

Е 179

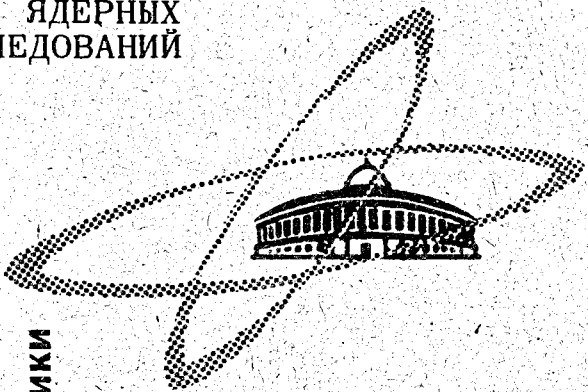
С-384

11/IX-69

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

11 - 4541



ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

С.И.Сердюкова

ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $u_t + u_x = 0$
С РАЗРЫВНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

1969

11 - 4541

С.И.Сердюкова

ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $u_t + u_x = 0$
С РАЗРЫВНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

7945/1 пр.

При численных расчетах разрывных решений дифференциальных уравнений наблюдается размыв разрывов и, как правило, возникают осцилляции, которые могут сильно исказить решение. Изучение явлений такого рода представляет большой практический интерес.

В предлагаемой работе рассматривается следующая задача с разрывными начальными данными:

$$u_t + u_x = 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Точным решением этой задачи является сдвинутая ступенька

$$u(x, t) = u(x - t, 0).$$

Разрыв перемещается по характеристике $x - t = 0$.

Задача (1) аппроксимируется следующей разностной задачей:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{r} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0,$$

$$u_j^0 = \begin{cases} 0 & \text{при } j < 0, \\ 1 & \text{при } j \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решение задачи (2) будем называть разностной ступенькой в отличие от решения исходной непрерывной задачи, которое везде будет называться просто ступенькой. Разностная ступенька будет обозначаться через G_j^n в отличие от решений с другими начальными данными. Наконец введем специальное обозначение для отношения шагов сетки: $a = \tau / h$. В этой работе предполагается, что a может принимать любое значение порядка 1. В работе получена асимптотика разностной ступеньки в окрестности характеристики ($j = a n$) и в окрестности "ложной характеристики" ($j = -a n$). Асимптотика получена методом перевала. Эта асимптотика и некоторые дополнительные оценки позволяют оценить порядок уклонения разностной ступеньки от ступеньки в метрике L_1 . Справедлива оценка

$$c_1 \sqrt{n} \leq g(n) = \sum_{j < a n} |G_j^n| + \sum_{j \geq a n} |1 - G_j^n| < c_2 \sqrt{n}.$$

(Постоянные c_1 , c_2 и все другие постоянные, встречающиеся в работе, не зависят от n . Заметим, кстати, что для простоты обозначений одни и те же постоянные будут использоваться несколько раз в разных частях работы для обозначения различных величин).

Основной вклад в $g(n)$ дает область ширины \sqrt{n} , прилегающая к характеристике. В этой области лежат G_j^n , уклоняющиеся от ступеньки на величину порядка 1. Сумма модулей уклонений разностной ступеньки от ступеньки по остальным j есть величина порядка 1. Основной вклад в эту сумму дает область ширины \sqrt{n} , прилегающая к ложной характеристике. Сумма модулей уклонений по остальным j есть $O(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Около ложной характеристики разностная ступенька имеет осциллирующий хвост: G_j^n меняет знак буквально при переходе от точки к точке.

Таковы основные результаты, полученные в этой работе. Что касается работ других авторов, то здесь прежде всего следует упомянуть работу Федоренко, который первым заметил явление осцилляций, возникающих при численных расчетах, и описал их в своей работе /1/. В работе /2/ шведского математика Томе построены интегральные асимптотики разностной ступеньки для специального случая устойчивых в C разностных схем. В работе нет оценок остаточных членов. Кроме того,

интегральные асимптотики сами по себе являются сложными. Для того чтобы разобраться в характере осцилляций, наблюдаемых при численных расчетах, надо построить более простые асимптотики. В настоящей работе получены простые асимптотики лишь для частного случая разностной схемы - мостика. Однако есть надежда, что развитая в этой области техника оценок будет полезна при рассмотрении общего случая устойчивых в L_2 разностных схем. Первая попытка исследовать разностную ступеньку для схемы - мостика была предпринята автором в работе /4/. В этой работе был выписан главный член асимптотики G_j^n в окрестности характеристики без необходимых оценок остаточных членов. Настоящая работа тесно переплетается с работой автора /3/, в которой доказывается безусловная равномерная устойчивость схемы-мостика.

Порядок изложения таков. Сначала доказывается оценка сверху для $g(p)$. Необходимые оценки для G_j^n получаются простым интегрированием по частям. Далее строится асимптотика в окрестности характеристик и с помощью этой асимптотики доказывается оценка снизу для $g(p)$. Наконец, строится асимптотика G_j^n в окрестности ложной характеристики, устанавливается наличие осциллирующего хвоста и оценивается "зона размазывания" этого хвоста.

1. Оценка сверху для $g(p)$

Доказательство оценки сверху сводится к трем леммам. В первой лемме доказывается ограниченность разностной ступеньки, во второй лемме получены необходимые оценки разностной функции Грина. Наконец, в третьей лемме доказывается сама оценка сверху.

Лемма 1. Справедлива оценка: $|G_j^n| \leq c$.

Доказательство: Разностная функция Грина Γ_j^n и разностная ступенька связаны соотношением

$$G_j^n = \sum_{l=-\infty}^j \Gamma_l^n.$$

В работе /3/ доказана оценка

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\Gamma_l^n| < c.$$

Отсюда следует, что

$$|G_j^n| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_j^n| < c.$$

Численный эксперимент показывает, что $c \leq 2$.

Лемма 2. Справедлива оценка:

$$|\Gamma_j^n| \leq c \left(\frac{n^{3/2}}{(|j| - \alpha n)^4} + \frac{n^{1/2}}{(|j| - \alpha n)^3} \right). \quad (4)$$

Доказательство: Эта оценка получается простым двойным интегрированием по частям

$$\begin{aligned} \Gamma_j^n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ij\phi}}{(1 + i\alpha \sin \phi)^n} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\phi) d e^{ij\phi - n \ln(1 + i\alpha \sin \phi)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\psi^{12} + \psi \psi^{11}) \frac{e^{ij\phi}}{(1 + i\alpha \sin \phi)^n} d\phi, \quad \psi(\phi) = \frac{1}{(ij + i\alpha \frac{\cos \phi}{1 + i\alpha \sin \phi})}. \end{aligned}$$

Легко получить следующие оценки:

$$|\psi| \leq \frac{c}{||j| - \alpha n|}, \quad |\psi'| \leq \frac{c \cdot n}{(|j| - \alpha n)^2},$$

$$|\psi''| < c \left(\frac{n}{(|j| - \alpha n)^2} + \frac{n^2}{||j| - \alpha n|^3} \right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{|1 + i\alpha \sin \phi|^n} \leq \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

Эти оценки обеспечивают искомую оценку (4).

Лемма 3. Справедлива оценка: $g(n) \leq c_2 \sqrt{n}$.

Доказательство: Из (4) простым суммированием по j получаем такие оценки:

$$|G_j^n| \leq c \left(\frac{n^{3/2}}{||j| - \alpha n|^3} + \frac{n^{1/2}}{(|j| - \alpha n)^2} \right) \quad j < \alpha n;$$

$$|1 - G_j^n| = \left| \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma_l^n \right| \leq c \left(\frac{n^{3/2}}{(j - an)^3} + \frac{n^{1/2}}{(j - an)^2} \right) \quad j \geq an.$$

Из этих оценок и оценки (4) получаем искомую оценку сверху:

$$g(n) \leq c_1 \sqrt{n} + \sum_{\substack{j < an \\ |j - an| > \sqrt{n}}} |G_j^n| + \sum_{\substack{j < an \\ |j - an| > \sqrt{n}}} |1 - G_j^n| \leq c_2 \sqrt{n}.$$

2. Асимптотика разностной ступеньки в окрестности характеристики. Оценка снизу для $g(n)$

Разностная функция Грина схемы - мостика Γ_j^n может быть представлена в виде интеграла

$$\Gamma_j^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_1} \frac{z^{j-1}}{\left(1 + \frac{a}{2}(z - z^{-1})\right)^n} dz. \quad (5)$$

$D_1 = \{z: |z|=1\}$

Подинтегральная функция при $j > 1$ имеет два полюса

$$z_{1,2} = -\frac{1}{a} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}.$$

Пусть D - произвольный замкнутый контур, расположенный вне единичного круга, и пусть полюс z_2 лежит вне D . Тогда разностная ступенька может быть представлена в виде такого интеграла

$$G_j^n = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{z^j}{(z-1)\left(1 + \frac{a}{2}(z - z^{-1})\right)^n} dz. \quad (6)$$

Наша цель - получить асимптотику этого интеграла для j , близких к an . Асимптотика будет получена в нижеследующей теореме 1. Предварительно рассмотрим вспомогательный интеграл

$$J(A, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda n t^2}}{(t + i\beta)} dt. \quad (7)$$

Здесь A - положительная величина порядка 1, параметр β изменяется в окрестности 0 : $-1 \leq \beta \leq 1$.

Лемма 4. Интеграл $J(A, \beta)$ ведет себя по-разному в зависимости от величины $\beta^2 n$:

1) при малых $\beta^2 n$ интеграл $J(A, \beta)$ может быть представлен в виде быстро сходящегося ряда

$$J(A, \beta) = -\frac{1}{2} (\operatorname{sgn} \beta) e^{A n \beta^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^2 A n)^k + \frac{1}{2} / \Gamma(k + \frac{3}{2}); \quad (8)$$

2) при $\beta^2 n$ порядка единицы

$$J(A, \beta) = -\frac{(\operatorname{sgn} \beta)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-A n \beta^2 t^2}}{1+t^2} dt; \quad (9)$$

3) при больших $\beta^2 n$ интеграл $J(A, \beta)$ допускает такое представление

$$J(A, \beta) = -\frac{(\operatorname{sgn} \beta)}{\sqrt{2\pi A n \beta^2}} + R, \quad |R| \leq \frac{1}{\pi A n \beta^2}. \quad (10)$$

Доказательство первой части леммы содержится в работе /4/.

Представление (9) получается из (7) простой заменой $t = |\beta| u$.

Докажем (10): простая цепочка преобразований показывает, что

$$J(A, \beta) = -\frac{(\operatorname{sgn} \beta)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-A n \beta^2 t^2}}{t^2+1} dt = -\frac{(\operatorname{sgn} \beta)}{\pi} \int_0^{1/2} \frac{e^{-A n \beta^2 t^2}}{t^2+1} dt + R_1,$$

где

$$|R_1| \leq \exp(-A n \beta^2 / 4) / \pi A n \beta^2.$$

Далее несложная выкладка показывает, что

$$-\frac{(\operatorname{sgn} \beta)}{\pi} \int_0^{1/2} \frac{e^{-A n \beta^2 t^2}}{t^2+1} dt = -\frac{(\operatorname{sgn} \beta)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-A n \beta^2 t^2} dt + R_2,$$

где

$$|R_2| \leq \frac{1}{\pi A n \beta^2} \left(\frac{1}{2} + \exp\left(-\frac{A n \beta^2}{4}\right) \right).$$

Лемма 3 доказана.

Теперь переходим к изложению основной теоремы. Чтобы не перегружать формулировку теоремы, введем некоторые обозначения:

$$j = a n \sqrt{\frac{1 + \epsilon^2}{1 + a^2}}, \quad A = \frac{a \epsilon (1 + a \epsilon)}{2(1 + a^2)},$$

$$\phi_1 = i \beta = \arcsin\left(i \frac{\epsilon - a}{1 + a \epsilon}\right), \quad e^{F(\phi_1)} = \frac{e^{i \phi_1}}{(1 + i a \sin \phi_2)^n}.$$

Теорема 1. Найдутся постоянные c , δ , ω такие, что при достаточно больших n и j , удовлетворяющих условию:

$$\frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} < a(1 - \omega) < \epsilon = \epsilon(j) < a(1 + \omega),$$

уклонение разностной ступеньки от ступеньки может быть представлено в таком виде:

$$G_j^n - u(n, j, h) = e^{F(\phi_1)} \{ J(A, \beta) + R \},$$

где $J(A, \beta)$ задается формулами (8)-(10) и

$$|R| \leq \frac{c}{\sqrt{n}} + \exp\left(-\frac{A}{10} n^{2\delta}\right).$$

Доказательство. В этой части статьи существенно используются результаты работы /3/. В работе /3/ была получена асимптотика раз-

ностной функции Грина, интеграла (5). При этом было доказано, что для

каждого $j > \frac{a n}{\sqrt{1 + a^2}}$ контур интегрирования в (5) может быть деформирован в замкнутую линию наискорейшего спуска, проходящую через точку перевала на вещественной оси. С ростом j эта точка перевала монотонно стремится к полюсу z_j . При $j = a n$ она проходит $z = 1$.

Чтобы получить асимптотику разностной ступеньки G_j^n , при каждом $j \neq a n$ контур интегрирования D в (6) деформируем так же, как в работе /3/. При $j > a n$ новый контур интегрирования L в от-

личие от исходного контура D не содержит внутри себя полюса $z=1$. Соответственно новый интеграл отличается от исходного интеграла на величину вычета при $z=1$. Этот вычет равен 1. Так что новый интеграл для всех $j \neq \alpha n$ задает уклонение разностной ступеньки от ступеньки. Далее удобно сделать замену переменных

$$z = e^{i\phi}, \quad j = \alpha n \sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{1+\alpha^2}}.$$

На ϕ -плоскости рассматриваемая точка перевала удовлетворяет соотношению

$$\sin \phi = i \frac{\epsilon - \alpha}{1 + \epsilon \alpha}.$$

Для того чтобы получить эффективные оценки остаточных членов в малой окрестности точки перевала

$$|\phi - \phi_1| < B n^{-\frac{1}{2} + \delta},$$

контур интегрирования деформируется еще раз в отрезок прямой:

$$-B n^{-\frac{1}{2} + \delta} < \phi - \phi_1 < B n^{-\frac{1}{2} + \delta}.$$

Далее контур замыкается дугами окружности

$$|\phi - \phi_1| = B n^{-\frac{1}{2} + \delta}.$$

При j , удовлетворяющих условию:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} < \alpha(1-\omega) < \epsilon(j) < \alpha(1+\omega)$$

(ω будет выбрано ниже), асимптотика G_j^n определяется интегралом по прямолинейному участку контура L' . На оставшейся части L'' подинтегральная функция экспоненциально мала. Длина L'' конечна. Так что сам интеграл по оставшейся части контура экспоненциально мал. Докажем это утверждение аккуратно. Постоянная B выбирается по-разному в зависимости от того, насколько близко рассматриваемая точка перевала находится от полюса $z=1$ ($\phi=0$). Для $|\phi_1| \leq n^{-1/2+\delta}$

положим $B = 2$, для $|\phi_1| > \pi^{-\frac{1}{2} + \delta}$ положим $B = \frac{1}{2}$. В малой окрестности ϕ_1 подынтегральная функция (6) допускает следующее разложение:

$$f^n(e^{i\phi}) / (e^{i\phi} - 1) = e^{i\phi} / (1 + i a \sin \phi)^n (e^{i\phi} - 1) = \\ = \frac{e^{F(\phi_1)}}{-1 + e^{i\phi}} \exp n \left\{ -\frac{a\epsilon(1+a\epsilon)}{1+a^2} \frac{(\phi - \phi_1)^2}{2} + R(\phi) (\phi - \phi_1)^3 \right\},$$

где

$$R(\phi) = b \sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{1+a^2}} \frac{1+2a\epsilon}{6} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-b)^k (\sin \phi - \sin \phi_1)^k}{k (\phi - \phi_1)^3} + \\ + b \sum_{k=4}^{\infty} (\sin \phi)_{\phi_1}^{(k)} \frac{(\phi - \phi_1)^{k-3}}{k} + \frac{b^2}{2} \sum_{k=4}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} (\cos 2\phi)_{\phi_1}^{(k)} - 2 \sin \phi_1 (\sin \phi)_{\phi_1}^{(k)} \right) \frac{(\phi - \phi_1)^{k-3}}{k!} + \\ + \frac{b^3}{3} \sum_{k=4}^{\infty} \left(-\frac{1}{4} (\sin 3\phi)_{\phi_1}^{(k)} + \frac{3}{2} \sin \phi_1 (\cos 2\phi)_{\phi_1}^{(k)} + (3 \sin^2 \phi_1 + \frac{3}{4}) (\sin \phi)_{\phi_1}^{(k)} \right) \frac{(\phi - \phi_1)^{k-3}}{k!}, \\ b = \frac{i a (1 + a \epsilon)}{1 + a^2}.$$

Из этого разложения видно, что, если n достаточно велико, то при

$$|\phi - \phi_1| \leq B \pi^{-\frac{1}{2} + \delta}$$

$$f^n(e^{i\phi}) = \exp(F(\phi_1)) \left(\exp \left(-n \frac{a\epsilon(1+a\epsilon)}{1+a^2} \frac{(\phi - \phi_1)^2}{2} \right) (1 + R_1(\phi)) \right),$$

где

$$|R_1(\phi)| \leq 6 a (1 + a^2) n |\phi - \phi_1|^3 = c n |\phi - \phi_1|^3. \quad (11)$$

Далее ω подберем так, чтобы в указанных пределах изменения ϵ при $|\phi - \phi_1| \leq 2h \pi^{-\frac{1}{2} + \delta}$

$$\frac{1}{e^{i\phi} - 1} = \frac{1}{i(\phi_1 + \phi - \phi_1)} (1 + R_2(\phi)), \quad |R_2(\phi)| < 1. \quad (12)$$

На рассматриваемой части контура L''

$$\max |f^n(e^{i\phi})|$$

достигается в точках, где n подклеивается к прямолинейному отрезку.

Отсюда и из (11) следует, что при достаточно больших n

$$\max_{L''} |f^n(e^{i\phi})| \leq \exp\left(-\frac{A}{8} n^{2\delta}\right).$$

В работе [3] доказано, что длина L конечна. Остается показать, что

L'' не слишком близко подходит к полюсу $\phi = 0$ ($z = 1$). При $|\phi_1| \leq n^{-\frac{1}{2} + \delta}$ L'' лежит вне круга

$$|\phi - \phi_1| < 2n^{-\frac{1}{2} + \delta},$$

так что L'' находится по крайней мере на расстоянии $n^{-\frac{1}{2} + \delta}$ от полюса $\phi = 0$. Отсюда и из (12) получаем, что при $|\phi_1| \leq n^{-\frac{1}{2} + \delta}$

$$\max_{L''} \left| \frac{f^n(e^{i\phi})}{e^{i\phi} - 1} \right| \leq 2n^{-\frac{1}{2} + \delta} \exp\left(-\frac{A}{8} n^{2\delta}\right).$$

При $|\phi_1| > n^{-\frac{1}{2} + \delta}$ поступаем следующим образом. Рассмотрим n^{-2} окрестность полюса $\phi = 0$. В этой окрестности при достаточно больших n

$$|f^n(e^{i\phi})| = \left| \exp\left(i n \alpha \sqrt{\frac{1 + \epsilon^2}{1 + \alpha^2}} \phi - n \ln(1 + i \alpha \sin \phi)\right) \right| > \frac{1}{2}.$$

А на L'' эта величина экспоненциально мала при больших n . Значит, L'' не заходит в n^{-2} -окрестность полюса и, следовательно, на L''

$$\left| \frac{f^n(e^{i\phi})}{e^{i\phi} - 1} \right| \leq 2n^2 \exp\left(-\frac{A}{8} n^{2\delta}\right). \quad (13)$$

Тем самым экспоненциальная малость интеграла по L'' доказана. Уклонение разностной ступеньки от ступеньки может быть представлено в таком виде

$$G_j^n - u(n\tau, jh) = \frac{e^{F(\phi_1)}}{2\pi i} \int_{-B_n^{-\frac{1}{2} + \delta}}^{B_n^{-\frac{1}{2} + \delta}} \frac{e^{-A_n t^2}}{t + \phi_1} (1 + R_3(t)) dt + O\left(\exp - \frac{A}{8} n^{2\delta}\right).$$

Из (11) и (12) следует, что

$$|R_3(t)| < cn|t|^3 + |t + \phi_1| \cdot (1 + cn|t|^3).$$

Отсюда легко получаем, что

$$G_j^n - U(nr, jh) = \frac{e^{F(\phi_1)}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\Lambda n t^2}}{t + \phi_j} dt + R,$$

где

$$|R| < \exp\left(-\frac{A}{10} n^{2\delta}\right) + \frac{|e^{F(\phi_1)}|}{2\pi} \left(\int_{|t| > B_n^{-1/2+\delta}} (e^{-\Lambda n t^2}/t) dt + \int_{|t| \leq B_n^{-1/2+\delta}} e^{-\Lambda n t^2} (1 + cn t^2 + cn |t|^3) dt \right) < \frac{c |e^{F(\phi_1)}|}{\sqrt{n}}.$$

Теорема 1 доказана.

Теперь получим оценку снизу для $g(n)$.

Лемма 5. Справедлива оценка: $g(n) \geq c_1 \sqrt{n}$.

Доказательство. Оценка снизу будет получена с помощью только что доказанных асимптотических формул. Асимптотика уклонения содержит множитель

$$\exp F(\phi_1) = \exp \left\{ \ln a \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1+a^2}} \arcsin i \frac{\epsilon-a}{1+\epsilon a} - n \ln \left(1 - a \frac{\epsilon-a}{1+\epsilon a} \right) \right\}.$$

При достаточно больших n в рассматриваемой области изменения

ϵ :

$$\exp F(\phi_1) = \exp \left\{ -\frac{n a^2}{2} \left(\frac{\epsilon-a}{1+a^2} \right)^2 + R \right\}, \quad |R| \leq cn |\epsilon-a|^3.$$

ω может быть подобрано так, что в рассматриваемой области изменения ϵ

$$\exp(-n(\epsilon-a)^2) < |\exp F(\phi_1)| \leq \exp\left(-\frac{n a^2}{4} \left(\frac{\epsilon-a}{1+a^2} \right)^2\right). \quad (13)$$

Далее напомним, что в асимптотике для малых $\beta^2 n$ (8) есть такое слагаемое

$$-\frac{1}{2} (\operatorname{sgn} \beta) \exp(A n \beta^2), \quad A = \frac{a \epsilon (1 + a \epsilon)}{2(1 + a^2)}.$$

Из (13) следует, что

$$-\frac{1}{2}(\operatorname{sgn} \beta) \exp(A_n \beta^2 + F(\phi_1)) = -\frac{1}{2}(\operatorname{sgn} \beta) \exp(n(\epsilon - a)^2 R(\epsilon, a)),$$

где

$$|R(\epsilon, a)| < c. \quad (14)$$

Наконец, можно получить оценку снизу для $g(n)$. Рассмотрим $|\epsilon - a| < \gamma / \sqrt{n}$. Пусть γ подобрано так, что в рассматриваемой области изменения ϵ

$$A_n \beta^2 < \frac{1}{2}.$$

Используя (8) и (14), простым суммированием получаем такую оценку

$$g(n) > \sum_{0 < a - \epsilon < \frac{\gamma}{\sqrt{n}}} |G_j^n| > \frac{1}{2} a^2 \gamma \sqrt{n} (1+R) + \int_0^{\gamma/\sqrt{n}} (A_n)^{3/2} t dt, \quad |R| < c n^{-1/2}.$$

Второе слагаемое есть величина порядка $\gamma^2 \sqrt{n}$; так что γ можно подобрать так, чтобы выполнялось соотношение

$$g(n) > \frac{a^2 \gamma}{2} \sqrt{n}.$$

3. Осцилляции разностной ступеньки в окрестности ложной характеристики

Для того чтобы найти асимптотику в окрестности ложной характеристики ($j = -a_n$) в (6) удобно сделать преобразование инверсии

$$z = -\frac{1}{\omega}.$$

Тогда интеграл, представляющий G_{-j}^n ($j > 0$), примет такой вид

$$G_{-j}^n = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{z^{-j} dz}{(z-1)(1 + \frac{a}{2}(z-z^{-1}))^n} = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i} \int_{D^{-1}} \frac{w^{j-1} dw}{(w+1)(1 + \frac{a}{2}(w-w^{-1}))^n}$$

D^{-1} - контур внутри единичного круга, охватывающий полюс $w = z_1$.
 (При преобразовании $z = -1/w$ полюса функции

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{2}(z - z^{-1})}$$

переходят друг в друга. Так как до инверсии полюс z_2 лежал вне D , то после инверсии z_1 лежит внутри D^{-1}).

Для простоты изложения перейдем к старым обозначениям. Рассмотрим интеграл

$$\bar{G}_j^n = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{z^{-1} dz}{(z+1) \left(1 + \frac{\alpha}{2}(z-z^{-1})\right)^n} = (-1)^{j+1} G_j^n.$$

(Здесь контур D лежит внутри единичного круга и содержит внутри себя полюс z_1). Этот интеграл отличается от интеграла (5), представляющего разностную функцию Грина, лишним множителем $(z+1)^{-1}$. Соответственно подинтегральная функция имеет лишний полюс при $z = -1$.

В рассматриваемой области изменения j (j , близких к αn) точка перевала, определяющая асимптотику Γ_j^n , находится в окрестности $+1$. Та же самая точка перевала определяет асимптотику \bar{G}_j^n , и асимптотика \bar{G}_j^n отличается от асимптотики Γ_j^n медленно меняющимся множителем порядка 1. Чтобы фактически получить асимптотику \bar{G}_j^n , поступаем точно так же, как при отыскании асимптотики разностной ступеньки в окрестности характеристики. Контур D деформируем в линию наискорейшего спуска функции $z^{j-1} / \left(1 + \frac{\alpha}{2}(z - z^{-1})\right)^n$, проходящую через вещественную точку перевала, определяющую асимптотику Γ_j^n . На ϕ -плоскости ($z = e^{i\phi}$) эта точка удовлетворяет соотношению

$$\sin \phi_1 = i \frac{\epsilon - \alpha}{1 + \epsilon \alpha}.$$

Для того чтобы получить эффективные оценки остаточных членов в малой окрестности точки перевала

$$|\phi - \phi_1| < n^{-1/2 + \delta};$$

контур деформируется еще раз в отрезок прямой. Далее контур замыкается дугами окружности

$$|\phi - \phi_1| = n^{-1/2 + \delta}.$$

Асимптотика \bar{G}_j^n определяется интегралом по прямолинейному отрезку. Интеграл по оставшейся части экспоненциально мал. Повторяя все детали рассуждения, которое проводилось при нахождении асимптотики разностной ступеньки в окрестности характеристики, получаем, что при больших n

$$\bar{G}_j^n = \frac{e^{F(\phi_1)}}{2\pi} \int_{-n^{-1/2+\delta}}^{n^{-1/2+\delta}} \frac{e^{-\Lambda n t^2}}{1 + e^{i(t+\phi_1)}} (1 + R_1(t)) dt + R_2,$$

где

$$|R_2| \leq c_1 \exp(-c_2 n^{2\delta}), \quad |R_1| \leq c n |t|^3.$$

Отсюда без труда получаем асимптотику разностной ступеньки в окрестности ложной характеристики: при

$$|\epsilon - a| < \omega a, \quad j = a n \sqrt{\frac{1 + \epsilon^2}{1 + a^2}},$$

$$G_{-j}^n = (-1)^{j+1} \bar{G}_j^n = (-1)^{j+1} \frac{e^{F(\phi_1)}}{1 + e^{i\phi_1}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \Lambda n}} + R \right), \quad (15)$$

где $|R| \leq c n^{-1+3\delta}$. Легко видеть, что G_{-j}^n в рассматриваемой области меняет знак при переходе от точки к точке. Посмотрим, каков вклад этой области в $g(n)$.

Лемма 6. Справедлива оценка

$$\sum_{\{j: |\epsilon - a| \leq n^{-1/2}\}} |G_{-j}^n| > \frac{a}{2(1 + a^2)}.$$

Доказательство. Из асимптотической оценки (15) и оценки снизу для $|\exp F(\phi_1)|$ (13) следует, что в рассматриваемой области изменения j

$$|G_{-j}^n| \geq e^{-n(\epsilon - a)^2} / \sqrt{\pi} \frac{a \epsilon (1 + a \epsilon)}{1 + a^2} n.$$

Отсюда простым суммированием получаем искомую оценку:

$$\begin{aligned} \sum_{\{j: |j-a| < n^{-1/2}\}} |G_j^n| &> 2 \int_0^{n^{-1/2}} e^{-nt^2} \frac{a(t+a)}{\sqrt{\pi An} \sqrt{(1+a^2)(1+(t+a)^2)}} dt > \\ &> \frac{a\sqrt{n}}{(1+a^2)\sqrt{\pi}} \int_0^{n^{-1/2}} e^{-nt^2} dt > \frac{a}{2(1+a^2)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Как и в случае положительных j , для отрицательных j сумма модулей уклонений разностной ступеньки от ступеньки по j , удовлетворяющим условию

$$c_1 n^{1/2 + \delta} < |j + an| < c_2 n,$$

экспоненциально мала. Из оценок, полученных простым интегрированием по частям (лемма 3), следует, что

$$\sum_{\{j: ||j| - an| > c_2 n\}} |G_{-u(n\tau, jh)}| < \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, доказано, что если выкинуть области ширины \sqrt{n} около характеристики и ложной характеристики, то сумма модулей уклонений по оставшимся j убывает не медленнее, чем $1/\sqrt{n}$. Общая сумма уклонений есть величина порядка \sqrt{n} . Такой порядок роста дают значения j из области ширины \sqrt{n} , прилегающей к характеристике. К ложной характеристике прилегает область осциллирующих значений G_j^n . Сумма модулей уклонений по j из области ширины \sqrt{n} , прилегающей к ложной характеристике, есть величина порядка 1.

Л и т е р а т у р а

1. Р.П. Федоренко. Применение разностных схем высокого порядка точности для численного решения гиперболических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1982, №6, 1122-1128.

2. V.Thomee. On maximum-norm stable difference operators, Numerical solution of partial differential equations. Ed. by J.H.Bramble. Academic press 1966, New York, p. 125-151.
3. С.И. Сердюкова. Препринт ОИЯИ Р-11-3986, Дубна, 1968.
4. С.И. Сердюкова. Препринт ОИЯИ Р11-4250, Дубна 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел

17 июня 1969 года.