ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

11 - 4735

И.В. Пузынин

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ВВЕДЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ПАРАМЕТРА

Специальность 008 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1969

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент
Е.П. Жидков

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
В.И. Дмитриев
доктор физико-математических наук
Д.П. Костомаров

Ведущее предприятие:
Институт прикладной математики АН СССР

Автореферат разослан " " 1969 г.

Защита диссертации состоится " " 1969 г. на заседании Ученого совета Лаборатории вычислительной техники и автоматизации в конференц-зале ЛТФ ОИЯИ, г. Дубна, Московской обл.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета

Ю.В. Катышев

11 - 4735

И.В. Пузынин

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ВВЕДЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ПАРАМЕТРА

Специальность 008 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Одним из важных направлений в современной вычислительной математике является разработка эффективных методов численного решения нелинейных задач, часто возникаюших в физике и технике. Большую роль в развитии этого направления играют работы таких крупных математиков, как А.Н. Тихонов, Л.В. Канторович, Р. Беллман, Л. Коллатц.

В представляемой диссертации рассматривается метод приближенного решения краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\phi(y) \equiv y'' + f(x,y) = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

встречающихся в ряде физических проблем, например, в нелинейной теории поля и статистической теории ядра, в задачах движения ускоряемых частиц. Благодаря функциональному подходу в исследованиях рассматриваемый метод может быть применен и к другим задачам.

Идея предлагаемого метода заключается в сведении первоначальной статической задачи к некоторому динамическому процессу путем введения дополнительного непрерывного параметра – времени $t(0 \le t < \infty)$ – и исследовании этого процесса при $t \to \infty$. Для функционального уравнения

$$\phi(y) = 0, \tag{3}$$

где $\phi(y)$ – нелинейный оператор, переводящий B -пространство Y в B -пространство Z, при предположении существования хотя бы одного решения y^* этого уравнения, параметр t вводится таким образом, чтобы было выполнено соотношение

$$\frac{d}{dt}\phi(y(t)) = -\phi(y(t)), \quad y(0) = y_0 .$$

При определенных условиях это уравнение можно представить в форме

$$y' = -\phi'(y)^{-1}\phi(y), \quad y(0) = y_0 , \tag{4}$$

которая описывает динамический процесс, являющийся непрерывным аналогом метода Ньютона.

М.К. Гавуриным /1/ этот метод, наряду с другими непрерывными аналогами итерационных процессов, исследован в связи с доказательством существования решения (3). Следует, однако, заметить, что в целом ряде задач существование решения может быть установлено только с помощью более детальных исследований, а для некоторых практических задач оно бывает известным. В то же время непрерывный аналог метода Ньютона может быть успешно применен для численного решения этих задач. Поэтому естественно исследовать возможность применения этого метода для приближенного решения нелинейных задач при условии существования их решений.

Во введении реферируемой диссертации отмечается, что особенностью ряда исследований, посвященных численному решению нелинейных граничных задач, является тесная связь проблемы существования и единственности решения с методами приближенного решения этих задач. Это приводит к рассмотрению методов численного решения граничных задач при конкретных ограничениях на нелинейные части уравнений, являющихся достаточными для существования единственного решения рассматриваемой задачи.

Например, в работе /2/ метод приближенного решения задачи (1)-(2) исследуется при условии, что f и f_y' непрерывны в полосе $s = \{(x,y): 0 \le x \le 1, -\infty < y < \infty\}$ и, кроме того,

$$\sup_s f_y' = \eta < \pi^2 .$$

Это условие, обеспечивающее существование единственного решения рассматриваемой задачи, используется при доказательстве существования и единственности решения дискретного аналога краевой задачи и обосновании применимости метода Ньютона для нахождения этого решения.

Такой подход к построению методов приближенного решения приводит к ограничению числа задач, к которым эти методы могут быть применены. Разделив эти две самостоятельные проблемы, то есть строя методы численного решения при предположении существования решения, но не оговаривая выполнения конкретных условий, которые являются достаточными, а не необходимыми, можно существенно расширить круг задач, к которым будут применимы построенные алгоритмы. Кроме того, часто возникает необходимость решения нелинейных задач, когда единственности решения нет. Это, в свою очередь, приводит к необходимости иметь достаточно гибкие вычислительные схемы, которые могут быть построены на основе непрерывных динамических методов.

Такие методы объединены общей идеей сведения исходной стационарной задачи к непрерывному динамическому процессу путем введения в нее определенным образом дополнительного непрерывного параметра. Один из таких методов – метод "стабилизации" – основан на сходимости, при определенных условиях, решения параболического уравнения к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Однако условия, при которых исследовано это явление, носят весьма ограничительный характер. Например, в работе /3/ стабилизация установлена для нелинейности вида

$$f(x,u) = c(x)u + k(x,u),$$

где $c(x) \le 0$, а $|k(x,u)| \le \epsilon |u|$, $\epsilon > 0$ – достаточно мало.

Отметим также метод вариации параметра, предложенный для решения нелинейных задач Д.Ф. Давиденко. Этот метод в применении к решению краевой задачи (1)-(2) рассмотрен в работе /4/. Отмечено /1/, что, в отличие от упомянутого метода, непрерывный ньютоновский процесс обладает асимптотической устойчивостью, а это позволяет ожидать устойчивости численных методов, полученных на его основе.

Алгоритмы численного решения исходной нелинейной задачи можно строить в случае сходимости непрерывного ньютоновского процесса на основе методов приближенного интегрирования дифференциального уравнения (4), соответствующего данному динамическому процессу. Для краевой задачи (1)-(2) эти алгоритмы включают в себя решение последовательности граничных задач уже для линейных уравнений, что позволяет, в частности, использовать достаточно развитый аппарат их численного решения.

Основной материал диссертации изложен в трех главах.

1. В главе I, имеющей вспомогательное значение, рассматривается нелинейный оператор $\phi(y)$, переводящий элементы y B -пространства Y в B -пространство Z с элементами z. Предполагается, что уравнение

$$\phi(y) = 0 \tag{1.1}$$

имеет хотя бы одно решение y^*. Исследуются условия, при которых решение $y(t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = -\phi'(y)^{-1}\phi(y), \quad y(0) = y_0 \tag{1.2}$$

существует для $0 \le t < \infty$ и $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = y^*$.

В качестве приложения рассмотрены условия, при которых непрерывный аналог метода Ньютона применим к приближенному решению краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \\ \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, \ i = 1,2. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Далее обосновывается метод Эйлера для приближенного интегрирования уравнения вида (1.2). Этот метод в дальнейшем используется для дискретного представления непрерывного ньютоновского процесса.

В п.1 доказывается

<u>Теорема 1.</u> Пусть уравнение (1.1) имеет единственное решение y^* в открытой области D пространства Y. Предположим, что в области D существуют непрерывные производные Фреше $\phi'(y)$ и $\phi''(y)$. Пусть, далее, в D существует обратный оператор $\phi'(y)^{-1}$, для которого выполняется неравенство

$$\|\phi'(y)^{-1}\| \le B. \tag{1.5}$$

Тогда существует сфера $S: \|y - y^*\| \le \epsilon$, принадлежащая области D, так что для любого $y_0 \in S$ дифференциальное уравнение (1.2) имеет решение $y(t)$ для $0 \le t < \infty$ и $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = y^*$.

При доказательстве этой теоремы используются идеи и методика работы /1/. Доказательство этой и аналогичной ей теорем содержится в работах / 5-7/.

Следующие п.п. 2–4 настоящей главы посвящены вопросам применения непрерывного ньютоновского процесса к приближенному решению краевой задачи (1.3)–(1.4).

Рассматривается B -пространство Y, элементами которого являются дважды непрерывно дифференцируемые на $[a,b]$ функции $y(x)$, удовлетворяющие краевым условиям (1.4), вторые производные которых $y''(x)$ удовлетворяют на $[a,b]$ условию Липшица. Норма элемента $y \in Y$ определяется соотношением

$$\|y\|_Y = \sum_{n=0}^{2} \max_{a \le x \le b} |y^{(n)}(x)| + L_{y''},$$

где $L_{y''}$ – нижняя грань констант L, для которых выполнено

$$|y''(x_1) - y''(x_2)| \le L|x_1 - x_2|; \quad x_1, x_2 \in [a,b].$$

Также рассматривается B -пространство Z, элементами которого являются функции $z(x)$, удовлетворяющие на $[a,b]$ условию Липшица, для которых норма определена как

$$\|z\|_z = \max_{a \le x \le b} |z(x)| + L_z,$$

где L_z – нижняя грань констант Липшица для данной функции $z(x)$. Относительно граничной задачи (1.3)–(1.4) формулируется

<u>Теорема 2.</u> Пусть внутри замкнутой области $D \subset Y$ содержится единственное решение y^* задачи (1.3)–(1.4). Предположим, что $F(x,y,y',y'')$ имеет в замкнутой области $M\{a \le x \le b, y \in D\}$ непрерывные частные производные до второго порядка включительно и, кроме того,

$$|F'_{y''}| \ge A > 0.$$

Пусть, далее, граничная задача

$$F'_{y''}(x,y,y',y'')v'' + F'_{y'}(x,y,y',y'')v' + F'_y(x,y,y',y'')v = 0,$$

$$\alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) = \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0$$

имеет только тривиальное решение для любой функции $y(x) \in D$.

Тогда существует такое $\epsilon > 0$, что для любой функции $y_0(x) \in D$, удовлетворяющей условию

$$\| F(x, y_0, y_0', y_0'') \|_Z < \epsilon,$$

система уравнений относительно функций $y(x,t)$, $v(x,t)$

$$F'_{y''}(x,y,y'_x,y''_{xx})v''_{xx} + F'_{y'}(x,y,y'_x,y''_{xx})v'_x + F'_y(x,y,y'_x,y''_{xx})v = -F(x,y,y'_x,y''_{xx}),$$

$$y'_t = v$$

имеет в полуполосе $s = \{a \le x \le b, 0 \le t < \infty\}$ единственное решение, удовлетворяющее условиям

$$\alpha_1 v(a,t) + \beta_1 v'_x(a,t) = \alpha_2 v(b,t) + \beta_2 v'_x(b,t) = 0,$$

$$y(x,0) = y_0(x),$$

причем

$$\lim_{t \to \infty} \| y(x,t) - y^*(x) \|_Y = 0.$$

Доказательство данной теоремы состоит в проверке выполнения условий теоремы 1 для функционального уравнения

$$\Phi(y) \equiv F(x, y, y', y'') = 0,$$

где $\Phi(y)$ – нелинейный оператор, переводящий элементы $y \in D \subset Y$ в элементы пространства Z. Оно опубликовано в работах /6–7/.

В п. 5 главы I рассмотрен метод Эйлера для приближенного интегрирования дифференциального уравнения специального вида в B -пространстве.

Пусть Y – некоторое B -пространство, $\Psi(y)$ – функция, переводящая Y в себя. Предположим, что в некоторой открытой области $D \subset Y$

$$\|\Psi(y)\| \leq M \tag{1.32}$$

и $\Psi(y)$ для любых $y_1, y_2 \in D$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|\Psi(y_1) - \Psi(y_2)\| \leq L \, \|y_1 - y_2\|. \tag{1.33}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \Psi(y), \quad y(0) = y_0 \in D. \tag{1.34}$$

Условия (1.32), (1.33) обеспечивают существование единственного решения уравнения (1.34), принадлежащего области D на некотором интервале $0 \leq t \leq T$, что следует, например, из теоремы существования /8/ (стр. 422-423).

Разобьем отрезок $0 \leq t \leq T$ на n частей узловыми точками

$$t_0 = 0; \; t_k = t_{k-1} + r_{k-1}, \; k = 1, .., n; \; t_n = T; \; r_k > 0.$$

Пусть $r = \max\limits_k r_k$. Назовем последовательность элементов

$$\bar{y}_0 = y_0, \; \bar{y}_k = \bar{y}_{k-1} + r_{k-1} \, \Psi(\bar{y}_{k-1}), \; k = 1, 2, .., n \tag{1.35}$$

приближенным решением уравнения (1.34), получаемым методом Эйлера. Справедлива

Теорема 3. Пусть для $\Psi(y)$ в открытой области $D \subset Y$ выполнены условия (1.32), (1.33), и решение уравнения (1.34) при $0 \leq t \leq T$ лежит в D. Пусть, далее, выполнено условие

$$r \leq K T n^{-1},$$

где $K \geq 1$ – константа, не зависящая от n.

Тогда при $r \to 0$ решение (1.35), получаемое методом Эйлера, сходится к точному решению $y(t)$ уравнения (1.34) на отрезке $0 \leq t \leq T$.

При доказательстве использована методика работы /9/ (стр. 28-29). Данная теорема содержится в работах /5-7/.

2. Глава II посвящена исследованию условий, при которых непрерывный аналог метода Ньютона применим для приближенного нахождения решений дифференциального уравнения

$$\phi(y) \equiv y'' + f(x, y) = 0, \tag{2.1}$$

удовлетворяющих двухточечным краевым условиям

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{2.2}$$

Как уже отмечалось, необходимость рассмотрения граничных задач вида (2.1)-(2.2) и их численного решения возникает в ряде физических проблем. Специфика этих задач такова, что некоторые из них могут иметь неединственное решение. Для отыскания этих решений может быть эффективно применен непрерывный аналог метода Ньютона, так как приближение к искомому решению часто можно определить из различных физических соображений. Специальный вид уравнения (2.1) позволяет провести построения в более естественных для приложений функциональных пространствах $C[0,1]$ и $C^2[0,1]$.

Основной результат главы, сформулированный в п.1, представляет

Теорема 4. Пусть решение граничной задачи (2.1)-(2.2) существует, и в случае неединственности может быть локализовано.

Это означает:

1) можно построить дважды непрерывно дифференцируемые на отрезке $[0,1]$ функции $u(x)$ и $U(x)$, удовлетворяющие краевым условиям (2.2), не имеющие общих касательных в точках $x=0$ и $x=1$ и удовлетворяющие при $0<x<1$ неравенству $u(x)<U(x)$;

2) в замкнутой области плоскости (x,y)

$$D:\ 0\le x\le 1,\ \ u(x)\le y\le U(x) \tag{2.9}$$

содержится только одно решение $y^*(x)$ краевой задачи (2.1)-(2.3), причем функция $y^*(x)$ не имеет общих касательных с функциями $u(x)$ и $U(x)$ в точках $x=0$ и $x=1$ и $u(x)<y^*(x)<U(x)$ при $0<x<1$.

Предположим, что $f(x,y)$ имеет в области D непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Пусть, далее, выполнены условия:

3) граничная задача

$$v''+f'_y(x,y(x))\,v=0, \tag{2.10}$$

$$v(0)=v(1)=0 \tag{2.11}$$

имеет только тривиальное решение для любой непрерывно дифференцируемой функции $y(x)\in D$;

4) $\|y''_0+f(x,y_0)\|_C\le\epsilon$, где $\epsilon>0$ достаточно мало, $y_0(x)$ - дважды непрерывно дифференцируемая на $[0,1]$ функция из области D.

Тогда система уравнений относительно функций $y(x,t)$ и $v(x,t)$

$$\begin{aligned} &v''_{xx}+f'_y(x,y)\,v=-[y''_{xx}+f(x,y)] \\ &y'_t=v \end{aligned} \tag{2.12}$$

имеет в полуполосе $\tilde{s}:\ 0\le x\le 1,\ 0\le t<\infty$ единственное решение, удовлетворяющее условиям

$$v(0,t)=v(1,t)=0,\ \ y(x,0)=y_0(x), \tag{2.13}$$

причем

$$\lim_{t\to\infty}\{\max_{0\le x\le 1}|y(x,t)-y^*(x)|+\max_{0\le x\le 1}|y'_x(x,t)-y^{*\prime}(x)|+\max_{0\le x\le 1}|y''_{xx}(x,t)-y^{*\prime\prime}(x)|\}=0.$$

Доказательство данной теоремы также состоит в проверке условий теоремы 1 для нелинейного оператора $\phi(y)$, отображающего некоторое подпространство Y пространства $C^2[0,1]$ в $C[0,1]$. Этому доказательству посвящены п.п. 2,3 настоящей главы. В п.2 доказывается ряд вспомогательных утверждений, на основании которых делается вывод об ограниченности нормы оператора $\phi'(y)^{-1}$ в некоторой сфере пространства $C^2[0,1]$, содержащей искомое решение $y^*(x)$. Такую сферу можно построить благодаря условиям 1) - (2) локализации решения, и все построения ведутся в этой сфере. В п.3 доказательство теоремы завершается.

Для численной реализации рассматриваемого метода необходимо иметь его дискретное представление. Дискретизация по параметру t может быть осуществлена на основании метода Эйлера для приближенного интегрирования уравнения

$$y'=\Psi(y);\ \ \Psi(y)=-\phi'(y)^{-1}\phi(y);$$

$$\phi(y)=y''+f(x,y).$$

В п. 3 доказано, что функция $\Psi(y)$ удовлетворяет условиям теоремы 3 главы I. Таким образом, получена полудискретная вычислительная схема, которую можно интерпретировать как аналог метода прямых приближенного решения задачи (2.12)-(2.13). При этом полуполоса $s:\ 0\le x\le 1,\ 0\le t<\infty$ разбивается прямыми, параллельными оси x, $t=t_i$ $(t_{i+1}-t_i=\tau_i)$, а второе уравнение системы (2.12) заменяется разностным аналогом

$$y(x,t_{i+1})=y(x,t_i)+\tau_i v(x,t_i).$$

Ход вычислений можно описать следующим образом. Введем обозначения $y_i(x)=y(x,t_i)$, $v_i(x)=v(x,t_i)$. Предположим, что на слое с номером i функция $y_i(x)$ уже известна. Тогда функция $v_i(x)$ определяется как решение краевой задачи для линейного уравнения

$$v_i''+f_y'(x,y_i(x))v_i=-[y_i''(x)+f(x,y_i(x))],$$

$$v_i(0)=v_i(1)=0.$$

Далее, пользуясь разностным аналогом второго уравнения, можно вычислить значение $y_{i+1}(x)$ на следующем слое. Данный метод сходится при $\tau\to 0$, если решение указанных выше краевых задач осуществляется точно на каждом слое.

Основные результаты данной главы опубликованы в работе /5/. Кроме того, в работах /10-12/ содержится изложение доказательств основных утверждений, полученных с помощью аналога ломаных Эйлера, примененного к задаче (2.12)-(2.13).

3. В главе III изучается нелинейная дискретная граничная задача, получающаяся в результате конечноразностной аппроксимации краевой задачи (1)-(2). Рассмотренная в предыдущей главе схема приближенного решения этой задачи является дискретной только по параметру t. Для полной дискретизации схемы, необходимой при численном решении краевой задачи (1)-(2), решение линейной граничной задачи при фиксированном t также следует находить численно, например, с использованием разностной аппроксимации. При этом дискретная схема будет включать в себя решение при фиксированном

значении параметра t дискретной линейной граничной задачи, аппроксимирующей соответствующую непрерывную, и продвижение к следующему значению t с помощью того же разностного соотношения, которое имелось в полудискретном аналоге. К этой же дискретной схеме можно придти иным путем, именно, при дискретной по параметру t реализации непрерывного ньютоновского процесса решения разностного операторного уравнения, аппроксимирующего исходную краевую задачу.

Для обоснования описанного выше метода в настоящей главе приведено доказательство существования решения дискретной граничной задачи, являющейся разностным аналогом задачи (1)-(2), доказана сходимость приближенного решения к решению исходной задачи, обоснована применимость непрерывного аналога метода Ньютона и его дискретной по параметру t схемы для решения разностного операторного уравнения.

В п. 1 рассматриваются аппроксимация краевой задачи (1)-(2) и основные предпосылки, при которых проводятся дальнейшие исследования.

Пусть N - положительное целое и $h=N^{-1}$. Образуем равномерное разбиение отрезка $[0,1]$ с помощью конечного подмножества $\{x_i\}\subset[0,1]$ $(x_i=ih,\ i=1,2,\dots,N-1)$.

Пусть Y - множество функций $y(x)\in C^2[0,1]$, удовлетворяющих краевым условиям (2). Рассматривается B-пространство Φ_1 сеточных образов y_h функций $y(x)\in Y$, которые определены как $N+1$-мерные векторы

$$y_h=(0,y_1,\dots,y_k,\dots,y_{N-1},0),\quad y_k=y(x_k)$$

с нормой, определенной соотношением

$$\|y_h\|_1=\max_i|y_i|+\max_i\frac{|y_{i+1}-y_i|}{h}+\max_i\frac{|y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}|}{h^2}.$$

Аналогично вводится в рассмотрение B -пространство Φ_2 сеточных образов функций $y(x) \in C[0,1]$ с нормой

$$\|y_h\|_2 = \max_i |y_i| .$$

Краевая задача (1)-(2) аппроксимируется нелинейной разностной задачей

$$\phi_h(y) = \Delta_h^2 y(x) + f(x, y(x)) = 0, \quad x \in \{x_i\}, \ y \in \Phi_1 ,$$

$$\Delta_h^2 y(x) = h^{-2}[y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)]. \tag{3.7}$$

Предполагается, что выполнены предпосылки теоремы 4 главы II .

При этих предположениях доказывается (п.3)

Теорема 5. Если выполнены условия теоремы 4 главы II , то решение дискретной граничной задачи (3.7) существует при достаточно малых h и сходится при $h \to 0$ к решению задачи (1)-(2).

При доказательстве используется теорема 1 работы /1/, устанавливающая существование корня нелинейного функционального уравнения и сходимость к нему непрерывного ньютоновского процесса. С помощью ряда вспомогательных утверждений, сформулированных и доказанных в п.2 настоящей главы, показано, что для оператора $\phi_h(y)$, отображающего некоторую сферу пространства Φ_1 в пространство Φ_2, выполнены при достаточно малых h условия этой теоремы. При этом в качестве начального приближения непрерывного ньютоновского процесса рассматривается сеточный образ искомого решения задачи (1)-(2), которое, по предположению, существует и локализовано.

Доказав теорему существования решения нелинейной разностной задачи (3.7), мы оказываемся в условиях, при которых применима теорема 1 главы I . Поэтому для нахождения

решения уравнения (3.7) может быть применен непрерывный аналог метода Ньютона при подходящем выборе начального приближения из области локализации искомого решения. Кроме того, для оператора $\phi_h(y)$ выполнены условия теоремы 3 главы I о дискретном по параметру t представлении непрерывного аналога метода Ньютона. Таким образом, получена дискретная по обеим переменным x и t вычислительная схема приближенного решения граничной задачи (1)-(2).

Эту схему можно интерпретировать как конечно-разностный аналог задачи (2.12)-(2.13) в прямоугольнике $\sigma : 0 \le x \le 1$, $0 \le t \le T$, где $T > 0$ достаточно велико. При построении этого аналога отрезок $[0,1]$ разбивается на N равных частей узловыми точками $x_i = ih (h = N^{-1})$. Прямоугольник σ делится на n частей прямыми $t = t_k$ $(t_{k+1} - t_k = \tau_k)$, параллельными оси x. Если на слое $t = t_k$ в узлах $x = x_i$ значения функции $y(x,t)$ известны, то для определения значений этой функции на следующем слое $t = t_{k+1}$ в тех же узловых точках необходимо:

1) решить дискретную линейную краевую задачу

$$\Delta_h^2 v(x_i, t_k) + f'_y(x_i, y(x_i, t_k)) v(x_i, t_k) =$$
$$= -[\Delta_h^2 y(x_i, t_k) + f(x_i, y(x_i, t_k))] ;$$
$$i = 1, 2, .., N-1 ; \quad v(0, t_k) = v(1, t_k) = 0 ;$$

2) пользуясь разностным аналогом второго уравнения системы (2.12), вычислить значения $y(x_i, t_{k+1})$ по формуле

$$y(x_i, t_{k+1}) = y(x_i, t_k) + \tau_k v(x_i, t_k) .$$

Функция $y(x_i, 0)$ – задана.

Сходимость этого дискретного метода обеспечивается независимым стремлением шагов по переменным x и t к нулю.

В п. 4 данной главы приводятся некоторые замечания о реализации обсуждаемого метода на ЭВМ. Приводятся возможные алгоритмы выбора динамического дискретного параметра r_k, наличие которого в вычислительной схеме позволяет оптимальным образом менять последнюю в зависимости от конкретной вычислительной ситуации.

Следующие п.п. 5,6 посвящены рассмотрению примеров, иллюстрирующих исследуемый метод и некоторые пути, на которых он может найти применение. В частности, в п. 6 приведены результаты расчетов нескольких решений граничной задачи для одного нелинейного уравнения с сингулярной точкой, имеющей счетное множество решений. Некоторые качественные исследования этого уравнения, встречающегося в нелинейной полевой теории, содержатся в работе [/14/].

Основные результаты данной главы опубликованы в работе [/13/].

В заключении к диссертации отмечается:

В данной работе обоснован новый метод численного решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Этот метод основан на применении непрерывного аналога метода Ньютона к приближенному решению нелинейных задач. Основной предпосылкой при исследовании непрерывного ньютоновского процесса является предположение существования решения рассматриваемой задачи. Это предположение позволяет получить сходимость непрерывного аналога метода Ньютона при естественных требованиях гладкости нелинейной части уравнения в некоторой окрестности искомого решения. Таким образом, разделение проблемы исследования существования решений рассматриваемой задачи и задачи их приближенного нахождения позволяет при решении последней снять конкретные численные ограничения на нелинейные части уравнений, чем существенно расширяется круг задач, к которым применим построенный метод численного решения.

Наличие дополнительной переменной в исследованном методе придает дискретной схеме, полученной на его основе, большую гибкость и способность оптимальным образом меняться в зависимости от конкретной вычислительной ситуации. Это позволяет применять разработанный метод к задачам, в которых имеющиеся численные методы не приводят к цели. Сходимость дискретного процесса обеспечивается независимым стремлением шагов по переменным x и t к нулю. Другие вычислительные аспекты, в частности, проблема устойчивости, требуют дополнительных рассмотрений. Приложения рассмотренного метода к некоторым конкретным задачам позволяют отнестись к решению этой задачи оптимистически.

Работы, положенные в основу диссертации, выполнены автором совместно с Е.П. Жидковым и содержатся в публикациях [/5-7,13/].

Основные результаты докладывались на Совещании по математическим методам решения задач ядерной физики (Дубна, 1966 г.) [/11/], на Совещании по проблемам автоматизации обработки информации с использованием вычислительных машин (Дубна, 1967 г.), на Всесоюзном совещании по вычислительным методам в теории переноса (СО АН СССР, 1967 г.), на Втором съезде болгарских математиков (1967 г.)[/15/], на Юбилейной сессии математиков Казахстана (Алма-Ата, 1967 г.).

Литература

1. М.К. Гаврурин. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов. Изв. ВУЗов. Математика, 1958, 5(6), 18-31.
2. M.Lees. Discrete methods for Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems. Numerical Solution of Partial Differential Equations. Proc. Symposium Held Univ. Maryland, College Park, Maryland, May 3-8, 1965, New York, Akad . Press, 1966, 59-72.

3. A.Friedman. Covergence of Solutions of Parabolic Equations to a Steady State. J. Math. and Mech., 1959, 8, N 1, 57-76.

4. Н.А. Шидловская. Применение метода дифференцирования по параметру к решению нелинейных дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1956, 107, №2, 213-216.

5. Е.П. Жидков, И.В. Пузынин. Об одном методе введения параметра при решении краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, №5, 1086-1095.

6. Е.П. Жидков, И.В. Пузынин. О решении одной нелинейной граничной задачи методом стабилизации по параметру. Препринт ОИЯИ 5-3368, Дубна, 1967.

7. Е.П. Жидков, И.В. Пузынин. Применение непрерывного аналога метода Ньютона для приближенного решения одной нелинейной граничной задачи. Докл. АН СССР, 1968, 180, №1,18-21.

8. Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. Элементы функционального анализа. Изд-во "Мир", Москва, 1964.

9. Л. Коллатц. Численные методы решения дифференциальных уравнений. ИЛ, Москва, 1953.

10. Е.П. Жидков, И.В. Пузынин. Об одном методе введения параметра при решении краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Препринт ОИЯИ 5-2959, Дубна, 1966.

11. Е.П. Жидков, И.В. Пузынин. Обобщенный метод стабилизации по непрерывному параметру решения краевых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. В сб. "Материалы совещания по математическим методам решения задач ядерной физики. Дубна, 21-25 июня 1966 г." 5-3263, Дубна, 1967, 16-23.

12. Е.П. Жидков, И.В. Пузынин. Решение краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка методом стабилизации. Докл. АН СССР, 1967, 174, №2; 271-273.

13. Е.П. Жидков, И.В. Пузынин. Решение одной нелинейной дискретной краевой задачи с помощью непрерывного аналога метода Ньютона. Препринт ОИЯИ 5-3963, Дубна, 1968. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, 9,№2, 442-447.

14. Е.П. Жидков, В.П. Шириков, И.В. Пузынин. Задача Коши и краевая задача для некоторого нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. В сб. "Материалы совещания по математическим методам решения задач ядерной физики. Дубна, 17-20 ноября 1964". 2005, Дубна 1965, 13-18.

15. Е.П. Жидков, И.В. Пузынин. Методы решения нелинейных уравнений путем введения параметра. Второй съезд болгарских математиков. 28.8-7.9.1967. Резюме. Изд-во БАН, София 1967, стр. 35.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 октября 1969 года.