpha_1, \alpha_2 \in \{M_i, i = I,2,\dots,n\}$; в) существует $L_k (I \le k \le m)$ такое, что $L_k \subset \alpha_1$ и с) не существует $L_k (I \le k \le m)$ такого, что $L_k \subset \alpha_2$, то зависимость $(\alpha_1, F_1(\alpha_1)) \longrightarrow (\alpha_2, F_2(\alpha_2))$ является невозможной.

Рассмотрим два примера.

Пусть задана совокупность множеств альтернативных элементов, которая состоит из следующих множеств: $\{a_1, b_1, b_2\}$ и $\{a_1, c_1, c_2\}$, и задана следующая последовательность простых правил умолчания: $(\{b_1\},\{c_1\})$, $(\{c_2\},\{b_1\})$, $(\{b_2\},\{c_2\})$, $(\{c_1\},\{b_2\})$, $(\{\ \},\{a_1\})$. Нетрудно убедиться в том, что заданный каскад простых правил умолчания удовлетворяет условиям теоремы Т6. Построим матрицу предшествования (следования) для этого каскада.

$\{N_i, i=1,2,\dots,m\}$	$\{a_1\}$	$\{b_1,c_1\}$	$\{b_1,c_2\}$	$\{b_2,c_1\}$	$\{b_2,c_2\}$
$\{a_1\}$		$<\cdot$	$<\cdot$	$<\cdot$	$<\cdot$
$\{b_1,c_1\}$	$\cdot>$		$<\cdot$	$\cdot>$	
$\{b_1,c_2\}$	$\cdot>$	$\cdot>$			$<\cdot$
$\{b_2,c_1\}$	$\cdot>$	$<\cdot$			$\cdot>$
$\{b_2,c_2\}$	$\cdot>$		$\cdot>$	$<\cdot$	

Состояние матрицы под диагональю является зеркальным отображением ее состояния над диагональю. Очевидно, в совокупности результирующих множеств $\{a_1\}$, $\{b_1, c_1\}$, $\{b_1, c_2\}$, $\{b_2, c_1\}$ и $\{b_2, c_2\}$ имеется следующий цикл: $\{b_1, c_1\} \longrightarrow \{b_1, c_2\} \longrightarrow \{b_2, c_2\} \longrightarrow \{b_2, c_1\} \longrightarrow \{b_1, c_1\}$.

Итак, мы привели пример каскада простых правил умолчания, определяющий функцию F, для которой имеет место:

I) если $F(M_q) = M_S$ и $M_q \subset M_r \subset M_S$ $(I \le q, r, s \le n)$, то $F(M_r) = M_S$ и

2) в совокупности пар, определяющих функцию F, имеется цикл, а именно: $(\{b_1\},\{b_1,c_1\}) \longrightarrow (\{c_2\},\{c_2,b_1\}) \longrightarrow (\{b_2\},\{b_2,c_2\}) \longrightarrow (\{c_1\},\{c_1,b_2\}) \longrightarrow (\{b_1\},\{b_1,c_1\})$.

Второй пример взят из языка программирования PL/I. Пусть задана совокупность множеств альтернативных элементов, которая состоит из следующих множеств:
{CHARACTER , BIT, PICTURE-C } , { VARYING, PICTURE-C } и
{Length , PICTURE-C } ,
задано следующее множество дополнительных элементов {VARYING}
и задана следующая последовательность простых правил умолчания:

({ } , {CHARACTER}), ({ },{Length}). Нетрудно убедиться в том, что заданный каскад простых правил умолчания относительно совокупности $\{M_i, i = I,2,\dots,n\}$, который определяет функцию F, удовлетворяет условиям теоремы Т5. Следовательно, в совокупности пар множеств, задающих F (и, значит, в совокупности результирующих множеств заданного каскада), нет циклов. Построим матрицу предшествования для заданного каскада.

$\{N_i, i=1,2,\dots,m\}$	$\{P\}$	$\{C,L\}$	$\{C,L,V\}$	$\{B,L\}$	$\{B,L,V\}$
$\{P\}$		$\cdot>$			
$\{C,L\}$	$<\cdot$		$<\cdot$	$<\cdot$	$<\cdot$
$\{C,L,V\}$		$\cdot>$			$<\cdot$
$\{B,L\}$		$\cdot>$			$<\cdot$
$\{B,L,V\}$		$\cdot>$	$\cdot>$	$\cdot>$	

где P обозначает PICTURE- C , C – CHARACTER , L – Length , V – VARYING .

Из матрицы предшествования видно, что одним из возможных упорядочиваний множеств в совокупности результирующих множеств с соблюдением отношения предшествования является следующее:

{ CHARACTER, Length } , { CHARACTER, Length, VARYING } ,

{ BIT, Length } , { BIT, Length, VARYING} , { PICTURE-C } .

Применение правила умолчания [3] к этой совокупности определяет функцию G такую, что $F(M_K) = G(M_K)$, где $M_K \in \{M_{i_*}, i = 1,2,\ldots,n\}$.

Отметим, что из $N_i \subset N_j$ ($i \neq j$) следует $N_i \rightarrow N_j$.

2. О реализации дерева описания правил умолчания.

Т8. Пусть заданы функции расширения (α_1^i, β_1^i) (i =I,2,..,p), (α_2^j, β_2^j) (j = I,2,..., q) и $(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j})$ (i =I,2,...,p; j =I,2,..., q) такие, что $\beta_1 \cap \beta_2 = \phi$ (где $\beta_1 = \bigcup_{i=1}^{p} \beta_1^i$ и $\beta_2 = \bigcup_{i=1}^{q} \beta_2^i$), $\alpha_{i,j} = \alpha_1^i \cup \alpha_2^j$ и $\beta_{i,j} = \beta_1^i \cup \beta_2^j$. При этих предположениях функция $(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j})$ не имеет циклов (т.е. в совокупности пар, задающих эту функцию, нет циклов) тогда и только тогда, когда не имеют циклов как функция (α_1^i, β_1^i) ,так и функция (α_2^j, β_2^j).

Доказательство.

Из $(\alpha_1^i, \beta_1^i) \rightarrow (\alpha_1^j, \beta_1^j)$ ($1 \leq i, j \leq p$; $i \neq j$) следует, что $(\alpha_{i,k}, \beta_{i,k}) \longrightarrow (\alpha_{j,k}, \beta_{j,k})$ ($1 \leq k \leq q$), так как из $\alpha_1^i \subset \beta_1^j$ и $\alpha_2^k \subset \beta_2^k$ следует, что $\alpha_1^i \cup \alpha_2^k \subset \beta_1^j \cup \beta_2^k$, т.е. $\alpha_{i,k} \subset \beta_{i,k}$. Аналогично, из $(\alpha_2^i, \beta_2^i) \rightarrow (\alpha_2^j, \beta_2^j)$ ($1 \leq i, j \leq q$, $i \neq j$) следует, что $(\alpha_{k,i}, \beta_{k,i}) \rightarrow (\alpha_{k,j}, \beta_{k,j})$ ($1 \leq k \leq p$). Следовательно, если функция $(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j})$ не имеет циклов, то как функция (α_1^i, β_1^i), так и функция (α_2^i, β_2^i) не имеют циклов.

Пусть $(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}) \longrightarrow (\alpha_{k,\ell}, \beta_{k,\ell})$ ($1 \leq i, k \leq p$; $1 \leq j, \ell \leq q$; $i \neq k \vee j \neq \ell$). Если $i \neq k$, то $(\alpha_1^i, \beta_1^i) \longrightarrow (\alpha_1^k, \beta_1^k)$, так как из $\alpha_{i,j} \subset \beta_{k,\ell}$

следует, что $\alpha_{i,j} \cap \beta_1 \subset \beta_{k,\ell} \cap \beta_1$, т.е. $\alpha_1^i \subset \beta_1^k$.
Аналогично, если $j \neq \ell$, то $(\alpha_2^j, \beta_2^j) \rightarrow (\alpha_2^\ell, \beta_2^\ell)$.
Следовательно, если функции (α_1^i, β_1^i) и (α_2^i, β_2^i) не имеют циклов, то функция $(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j})$ тоже не имеет циклов.

Нетрудно показать, что,

Т9. Если множество $X \subset \alpha_i$, причем X не является подмножеством β_j ($i \neq j$), то не имеет места зависимость $(\alpha_i, \beta_i) \rightarrow (\alpha_j, \beta_j)$.

Утверждения Т8 и Т9 дают критерии отсутствия циклов по "вертикали" и "горизонтали" в дереве описания правил умолчания.

Автор выражает благодарность Н.Н.Говоруну и В.П.Ширикову за внимание и помощь при написании данной работы, Е.А.Жоголеву за полезные обсуждения, а также Г.Л.Мазному за редакционные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Х.Бычваров. ОИЯИ, II- 6737, Дубна, 1972 г.
2. С.Х.Бычваров. ОИЯИ, II- 6738, Дубна, 1972 г.
3. С.Х.Бычваров. ОИЯИ, II-6429, Дубна, 1972 г.
4. С.Х.Бычваров. Вопросы применения принципа умолчания. Трети конгрес на българските математици, резюмета на докладите, част I, Варна, 6-15 септември 1972 г.
5. Универсальный язык программирования PL/I. (Перевод с английского под редакцией В.М.Курочкина. Москва, 1968 г.).
6. PL/I Language Specifications Order Number GY 33- 6003- 2 (Major Revision June 1970) IBM 1970

Рукопись поступила в издательский отдел
4 января 1973 года.