6737

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

11 - 6737

С.Х. Бычваров

АБСТРАКТНЫЙ ЯЗЫК ОПИСАНИЯ ПРАВИЛ УМОЛЧАНИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1972

11 - 6737

С.Х.Бычваров

АБСТРАКТНЫЙ ЯЗЫК ОПИСАНИЯ ПРАВИЛ УМОЛЧАНИЯ

Многоцелевой язык программирования можно сделать простым и удобным в использовании путем применения принципа умолчания. В силу принципа умолчания все возможности, которые явно не указаны программистом, выбираются компилятором вполне определенным образом. При этом выбирается та интерпретация, которая с наибольшей вероятностью потребуется программисту /I/.

В последнее время начали широко использовать принцип умолчания в системах программирования. Всестороннее применение принципа умолчания в языке программирования PL /I привело к логически сложной системе его описания. Поэтому стали необходимыми работы по разработке методов описания и реализации правил умолчания, которые определяют принцип умолчания.

В настоящей работе излагается метод формального описания правил умолчания, а также обоснованы критерии проверки их корректности. В работе проведено исследование принципиальных возможностей этого метода.

Метод был использован для описания правил умолчания языка PL /I. Опыт их описания показал, что метод является практически удобным. Обычно невозможно проверять корректность правил умолчания методом полного перебора. Установленные критерии позволяют эту проверку делать в практически приемлемое время (например, для PL /I - вручную за несколько часов).

В дальнейшем будем считать, что принцип умолчания определен путем задания функции расширения $Y_i = D(X_i)$ $(i = I,2,\ldots, d)$, где множество X_i явно определяется программистом, а множество Y_i определяется компилятором согласно правил умолчания так, что $X_i \subset Y_i$.

Абстрактный язык описания правил умолчания состоит из следующих основных компонент: совокупность множеств альтернативных элементов, множество дополнительных элементов, каскад простых правил умолчания и дерево описания правил умолчания.

I. Множество альтернативных элементов

Пусть даны конечные множества $M_I, M_2, \ldots, M_n$ $(n \geqslant I)$ такие, что

$$M_i \neq M_j \quad , \text{ если } \; i \neq j \quad .$$

Построим множество M такое, что

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i \qquad (I.I)$$

Определение I. Множество M'_i называется множеством альтернативных элементов относительно совокупности $\{ M_i, \; i = 1,2,\ldots, n \}$, если для него выполняются следующие требования :

I. $M'_i \subset M$ и

2. Множество $M'_i \cap M_j$ содержит не более одного элемента для любого $j\,(I \leq j \leq n)$.

Отметим, что совокупность из всех множеств M'_i непустая, так как она всегда содержит пустое множество альтернативных элементов.

Определение I дает возможность для любого подмножества M решить однозначно вопрос, является ли оно множеством альтернативных элементов.

Если мы потребуем, чтобы для всех множеств M'_i ($i = I,2,\ldots, n_1$; $n_1 \geqslant 1$) выполнялось:

$$M'_k \neq M'_\ell \text{, если } \; k \neq \ell$$

и если построим множество M' такое, что

$$M' = \bigcup_{i=1}^{n_1} M'_i$$

то тогда можем найти все множества M''_i альтернативных элементов относительно совокупности $\{ M'_i \;,\; i=1,2,\ldots,\; n_1 \}$. Следовательно, для любого множества M''_i выполняются следующие требования:

а) $M''_i \subset M'$ и

б) Множество $M''_i \cap M'_j$ содержит не более одного элемента для любого j $(I \leq j \leq n_1)$.

Таким образом, мы получаем следующую бесконечную последовательность:

$$\{ M_i,\; i=1,2,\ldots,\; n \} \;,\; \{ M'_i,\; i=1,2,\ldots,\; n_1 \} \;,\; \ldots ,$$
$$\{ M_i^{(k)},\;\; i=1,2,\; \ldots,\; n_k \} \;,\; \ldots$$

Из определения I легко вытекают теоремы TI и T2.

TI. Любое подмножество множества альтернативных элементов является множеством альтернативных элементов.

Из TI следует, что для задания всех множеств альтернативных элементов достаточно задать только те, которые не являются подмножествами других множеств альтернативных элементов. Такие множества альтернативных элементов будем называть максимальными.

T2. **Имеет место** равенство

$$\bigcup_{i=1}^{n_p} M_i^{(p)} = M^{(p-1)} \qquad (p \geqslant 1),$$

причем $M^{(o)}$ по определению равно M, а n_o по определению равно n .

На самом деле, любой элемент множества $M^{(p-1)}$ является множеством альтернативных элементов относительно совокупности

$$\{ M_i^{(p-1)} \;,\;\; i=1,2,\ldots,\; n_{p-1} \}$$

T3. Имеет место равенство

$$M^{(q)}=M^{(q-1)} \qquad (q \geqslant 1)$$

На самом деле, по построению имеет место равенство

$$M^{(q)}=\bigcup_{i=1}^{n_q} M_i^{(q)} \quad (q \geqslant 0) \qquad (I.2)$$

Утверждение теоремы следует из T2 и (I.2).

T4. Имеет место равенство

$$\{M_i^{(p)},\ i=1,2,\dots,n_p\} \subset \{M_i^{(p+2)},\ i=1,2,\dots,n_{p+2}\}$$

для $p=0,1,2,\dots$

Докажем теорему для $p=0$. Действительно, пусть

$$M_k \in \{M_i,\ i=1,2,\dots,n\}.$$

Из (I.I) следует, что $M_k \subset M$.
Из T3 следует, что $M=M'$. Следовательно, $M_k \subset M'$, т.е. для множества M_k выполняется требование (а). Выполнение требования (б) для множества M_k следует из утверждения 2. Итак получили, что

$$M_k \in \{M_i'',i=1,2,\dots,n_2\}.$$

Точно таким же образом теорема доказывается для произвольного $p>0$.

T5. Пусть множество X принадлежит к совокупности $\{B_i^{(q)},\ i=1,2,\dots,m_q\}$ $(q \geqslant 0,\ m_q \geqslant 0)$ тогда и только тогда, когда любое его подмножество из двух элементов есть подмножество некоторого $M_j^{(q)}$ $(I \leqslant j \leqslant n_q)$ и пусть множество Y принадлежит к совокупности $\{E_i^{(q)},i=1,2,\dots,\ell_q\}$ $(q \geqslant 0,\ \ell_q \geqslant 1)$ тогда и только тогда, когда оно либо пустое, либо содержит только один элемент множества $M^{(q)}$. Утверждается, что при этих предположениях имеет место равенство:

$$\{M_i^{(q+2)},\ i=1,2,\dots,n_{q+2}\} = \{B_i^{(q)},\ i=1,2,\dots,m_q\} \cup \{E_i^{(q)},\ i=1,2,\dots,\ell_q\} \quad \text{для } q=0,1,2,\dots$$

Докажем теорему для $q=0$. На самом деле, пусть множество $C \in \{M_i'',\ i=1,2,\dots,n_2\}$. Множество C либо пустое, либо содержит один элемент, либо содержит не менее двух элементов. Если C пустое, то $C \in \{E_i,\ i=1,2,\dots,\ell\}$ и,следовательно,

$$C \in \{B_i,i=1,2,\dots,m\} \cup \{E_i,i=1,2,\dots,\ell\}.$$

Пусть C содержит один элемент, который обозначим через z. Так как $C \in \{M_i'',i=1,2,\dots,n_2\}$, то из (а) следует, что $z \in M'$. Из T3 следует, что $M'=M$. Получили, что $z \in M$ и, следовательно, $C \in \{E_i,i=1,2,\dots,\ell\}$, т.е.

$$C \in \{B_i,i=1,2,\dots,m\} \cup \{E_i,i=1,2,\dots,\ell\}.$$

Пусть C содержит не менее двух элементов. Допустим, что для множества C существует подмножество D из двух элементов, которое не является подмножеством некоторого M_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Тогда для любого j $(I \leqslant j \leqslant n)$ множество $D \cap M_j$ содержит не более одного элемента, т.е. для множества D выполняется требование 2. Так как $C \in \{M_i'',i=1,2,\dots n_2\}$, то из (а) следует, что $C \subset M'$. Из T3 следует, что $M'=M$. Получили, что $C \subset M$ и, следовательно, $D \subset M_j$, т.е. для множества D выполняется требование I. Из выполнения требований I и 2 для множества D следует, что $D \in \{M_i',i=1,2,\dots,n_1\}$. Следовательно, для множества C не выполняется требование I, так как множество $C \cap D$ содержит два элемента и тогда $C \notin \{M_i'',i=1,2,\dots,n_2\}$.
Пришли к противоречию. Тем самым доказали, что

$$C \in \{B_i,i=1,2,\dots,m\} \quad \text{и, следовательно,}$$
$$C \in \{B_i,i=1,2,\dots,m\} \cup \{E_i,i=1,2,\dots,\ell\}$$

Наоборот, пусть множество $C \in \{B_i,i=1,2,\dots,m\} \cup \{E_i,i=1,2,\dots,\ell\}$. Если $C \in \{E_i,i=1,2,\dots,\ell\}$,то для множества C выполняются условия (а) (так как $M=M'$) и (б). Следовательно, $C \in \{M_i'',i=1,2,\dots,n_2\}$. Если множество $C \in \{B_i,i=1,2,\dots,m\}$, то $C \subset M$ и, следовательно, $C \subset M'$, т.е. условие (а) для множества C выполняется. Пусть условие (б) для множества C не выполняется. Тогда существует $i\ (I \le i \le n_1)$ такое, что множество $C \cap M_i'$ содержит более одного элемента и, следовательно, существует множество D из двух элементов такое, что оно является подмножеством C и множество $D \cap M_i'$ содержит два элемента. Так как $C \in \{ B_i, i=1,2,\dots, m \}$, то существует $j\ (I \le j \le n)$ такое, что $D \subset M_j$ и, следовательно, множество $M_i' \cap M_j$ содержит более одного элемента. Получили, что для множества M_1' не выполняется требование 2. Пришли к противоречию. Следовательно, требование (б) для множества C выполняется. Из выполнения требований (а) и (б) для множества C следует, что $C \in \{ M_i'', i=1,2,\dots, n_2 \}$. Итак, доказали теорему для $p = 0$. Точно таким же образом теорема доказывается для произвольного $p > 0$.

Отметим, что совокупность $\{ B_i^{(q)}, i=1,2,\dots, m_q \}$ $(q \geqslant 0)$ может быть пустой.

Из определения множеств $B_i^{(q)}$ и $E_i^{(q)}$ легко вытекает следующее утверждение:

Т6. Имеет место равенство

$$\{ B_i^{(q)}, i=1,2,\dots, m_q \} \cap \{ E_i^{(q)}, i=1,2,\dots, \ell_q \} = \emptyset$$

для $q = 0, I, 2, \dots$.

Т7. Имеет место равенство:

$$\{ B_i^{(q)}, i=1,2,\dots, m_q \} = \{ B_i^{(q+2)}, i=1,2,\dots, m_{q+2} \}$$

для $q = 0, I, 2, \dots$

Доказательство

Докажем теорему для $q = 0$ и $m \geqslant I$. В самом деле, пусть множество $B_k \in \{ B_i, i=1,2,\dots, m \}$. Если C произвольное подмножество B_k из двух элементов, то существует j такое, что $C \subset M_j$ $(1 \le j \le n)$. Из Т4 следует, что существует p такое, что $M_j = M_p''$ $(1 \le p \le n_2)$ и тогда $C \subset M_p''$. Следовательно, $B_k \in \{ B_i'', i=1,2,\dots, m_2 \}$.
Наоборот, пусть $B_k'' \in \{ B_i'', i=1,2,\dots, m_2 \}$. Если C – произвольное подмножество B_k'' из двух элементов, то существует j такое, что $C \subset M_j''$ $(1 \le j \le n_2)$. Из Т5 следует, что существует p такое, что $M_j'' = B_p$ $(1 \le p \le m)$ и тогда $C \subset B_p$. Из $C \subset B_p$ следует существование такого ℓ, что $C \subset M_\ell$ $(I \le \ell \le n)$. Следовательно, $B_k'' \in \{ B_i, i=1,2,\dots, m \}$. Итак, доказали теорему для $q = 0$. Точно таким же образом теорема доказывается для произвольного $q > 0$ и $m_q \geqslant I$. Аналогично теорема доказывается для произвольного $q \geqslant 0$ и $m_{q+2} \geqslant I$. Очевидно, что теорема справедлива и в случае, когда $m_q = 0$ и $m_{q+2} = 0$.

Из Т3 следует, что

Т8. Имеет место равенство

$$\{ E_i^{(q)}, i=1,2,\dots, \ell_q \} = \{ E_i^{(q+1)}, i=1,2,\dots, \ell_{q+1} \}$$

для $q = 0, I, 2, \dots$

Т9. Имеет место равенство

$$\{ M_i^{(p)}, i=1,2,\dots, n_p \} = \{ M_i^{(p+2)}, i=1,2,\dots, n_{p+2} \}$$

для $p = I, 2, \dots$

Доказательство

Сначала отметим, что для любого множества M_i''' выполняются следующие требования:

(i) $M_i''' \subset M''$ и

(ii) Множество $M_i''' \cap M_j''$ содержит не более одного элемента для любого $j\ (1 \le j \le n_2)$

Докажем теорему для $p = I$.

Из Т4 следует, что

$$\{ M_i', i=1,2,\dots, n_1 \} \subset \{ M_i''', i=1,2,\dots, n_3 \}$$

Наоборот, пусть $M_k''' \in \{ M_i''', i=1,2,\dots, n_3 \}$, тогда выполнение требования I для множества M_k''' следует из выполнения требования (i) для множества M_k''' и из равенства $M'' = M$ (Т3). Выполнение требования 2 для множества M_k''' доказывается от противного.

В самом деле, если 2 не верно, то существует r $(I \le r \le n)$ такое, что множество $M_k''' \cap M_r$ содержит более одного элемента. С другой стороны, для любого $j (I \le j \le n_2)$ множество $M_k''' \cap M_j''$ содержит не более одного элемента. Следовательно,

$M_r \notin \{ M_i'', i=1,2,\dots, n_2 \}$. Из T4 следует, что

$M_r \in \{ M_i'', i=1,2,\dots, n_2 \}$

Пришли к противоречию.

Итак, доказали теорему для $p = I$. Точно таким же образом теорема доказывается для произвольного $p > I$.

Отметим, что T9 для $p = 2,3,\dots$ следует непосредственно из T5, T7 и T8, а T7 следует непосредственно из T5, T6, T8 и T9.

TIO. Если для любого k $(1 \le k \le n)$

$$\bigcup_{i=1}^{k-1} M_i \cup \bigcup_{i=k+1}^{n} M_i \ne M \quad \text{и} \qquad (I.3)$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i = \emptyset \quad \text{то} \qquad (I.4)$$

$$\bigcup_{i=1}^{m_1} B_i' = M'$$

В самом деле, пусть $x \in M'$ $(M' = M)$. Из (I.4) следует, что множества M_i можно разбить на две группы,так что x принадлежит любому множеству первой группы и не принадлежит никакому множеству второй группы, при этом эти две группы не пустые. Из (I.3) следует, что существует элемент y из M', который не принадлежит никакому множеству M_i из первой группы. Следовательно, элементы x и y образуют множество альтернативных элементов относительно $\{ M_i, i=1,2,\dots, n \}$.

Тогда существует $i (I \le i \le n_1)$ такое, что $x,y \in M_i'$ и, следовательно, существует $j (I \le j \le m_1)$ такое, что $x \in B_j'$. Получили $M' \subset \bigcup_{i=1}^{m_1} B_i'$. Из определения множеств B_i' следует, что $\bigcup_{i=1}^{m_1} B_i' \subset M'$. Итак, получили, что $\bigcup_{i=1}^{m_1} B_i' = M'$.

2. Дополнительные элементы

Пусть даны множества $N_1, N_2, \dots, N_r$ $(r \geq I)$ такие, что $N_i \ne N_j$, если $i \ne j$.

Предполагаем, что

$$N = \bigcup_{i=1}^{r} N_i$$

Определение 2. Элемент x из множества N называется дополнительным относительно совокупности $\{ N_i, i=1,2,\dots, r \}$, если для любого i такого, что $x \in N_i$ существует j такое, что $N_j = N_i - \{ x \}$.

Определение 3. Совокупность $\{ N_i, i=1,2,\dots,r \}$ называется совокупностью результирующих множеств, если для любого множества N_k, которое является подмножеством множества N_ℓ, все элементы разности $N_\ell \setminus N_k$ являются дополнительными относительно совокупности $\{ N_i, i=1,2,\dots, r \}$.

Из определений 2 и 3 вытекает следующее утверждение:

TII. Совокупность результирующих множеств можно определить заданием ее максимальных множеств и ее дополнительных элементов. (Множество X из совокупности $\{ N_i, i=1,2, \dots, r \}$ называется максимальным, если оно не является подмножеством некоторого множества из этой совокупности).

3. Каскад простых правил умолчания

Пусть даны конечные множества $M_1, M_2, \dots, M_n$ $(n \geq I)$ такие, что $M_i \ne M_j$, если $i \ne j$.

Предполагаем, что имеют места равенства:

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i \text{ и}$$

$$\{ M_i, i=1,2,\dots, n \} = \{ B_i, i=1,2,\dots, m \} \cup \{ E_i, i=1,2,\dots \ell$$

Пусть задано множество N дополнительных элементов относительно совокупности $\{N_i, i=1,2,\dots,r\}$. Предполагаем, что $\{N_i, i=1,2,\dots,r\}$ является совокупностью результирующих множеств и семейство максимальных множеств совокупности $\{N_i, i=1,2,\dots,r\}$ совпадает с семейством максимальных множеств совокупности $\{M_i, i=1,2,\dots, n\}$.

Рассмотрим последовательность пар множеств (L_1, R_1), $(L_2, R_2), \dots, (L_p, R_p)$ $(p \geqslant 1)$, где L_i и R_i множества из совокупности $\{M_i, i=1,2,\dots,n\}$

Предполагаем, что

$(L_i, R_i) \neq (L_j, R_j)$, если $i \neq j$ и множество R_i состоит только из одного элемента – r_i, который не принадлежит множеству N.

Рассмотрим последовательность функций $f_1, f_2, \dots, f_p$ $(p \geqslant 1)$ таких, что

$$f_1(Z_1) = Z_2,$$
$$f_2(Z_2) = Z_3,$$
$$\dots\dots$$
$$f_p(Z_p) = Z_{p+1},$$

где Z_i $(i = 1,2,\dots, p+1)$ обозначает множество. Такую последовательность назовем каскадом функций.

Для выражения каскада функций $f_i (1 \leq i \leq p)$ через последовательность пар (L_i, R_i) сформулируем следующие два условия:

(i) Для любого множества M'_j $(1 \leq j \leq n_1)$, содержащего элемент r_i $(1 \leq i \leq p)$, имеет место равенство:

$$M'_j \cap Z_i = \emptyset.$$

(ii) Имеет место включение: $L_i \subset Z_i$.

Выразим каскад функций f_i $(1 \leq i \leq p)$ через последовательность пар (L_i, R_i) следующим образом:

Пусть Z_1 – заданное множество.

Если условие (i) и условие (ii) выполнены, то множество Z_{i+1} полагается равным множеству $Z_i \cup R_i$. В противном случае множество Z_{i+1} полагается равным множеству Z_i.

Очевидно функция f_i $(I \leq i \leq p)$, определенная через пару (L_i, R_i), является функцией расширения.

Вводим совокупность $\{K_i,\ i=1,2\dots,\ t\}$ $(t \geq 1)$ ключевых множеств относительно совокупности $\{M_i,\ i=1,2,\dots,\ n\}$ таких, что

$\{K_i, i=1,2,\ \dots,\ t\} \subset \{M_i, i=1,2,\ \dots,\ n\}$ и

не существуют i и j $(I \leq i, j \leq t;\ i \neq j)$ таких, что $K_i \subset K_j$.

Пусть множество Z_1 является произвольным множеством из совокупности $\{M_i,\ i = I,2,\dots,\ n)$, для которого существует j $(I \leq j \leq t)$ такое, что $K_j \subset Z_1$ и каскад функций $f_i (I \leq i \leq p)$ определен через последовательность пар (L_i, R_i). Тогда каскад функций назовем каскадом простых правил умолчания относительно совокупности $\{M_i,\ i=1,2,\dots,\ n\}$.

Нетрудно получить следующее утверждение:

TI2. В каскаде простых правил умолчания относительно совокупности $\{M_i,\ i=1,2,\dots,\ n\}$ все множества Z_i $(2 \leq i \leq p+I)$ являются множествами из совокупности $\{M_i,\ i=1,2,\dots,\ n\}$.

Под составным правилом умолчания относительно совокупности $\{M_i, i=1,2,\dots,n\}$ будем понимать линейный участок каскада простых правил умолчания относительно той же совокупности $\{M_i, i=1,2,\dots,\ n\}$.

Если любое множество Z_{p+1} каскада простых правил умолчания относительно совокупности $\{M_i, i=1,2,\dots,\ n\}$ принадлежит совокупности результирующих множеств $\{N_i,\ i=1,2,\dots,\ r\}$, то каскад простых правил умолчания называется полным.

Предполагаем, что имеет место равенство:

$$R = \bigcup_{i=1}^{p} R_i .$$

Через $\max M'_k$ обозначим k-тое максимальное множество совокупности $\{M'_i,\ i=1,2,\dots,\ n_1\}$ $(1 \leq k \leq n_1^1)$.

TI3. Если каскад простых правил умолчания относительно совокупности $\{M_i,\ i=1,2,\dots,n\}$ является полным и совокупность ключевых множеств относительно той же совокупности содержит только пустое множество, то имеют место следующие утверждения:

I. Если $\max M'_k \cap \max M'_j = \emptyset$ $(1 \leq k \leq n_1^1)$ для любого j $(1 \leq j \leq n_1^1)$ такого, что $j \neq k$ и множество $\max M'_k$ содержит не только дополнительные элементы, то $R \cap \max M'_k \neq \emptyset$.

2. Пусть $\max M'_k \cap \max M'_j = P$ $(1 \le k, j \le n_1^1; k \ne j)$, где множество P не пустое. Тогда

а) Если существует недополнительный элемент x из множества $\max M'_k \setminus P$ и не существует элемента z из множества $M' \setminus (\max M'_k \cup \max M'_j)$, чтобы $\{x,z\} \in \{M'_i,\ i=1,2,\dots,n_1\}$, то $R \cap (\max M'_k \setminus P) \ne \emptyset$.

б) Пусть существуют недополнительный элемент x из множества $\max M'_k \setminus P$ и элемент y из множества $\max M'_j \setminus P$ $(\{x,y\} \notin \{M'_i,\ i=1,2,\dots,n_1\})$ такие, что для любого элемента z из множества $M' \setminus (\max M'_k \cup \max M'_j)$, для которого $\{x,z\} \in \{M'_i, i=1,2\dots,n_1\}$, имеем $\{y,z\} \in \{M'_i,\ i=1,2,\dots n_1\}$. Тогда имеет место неравенство $R \cap (\max M'_k \setminus P) \ne \emptyset$.

Доказательство

Рассмотрим случай, когда выполняются условия пункта I. Предположим, что каскад простых правил умолчания преобразует пустое множество в множество X. Если множество $X \cap \max M'_k$ пустое, то множество $X \cup \{x\}$ принадлежит совокупности $\{M_i, i=1,2,\dots,n\}$. Здесь x обозначает недополнительный элемент множества $\max M'_k$. Однако множество X результирующее – пришли к противоречию. Следовательно, множество $X \cap \max M'_k$ непустое. Из $X \subset R$ следует, что множество $R \cap \max M'_k$ непустое.

Рассмотрим случай, когда выполняются условия пункта (а). Отметим, что существует элемент y, принадлежащий множеству $M'_j \setminus P$, такой, что множество $\{x,y\}$ не принадлежит совокупности $\{M'_i, i=1,2,\dots,n_1\}$. В самом деле, если такой элемент y не существует, утверждение $x \in P$ было бы неверно. Из $\{x,y\} \notin \{M'_i, i=1,2,\dots,n_1\}$ следует, что $\{x,y\} \in \{M_i, i=1,2\dots,n\}$.

Предположим, что каскад простых правил умолчания преобразует множество $\{x,y\}$ в множество $X \cup \{x,y\}$. Пусть он преобразует множество $X \cup \{y\}$ в множество $X \cup \{y\} \cup Y$. Если множество $Y \cap (\max M'_k \cup \max M'_j)$ пустое, то множество $X \cup \{y\} \cup Y \cup \{x\}$ принадлежит совокупности $\{M_i, i=1,2,\dots n\}$.

Однако множество $X \cup \{y\} \cup Y$ результирующее и элемент x недополнительный. Пришли к противоречию. Из $Y \cap (\max M'_k \cup \max M'_j) = \phi$ и $y \in X \cup \{y\} \cup Y$ следует, что $Y \cap (\max M'_k \setminus P) \neq 0$ и, следовательно, $R \cap (\max M'_k \setminus P) \neq \phi$.

Рассмотрим случай, когда выполняются условия пункта (б). Предположим, что каскад простых правил умолчания преобразует множество $\{x, y\}$ в множество $X \cup \{x,y\}$. Пусть он преобразует множество $X \cup \{y\}$ в множество $X \cup \{y\} \cup Y$. Если множество $Y \cap (\max M'_k \cup \max M'_j)$ пустое, то множество $X \cup \{y\} \cup Y \cup \{x\}$ принадлежит совокупности $\{M_i, i=1,2,\dots, n\}$, так как для любого элемента z из множества $M' \setminus (\max M'_k \cup \max M'_j)$, для которого $\{x,z\} \in \{M'_i, i=1,2,\dots, n_1\}$, имеем $\{y,z\} \in \{M'_i, i=1,2,\dots, n\}$. Далее аналогично пункту а) доказывается, что $R \cap (\max M'_k \setminus P) \neq \phi$.

Заметим, что если множество M содержит только дополнительные элементы, то пустой каскад правил умолчания (т.е. $R = \phi$) является полным.

Предположим, что имеет место равенство $R_o = \bigcup_i R_i$, где индекс i ($1 \leq i \leq p$) пробегает все i, для которых $L_i = \phi$.

T14. Пусть $\max M'_k \cap \max M'_j = P_{k,j}$ ($1 \leq k, j \leq n^1_1$; $k \neq j$). Предположим, что совокупность ключевых множеств относительно совокупности $\{M_i, i=1,2,\dots n\}$ содержит только пустое множество и для любого k и j ($1 \leq k, j \leq n^1_1$; $k \neq j$) множество $\max M'_k \setminus P_{k,j}$

а) либо содержит только дополнительные элементы,

б) либо содержит недополнительный элемент x, который принадлежит R_o и не существует элемента y из $M \setminus \max M'_k$ такого, что $\{x,y\} \in \{M'_i, i=1,2,\dots, n_1\}$,

в) либо содержит недополнительный элемент x из R_o, и для любого элемента y из $M \setminus \max M'_k$, для которого $\{x,y\} \in \{M'_i, i=1,2,\dots, n_1\}$, а также для любого недополнительного элемента z из $\max M'_k \setminus P_{k,j} \setminus R_o$ имеем $\{y,z\} \in \{M'_i, i=1,2,\dots, n_1\}$, Если все множества $\max M'_k \setminus P_{k,j}$ $(k \neq j)$ содержат только дополнительные элементы и множество М содержит не только дополнительные элементы, то $R_o \neq \phi$.

При этих предположениях каскад простых правил умолчания является полным.

Доказательство

В самом деле, пусть M_p произвольное множество из совокупности $\{ M_i, i=1,2,.., n \}$. Предположим, что каскад простых правил умолчания преобразует множество M_p в множество M_q . Допустим, что существует недополнительный элемент v такой, что $M_r = M_q \cup \{v\}$, $M_r \neq M_q$ и $M_r \in \{ M_i, i=1,2,..., n \}$..

Пусть множество M_q непустое и элемент w принадлежит M_q . Тогда существуют k и j такие, что $v \in \max M_k \setminus P_{k,j}$ и $w \in \max M'_j \setminus P_{k,j}$. Если множество $\max M'_k \setminus P_{k,j}$ содержит только дополнительные элементы, то элемент v дополнительный. Пришли к противоречию. Следовательно, случай (а) не имеет места. В случае (б) существует элемент s из множества $\max M'_k$, который принадлежит M_q. Получили противоречивые утверждения $s,v \in M_r$ и $s,v \in \max M'_k$. Если в случае (в) существует элемент s из множества $\max M_k$, который принадлежит M_q , то получаем противоречивые утверждения $s,v \in M_r$ и $s,v \in \max M'_k$. В противном случае существует элемент y из M_q ($y \in M \setminus \max M'_k$) такой, что $\{x,y\} \in \{ M'_i, i=1,2,.., n_1 \}$. Если элемент v принадлежит $\max M'_k \setminus P_{k,j} \setminus R_o$, то получаем противоречивые утверждения $\{y,v\} \in \{ M'_i, i=1,2,...,n_1\}$ и $\{y,v\} \in M_r$. Если элемент v принадлежит R_o , то получаем противоречивые утверждения $v \in M_q$ и $M_r \neq M_q$.

Пусть множество M_q пустое. Тогда множества M_p и R_o пустые. Из $R_o = \phi$ следует, что все множества $\max M'_k \setminus P_{k,j} (k \neq j)$ содержат только дополнительные элементы. Получили противоречивые утверждения: множество М содержит только дополнительные элементы и недополнительный элемент v принадлежит М. Теорема доказана.

Простое правило умолчания $(L_i\ ,\ R_i)$ $(I \leq i \leq p)$ (т.е. функция f_i , определенная через пару (L_i, R_i)) каскада простых правил умолчания называется паразитным, если оно не удовлетворяет, по крайней мере, одному из условий (i) или (ii) для любого допустимого Z_1 .

TI5. Пусть совокупность ключевых множеств относительно совокупности $\{M_i, i=1,2,\ldots, n\}$ содержит только непустое множество K. Простое правило умолчания (L_i, R_i) $(1 \leq i \leq p)$ является паразитным, если

I. $L_i \cup K \notin \{M_i, i=1,2,\ldots, n\}$ или

2. $R_i \cup K \notin \{M_i, i=1,2,\ldots, n\}$ или

3. $r_i \in K$

Доказательство

В самом деле, в случае I никогда не будет выполняться условие (ii). Действительно, если для некоторого M_k $(I \leq k \leq n)$ оно выполняется, тогда будем иметь $K \subset M_k$ и $L_i \subset M_k$ и, следовательно, $L_i \cup K \subset M_k$, т.е. $L_i \cup K \in \{M_i, i=1,2,\ldots, n\}$. Пришли к противоречию.

В случаях 2 и 3 никогда не будет выполняться условие (i). Действительно, в случае 2 для любого M_k $(K \subset M_k)$ существует элемент $x(x \in M_k)$ такой, что $\{r_i, x\} \in \{M'_i, i=1,2,\ldots, n_1\}$. В случае 3 невыполнение условия (i) очевидно.

Определим функцию $Q(x)$ при помощи равенства:

$$Q(x) = \bigcup_j \{y_j\} \cup \{x\},$$

где элементы x и y_j принадлежат множеству M, а индекс j пробегает все значения, для которых $\{x,y_j\} \in \{M'_i, i=1,2,\ldots, n_1\}$. Заметим, что может не существовать пара $\{x,y_j\}$ такая, что $\{x,y_j\} \in \{M'_i, i=1,2,\ldots, n_1\}$. Тогда множество $Q(x)$ состоит только из элемента x .

Пусть задан некоторый каскад простых правил умолчания относительно совокупности $\{M_i, i=1,2,\ldots, n\}$, который определяет функцию F . Более подробно пусть задано:

1. Непустое ключевое множество K.
2. Совокупность множеств альтернативных элементов $\{M_i', i=1,2,\ldots, n_1\}$.
3. Множество дополнительных элементов N .
4. Последовательность пар (L_i, R_i) ($1 \leq i \leq p$).

Определим множество A при помощи равенства:

$$A = M \setminus \bigcup_{x \in K} Q(x).$$

Исходя из заданного каскада, построим каскад простых правил умолчания относительно совокупности $\{M_i \cap A, i=1,2,\ldots, n\}$, который определяет функцию G . Более подробно основные компоненты нового каскада будут:

а) пустое ключевое множество $K \cap A$,

б) совокупность множеств альтернативных элементов
$$\{ M_i' \cap A, i=1,2,\ldots, n_1 \},$$

в) множество дополнительных элементов $N \cap A$,

г) последовательность пар ($L_i \cap A$, $R_i \cap A$) ($1 \leq i \leq p$).

Очевидно, $\{M_i' \cap A, i= 1,2,\ldots, n_1\}$ является совокупностью альтернативных множеств относительно совокупности $\{M_i \cap A, i=1,2,\ldots, n\}$.

Из определения множества A и совокупности $\{ M_i, i=1,\ldots, n\}$ следует, что

T16. $X \in \{M_i \cap A, i=1,2,\ldots, n\}$ тогда и только тогда, когда $X \cup K \in \{ M_i, i=1,2,\ldots, n \}$.

T17. Если $Y, L_i \in \{ M_i \cap A, i=1,2,\ldots, n\}$ $(1 \leq i \leq p)$, то $L_i \subset Y \cup K$ тогда и только тогда, когда $L_i \cap A \subset Y$.

<u>Доказательство</u>

Пусть $L_i \subset Y \cup K$. Тогда $L_i \cap A \subset (Y \cup K) \cap A$. Однако $(Y \cup K) \cap A = (Y \cap A) \cup (K \cap A)$, а $Y \cap A = Y$, так как $Y \cup K \in \{M_i, i=1,2,\ldots, n\}$ (T16) и $K \cap A \neq \emptyset$ в силу определения множества A. Следовательно, $L_i \cap A \subset Y$.

Пусть $L_i \cap A \subset Y$. Тогда $(L_i \cap A) \cup K \subset Y \cup K$. Однако $L_i \subset (L_i \cap A) \cup K$, так как $L_i \cup K \in \{M_i, i=1,2,\ldots,n\}$ (TI6) и, следовательно, $L_i \subset Y \cup K$.

TI8. Если $Y, R_i \in \{M_i \cap A,\ i=1,2,\ldots,\ n\}$ и $r_i \notin K\ (1 \le i \le p)$, то для любого M'_k, содержащего R_i, имеем $(Y \cup K) \cap M'_k \ne \emptyset$ тогда и только тогда, когда для любого $M'_k \cap A$, содержащего $R_i \cap A$, имеем $Y \cap (M'_k \cap A) = \emptyset$.

Доказательство

I. Из $R_i \in \{M_i \cap A,\ i=1,2,\ldots,\ n\} (1 \le i \le p)$ следует, что $R_i \subset M'_k$ тогда и только тогда, когда $R_i \cap A \subset M'_k \cap A$.

2. Пусть $(Y \cup K) \cap M'_k = \emptyset$. Тогда будем иметь последовательно: $(Y \cap M'_k) \cup (K \cap M'_k) = \emptyset$; $Y \cap M'_k = \emptyset$; $(Y \cap M'_k) \cap A = \emptyset$; $Y \cap (M'_k \cap A) = \emptyset$.

3. Пусть $Y \cap (M'_k \cap A) = \emptyset$. Тогда последовательно получаем: $Y \cap A = Y$, так как $Y \in \{M_i \cap A, i=1,2,\ldots,n\}$; $Y \cap M'_k = \emptyset$, так как $(Y \cap A) \cap M'_k = \emptyset$; $K \cap M'_k = \emptyset$, так как в противном случае существует элемент x из M и $x \ne r_i$ ($r_i \in M'_k$ и $r_i \notin K$) такой, что $x \in K$ и $x \in M'_k$. Имеем $x, r_i \in R_i \cup K$ и $x, r_i \in M'_k$, что противоречит предположению $R_i \cup K \in \{M_i,\ i=1,2,\ldots,\ n\}$. Следовательно, $(Y \cap M'_k) \cup (K \cap M'_k) = (Y \cup K) \cap M'_k = \emptyset$.

Из доказанного в пунктах I,2 и 3 следует утверждение теоремы.

Следующее утверждение легко следует из TI7 и TI8.

TI9. Если $X \in \{M_i \cap A, i=1,2,\ldots,n\}$ и для любого $i\ (1 \le i \le p)$ $L_i, R_i \in \{M_i \cap A, i=1,2,\ldots,n\}, r_i \notin K$, то $F(X \cup K) = G(X) \cup K$.

Утверждение TI7, TI8 и TI9 легко можно обобщить в случае, когда задана произвольная совокупность ключевых множеств $\{K_i, i=1,2,\ldots,\ t\}$, т.е.

TI7$'$. Если $Y, L_i \in \{M_i \cap A, i=1,2,\ldots,n\}$ $(1 \le i \le p)$, то $L_i \subset Y \cup K_j$ $(1 \le j \le t)$ тогда и только тогда, когда $L_i \cap A \subset Y$.

TI8$'$. Если $Y, R_i \in \{M_i \cap A, i=1,2,\ldots,n\}$ $(1 \le i \le p)$ и $r_i \notin K_j$ $(1 \le j \le t)$, то для любого M'_k, содержащего R_i, имеем

$(Y \cup K_j) \cap M'_k = \varnothing$ тогда и только тогда, когда для любого $M'_k \cap A$, содержащего $R_i \cap A$, имеем $Y \cap (M'_k \cap A) = \varnothing$

Утверждения TI7′ и TI8′ позволяют свести отыскание паразитных правил умолчания в каскаде, имеющем произвольную совокупность ключевых множеств, к отысканию паразитных правил в каскаде, имеющем только пустое ключевое множество.

TI9′. Если $X \in \{M_i \cap A,\ i=1,2,\ldots,n\}$ и для любого i $(1 \le i \le p)$ $L_i, R_i \in \{M_i \cap A, i=1,2,\ldots, n\}$ и $r_i \notin K_j$ $(1 \le j \le t)$, то $F(X \cup K_j) = G(X) \cup K_j$.

Утверждение TI9′ позволяет свести решение проблемы полноты для каскада простых правил умолчания, имеющего произвольную совокупность ключевых множеств, к решению этой проблемы для каскада простых правил умолчания, имеющего только пустое ключевое множество.

Пусть $Q_i(x) = Q(x) \cap (\bigcup_j R_j)$, где индекс j пробегает все j, для которых $L_j = \varnothing$ и $1 \le j \le i-1$.

T20. Пусть совокупность ключевых множеств относительно совокупности $\{M_i, i=1,2,\ldots,n\}$ содержит только пустое множество. Простое правило умолчания (L_i, R_i) $(1 \le i \le p)$ является паразитным, если

а) $r_i \in L'_i$ или,

б) $L_i \cup R_i \notin \{M_i, i=1,2,\ldots, n\}$ или,

в) существует элемент r_j из множества $Q_i(r_i)$, для которого не существует элемента u из множества $M \setminus Q(r_i)$ такого, что $\{u, r_j\} \in \{M'_i, i=1,2,\ldots, n_1\}$ или

г) оно таково для каскада, полученного из данного путем отбрасывания простых правил умолчания $(L_1,R_1), (L_2,R_2),\ldots,(L_q,R_q)$, где либо $q=j'$ $(1 \le j < i)$, если существует r_ℓ $(1 \le \ell < j)$ такое, что $r_\ell = u$; либо $q=0$ – в противном случае и, кроме того, этот каскад имеет следующую совокупность ключевых множеств

$$\{\{u\} : \{u, r_j\} \in \{M'_i, i=1,2,\ldots,n_1\} \vee u \in M \setminus Q(r_i) \vee r_j \in Q_i(r_i)\}.$$

Доказательство

В случаях (а) и (б) простое правило умолчания (L_i, R_i) паразитное, так как если условие (ii) выполняется, то условие (i) не выполняется.

Рассмотрим случай (в). Если множество $Z_j (f_j(Z_j) = Z_{j+1})$ содержит элемент из $Q(r_i)$, то Z_i тоже его содержит и условие (i) не выполняется для (L_i, R_i). Пусть множество Z_j не содержит ни одного элемента из $Q(r_i)$. Тогда условия (i) и (ii) выполняются для (L_j, R_j) и, следовательно, Z_i будет содержать элемент из $Q(r_i)$.

Рассмотрим случай (г). Если $Z_j \cap Q(r_i) \neq \emptyset$, то $Z_i \cap Q(r_i) \neq \emptyset$ и условие (i) не выполняется для (L_i, R_i). Если $Z_j \cap (Q(r_i) \cup K) = \emptyset$ ($K = \bigcup_{i=1}^{t} K_i$, где K_i – ключевое множество), то условия (i) и (ii) выполняются для (L_j, R_j) и, следовательно, условие (i) не будет выполняться для (L_i, R_i). В противном случае $(Z_j \cap Q(r_i) = \emptyset \wedge Z_j \cap K \neq \emptyset)$ правило умолчания (L_i, R_i) является паразитным по условию (если $q=0$, то $Z_1 \cap K \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $Z_j \cap K \neq \emptyset$).

Утверждения T13, T14, T15 и T20 определяют алгоритмы проверки корректности правил умолчания.

4. Описание правил умолчания

Программа на абстрактном языке, которая описывает правила умолчания, имеет древесную структуру. Поэтому программу будем рассматривать как дерево, любой вершине которого поставлен в соответствии каскад простых правил умолчания.

Пусть p – количество путей в дереве и q_k – количество вершин (каскадов простых правил умолчания), принадлежащих k-тому пути. Верхний индекс используется для обозначения компонент каскада, поставленного в соответствие данной вершине.

Предположим, что для любого пути в дереве выполняется следующее требование:

$$M^i \cap M^j = \emptyset \text{, где } i \neq j \text{ и } 1 \leq i, j \leq q_k \quad (1 \leq k \leq p) \qquad (4.1)$$

Функция расширения $Y=D(X)$, задающая правила умолчания, определяется при помощи соответствующего дерева следующим образом:

I. Находим самый левый путь (например, с номером ℓ) такой, что для любого j $(1 \le j \le q_\ell)$ имеет место:

$X \cap M^j \supset K_s$ $(0 \le s \le t)$, где K_0 обозначает пустое ключевое множество.

2. Определяем функцию D при помощи следующего равенства:

$Y=D(X)=\bigcup\limits_j F^j(X \cap M^j)$, где функция расширения F^j задана каскадом, сопоставленным j-той вершине ℓ-того пути.

Множество X принадлежит области допустимых значений аргумента функции D , если путь, указанный в п.I:

а) существует,

б) для этого пути $X \subset \bigcup\limits_j M^j$ и

в) для него не существует j такое, что

$$X \cap M^j \notin \{M_i^j \quad , i=1,2,\dots, n^j\}.$$

Из (4.I) следует, что имеет место:

$F^i(X \cap M^i) \cap F^j(X \cap M^j)=\emptyset$, где $i \ne j$ и $1 \le i, j \le q_\ell$.

Нетрудно показать, что

T2I. Для любой функции расширения $Y_i= D(X_i)$ $(i=1,2,\dots, d)$ существует функция расширения $Y_i'=D'(X_i')$ $(i=1,2,\dots, d')$ (вообще говоря, не единственная), которая является продолжением функции $Y=D(X)$ (т.е. $\{X_i, i= 1,2,\dots, d\} \subset \{X_i' , i=1,2,\dots, d'\}$ и $D(X_i)=D'(X_i)$) и ее можно описать абстрактным языком.

В самом деле, можно так упорядочить совокупность $\{X_i, i=1,2,\dots, d\}$, что, если $X_p \subset X_q$, то $p > q$. Если для любого пути в дереве имеем последовательно слева направо $X_i=\bigcup\limits_j K_p^j$ и $Y_i=\bigcup\limits_j F^j(X_i \cap M^j)$ $(i=1,2,\dots, d$ и $p=1,2,\dots,t^j)$, то оно определяет функцию D'.

На практике удобство описания правил умолчания является результатом подходящего совместного использования взаимно дополняющихся возможностей дерева и каскада простых правил умолчания.

Если использование каскада для описания F^j удобно, однако, существуют i и k такие, что

$F^j(X_i \cap M^j) \subset F^j(X_k \cap M^j)$ и множество

$S = F^j(X_k \cap M^j) \setminus F^j(X_i \cap M^j)$

содержит не только дополнительные элементы, то тогда целесообразно для любого недополнительного элемента $x \in S$ добавить к M^j новый элемент y (т.е.считать, что $y \in M^j$) так, что $\{x,y\} \in \{M_i'^j,\ i=1,2,\dots,n^{1,j}\}$. Каскад легко можно определить так, что для функции F'^j будет иметь место:

$$F'^j(X_i \cap M^j) \setminus S = F^j(X_i \cap M^j \setminus S).$$

Работа должена на Всесоюзном симпозиуме "Теория языков и методы построения систем программирования" (Алушта, 26.VI.1972 - I.VII.1972 г.).

Автор искренне благодарен Н.Н.Говоруну за содействие, а также Е.А.Жоголеву и В.П.Ширикову за полезные обсуждения и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Х.Бычваров.
   Сообщение ОИЯИ, II-6429, Дубна, 1972 г.

2. Универсальный язык программирования PL/1 .
   Перевод с английского под редакцией В.М.Курочкина.
   Москва, 1968 г.

3. PL/1 Language Specifications. Order Number GY 33-6003-2 IBM 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 сентября 1972 года.