6409

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

11 - 6409

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

В.И.Кочкин

НЕКОТОРЫЕ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В МЕТОДЕ МОНТЕ-КАРЛО, СТАНДАРТНЫЕ ПОДПРОГРАММЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ДЛЯ ЭВМ БЭСМ-6

1972

11 - 6409

В.И.Кочкин

НЕКОТОРЫЕ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В МЕТОДЕ МОНТЕ-КАРЛО, СТАНДАРТНЫЕ ПОДПРОГРАММЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ДЛЯ ЭВМ БЭСМ-6

ВВЕДЕНИЕ

В различных расчетах по методу Монте-Карло применяются случайные величины, распределенные по определенным законам. Наиболее часто употребляются случайные числа, равномерно распределенные в интервале (0,I), случайные числа, распределенные по экспоненциальному закону, и другие.

Ввиду отсутствия в библиотеке стандартных подпрограмм для ЭВМ БЭСМ-6 подпрограмм для получения случайных величин, распределенных по закону, заданному в виде гистограммы, по экспоненциальному закону и по закону Пуассона, целью настоящей работы было написание данных подпрограмм. Подпрограммы выполнены на языке ФОРТРАН и на автокоде MADLEN . В основу их положены алгоритмы из работы /3/. Эмпирические распределения случайных чисел по данным подпрограммам сравнивались с теоретическими распределениями по критерию χ^2 . Результаты детальной проверки по системе тестов /6/ будут предметом другого сообщения. В работе случайные числа, равномерно распределенные в интервале (0,I), обозначаются через γ_i .

I. Генератор случайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0,I)

В библиотеке стандартных программ для БЭСМ-6 есть генератор равномерно распределенных случайных чисел RNDM (X), созданный Г.А.Ососковым и В.В.Галактионовым/2/. Предлагаемый вниманию генератор RAND (N) имеет счетную часть в I4 команд и занимает 36 ячеек в памяти машины против 32 команд и 7I ячейки для генератора RNDM (X).

За основу данного генератора случайных чисел взят генератор из работ/7,8/. Очередное случайное число получается из предыдущего путем

$$\gamma_{i+1} \equiv \gamma_i \left(2^a + 1\right) + c \;(mod\; 2^{40}).$$

Подпрограмма написана на автокоде MADLEN и оформлена как FUNCTION RAND (N). Обращение к подпрограмме: RAND (N), где I $\leq$ N $\leq$ I2. В конкретной рабочей программе изменением параметра N может вычисляться до I2 независимых случайных последовательностей. Для $a = 9$ и 23, $c = 3$ соответствующие периоды и отрезки апериодичности равны I64697; 388484 и I053317; 786732.

2. Моделирование показательного распределения

В работе[5] Г.А.Ососковым предложен экономный алгоритм получения псевдослучайных чисел, распределенных по показательному закону. Пусть случайная величина распределена с плотностью

$$P(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x>0),\ (\lambda>0). \tag{I}$$

Тогда формула

$$\eta_k = \frac{\ln 2}{\lambda}\left(P_{2k} + \gamma_{2k+1}\left(a\gamma_{2k+1} + b\right)\right) \tag{2}$$

дает псевдослучайные числа η_k, распределенные по закону (I). Здесь γ_{2k+1}, γ_{2k} – равномерно распределенные в (0,I) случайные числа; λ – параметр распределения (I); P_{2k} – число отрицательных единиц в порядке числа γ_{2k}; a = 0,34267I48; b = I – a. Подпрограмма написана на автокоде MADLEN и оформлена как FUNCTION EXPØN (AL), AL – вещественный параметр λ.

3. Получение случайных чисел, распределенных по закону, заданному в виде гистограммы

Рассматривается случай, когда гистограмма состоит из равных интервалов. Дан отрезок $[a, b]$, в котором расположена гистограмма, $\Delta = \frac{b-a}{n}$, n – число интервалов; ν_i – число значений случайной величины η в интервале Δi. Необходимо найти η такое, что $P\{\eta<x\} = \int_a^x P(y)dy$. Плотность вероятности $P(x)$ задана в виде гистограммы. $\sum_{i=1}^{n} \nu_i = N$, $\frac{\nu_i}{N}$ – вероят-

ность появления интервала с номером i, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i}{N} = 1$. Считаем, что в интервале $(\Delta(i+1), \Delta i)$. случайная величина η появляется равновероятно. Итак, вероятность появления значений $\Delta i \leq \eta \leq \Delta(i+1)$ равна $\frac{\nu_i}{N}$, тогда $N_i \leq \gamma_1 \leq N_{i+1}$ дает номер интервала i, где $N_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{i} \nu_j$, и

$$\eta = a + \Delta(i - \gamma_2)$$

есть искомое значение. Программа написана на ФОРТРАНЕ и оформлена как SUBROUTINE HLAW (A,B, N, K, M, FA, ETA).

Здесь A,B – начало и конец отрезка $[a, b]$; N – число ячеек гистограммы; $K \leq 0$ – гистограмма ненормирована, $K > 0$ – гистограмма нормирована; M – задаваемый массив гистограммы; FA – массив рабочих ячеек; ETA – результат.

4. Случайные числа, распределенные по закону Пуассона

Случайная величина η, принимающая целочисленные значения ($\eta = 0,1,2,..$), распределена по закону Пуассона с математическим ожиданием λ, если плотность вероятности задана выражением

$$P_k = P\{\eta = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \tag{I}$$

Для моделирования случайной величины η с распределением (I) применяется здесь тот же прием, что и в пункте 3, именно, по функции распределения $F(x)$ с помощью чисел γ_i строится $\eta = F^{-1}(\gamma)$, так что η имеет функцию распределения $F(x)$.

Опишем алгоритм подробнее.

Имеем $K_0 = [\lambda]$, вероятность p_{K_0} будет максимальна. Строим последовательность целых чисел (значений случайной величины η)

$$K_0,\ K_0+1,\ K_0-1,\ K_0+2,\ K_0-2\ldots,\ 0,\ 2K_0+1,\ldots,$$

где K_0-i есть значения η в убывающем порядке слева от K_0 и K_0+i - значения η в возрастающем порядке справа от K_0, и последовательность вероятностей их появления

$$P_{k_0},\ P_{k_0+1},\ \ldots,\ P_0,\ P_{2k_0+1},\ \ldots,\ \text{где}\quad p_i = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!},$$

в порядке, близком к порядку их убывания.

Далее строится последовательность величин

$$0\ ;\ P_{k_0}\ ;\ P_{k_0}+P_{k_0+1}\ ;\ P_{k_0}+P_{k_0+1}+P_{k_0-1}\ ;\ \ldots,$$

которая записывается как

$$0,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n,\ \ldots\ .$$

Берем случайное число γ и, если $P_n \le \gamma \le P_{n+1}$, то

$$\eta = \begin{cases} K_0 - \frac{n}{2}, & n < 2K_0+1 \quad \text{четное} \\ K_0 + \frac{n+1}{2}, & n < 2K_0+1 \quad \text{нечетное} \\ n, & n \geqslant 2K_0+1 \end{cases}$$

Программа вычисляет случайные числа η для параметра $\lambda \le 20$, $n_{max} = 44$, $P_{44} > 1-10^{-6}$. Для получения η при $\lambda > 20$ можно воспользоваться формулой $\eta = [\eta^* \sqrt{\lambda} + \eta^*]$, где η^* - нормальное число с параметрами (0,1) и может быть получено по стандартной программе RANNØR (C,D), имеющейся в библиотеке СП для БЭСМ-6. Подпрограмма написана на языке ФОРТРАН и оформлена как SUBROUTINE PØISSN (ALAMB , ETA), ALAMB $= \lambda$, ETA - результат. Есть два варианта, PØISN1 и PØISN2 . При работе PØISN 1 получается и запоминается таблица P_n, при работе PØISN 2 таблица не производится, а каждый раз вычисляются вероятности $P_к$. Первая программа получает 10 000 значений η за 0,533 сек, но занимает в памяти ЭВМ на 44 ячейки больше, чем вторая программа. Вторая программа производит 10 000 значений η за 0,732 сек, но занимает, соответственно, меньше места в памяти машины.

В заключение автор выражает благодарность Г.А.Ососкову и А.И.Салтыкову за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

I. Д.И.Голенко. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. Изд-во "Наука", М., 1965.

2. БСП, т.2, депонированная публикация ОИЯИ, БI-II-5I45, Дубна, I969.

3. Л.А.Кулюкина, Г.А.Ососков, Р.В.Полякова, Г.Л.Семашко. Стандартные программы, используемые в методе Монте-Карло. Препринт ОИЯИ, РII-3274, Дубна, I967.

4. Л.А.Кулюкина, Г.А.Ососков. Об использовании гистограмм при статистическом моделировании. Препринт ОИЯИ, РI0-3I06, Дубна, I967.

5. Г.А.Ососков. Генерирование на электронной вычислительной машине случайных чисел с показательным распределением. Журнал вычислительной математики и математической физики, т.7,№ 3, М., I967, стр. 7I0-7I3.

6. Г.А.Ососков, Р.В.Полякова. Псевдослучайные числа для ЭВМ "Минск-22". Депонированная публикация ОИЯИ, БI-II-5I65, Дубна, I970.

7. A.Rotenberg. Journal of the Assotiation for Computing Machinery, p.p. 75-77 1960, vol. 7 No 1.

8. В.И.Кочкин, А.Б.Попов, И.И.Шелонцев. Расчет характеристик слоистого детектора нейтронов. Припринт ОИЯИ, II-4602, Дубна, I969.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 апреля I972 г.

```
RAND    :     ,  NAME ,                    .FUNCTION RAND(N)
             8,  BASE ,C
              ,  ATI  ,12
            12,  WTC  ,
            14,  VTM  ,Z
            14,  XTA  ,
              ,  ASN  ,64-9
              ,  AAX  ,M
            14,  ARX  ,
              ,  ARX  ,C3
              ,  AAX  ,M
              ,  AOX  ,M1
              ,  E+N  ,64
            14,  ATX  ,
            13,  UJ   ,
C       :     ,  BSS  ,
M       :     ,  OCT  ,0017777777777777
C3      :     ,  LOG  ,3
M1      :     ,  OCT  ,4
D       :     ,  REAL ,0.931281846
D1      :     ,  REAL ,0.931281846
D2      :     ,  REAL ,0.929041314
D3      :     ,  REAL ,0.971254034
D4      :     ,  REAL ,0.962074415
D5      :     ,  REAL ,0.927842634
D6      :     ,  REAL ,0.917575374
D7      :     ,  REAL ,0.946881612
D8      :     ,  REAL ,0.659617348
D9      :     ,  REAL ,0.917043055
D10     :     ,  REAL ,0.931749397
D11     :     ,  REAL ,0.935847286
D12     :     ,  REAL ,0.857834761
Z       :     ,  BSS  ,13
              ,  DATA ,
            13,  SET  ,D
             1,       ,Z
              ,  END  ,
```

```
EXPON:,NAME,. FUNCTI ON EXPON(AL)
8,BASE,C
 ,ATI,14
 ,XTA,LN2
14,A/X ,
 ,ATX,R
 ,ITA,13
 ,ATX,REG
14,VTM,DE
 ,ITA,14
 ,CALL,RNDM
8,VTM,C
 ,ASN,64+41
 ,AOX,INT
 ,X-A,R64
 ,ATX,P
14,VTM,DE
 ,ITA,14
;CALL;RNDM
8,VTM,C
15,ATX,
 ,A*X,A
 ,A+X,B
15,A*X,
 ,A+X,P
 ,A*X,R
 ,WTC,REG
 ,UJ,
LN2:,REAL,0.69314718056
 DE:,REAL,-1.
 A:,REAL,0.34267148
 B:,REAL,0.65732852
INT:,INT,0
```

```
R64:,REAL,64.
C:,BSS,
R:,BSS,1
REG:,BSS,1
P:,BSS,1
,END,

      SUBROUTINE HLAW(A,B,N,K,M,FA,ETA)
      DIMENSION M(N),FA(N)
      DELT=(B-A)/N
      IF(K) 10,10,11
10    SUM=0
      DO 30 I=1,N
      SUM=SUM+M(I)
30    CONTINUE
      DO 40 I=1,N
      FA(I)=M(I)/SUM
40    CONTINUE
11    L=1
      SUM1=0.
      SUM2=FA(1)
      B1=RNDM(-1)
      DO 20 I=1,N
      IF(B1-SUM1)  12,12,13
12    ETA=0.
      RETURN
13     IF(B1-SUM2) 14,14,15
14    GO TO 21
15    L=L+1
      SUM1=SUM1+FA(I)
      SUM2=SUM1+FA(I+1)
20     CONTINUE
21     B2=RNDM(-1)
      ETA=A+DELT*(L-B2)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE  POISN1 (ALAMB,ETA)
      DIMENSION  P(44)
      DIMENSION  AL(1)
      DATA(AL=0.)
      IF(AL-ALAMB)  5,4,5
 5    EXPL=EXP(-ALAMB)
      KO=INT(ALAMB)
      LIM=2*KO+1
      DO 12 I=1,44
      IF(I-LIM) 10,10,11
10    K=KO+(I/2)*(2*MOD(I+1,2)-1)
      GO TO 13
11    K=I-1
13    IF(K) 20,21,20
20    FKL=1.
      DO 2 J=1,K
 2    FKL=FKL*ALAMB/(K+1-J)
      P(I)=EXPL*FKL
      GO TO 12
21    P(I)=EXPL
12    CONTINUE
 4    SUM=0.
      DO 3 I=1,44
      SUM=SUM+P(I)
 3    CONTINUE
      B1=RNDM(-1)
      IF(SUM-B1)   31,31,32
31    ETA=44.
      GO TO 6
32    L=1
      SUM1=P(L)
22    IF(B1-SUM1)  33,33,34
33    L=L-1
      GO TO 36
34    L=L+1
      SUM=SUM+P(L)
      GO TO 22
```

```
36    IF(L-2*KO-1) 40,41,41
41    ETA=L
      GO TO 6
40    IF(MOD(L+1,2)) 50,50,51
50    ETA=KO+(L+1)/2
      GO TO 6
51    ETA=KO-L/2
 6    AL=ALAMB
      RETURN
      END

      SUBROUTINE POISN2(ALAMB,ETA)
 5    EXPL=EXP(-ALAMB)
      SUM=0. $ B1=RNDM(-1) $ L=1
      KO=INT(ALAMB)
      LIM=2*KO+1
      DO 12 I=1,44
      IF(I-LIM) 10,10,11
10    K=KO+(I/2)*(2*MOD(I+1,2)-1)
      GO TO 13
11    K=I-1
13    IF(K) 20,21,20
20    FKL=1.
      DO 2 J=1,K
 2    FKL=FKL*ALAMB/(K+1-J)
      P=EXPL*FKL
      GO TO 14
21    P=EXPL
14    SUM=SUM+P
      IF(B1-SUM) 33,33,34
34    L=L+1
12    CONTINUE
      ETA=44.
      RETURN
33    L=L-1
36    IF(L-2*KO-1) 40,41,41
```

```
41    ETA=L
      RETURN
40    IF(MOD(L+1,2)) 50,50,51
50    ETA=KO+(L+1)/2
      RETURN
51    ETA=KO-L/2
      RETURN
      END
```