ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

11 - 3984

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Н.Ю.Ширикова

ФОРМУЛА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ, ПОЛУЧЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ

1968

11 - 3984

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛВТА

Н.Ю.Ширикова

ФОРМУЛА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ, ПОЛУЧЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

Чтобы найти полином наилучшего приближения $P_{n-1}(x)$ для непрерывной функции $f(x)$, заданной на конечном отрезке, был предложен в /I/ простой итерационный метод.

Предполагалось, что функция задана на отрезке $[-1, 1]$ и

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}{}' a_k T_k(x).$$

Полином $P_{n-1}(x)$ можно также представить в виде

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i T_i(x).$$

Для отыскания коэффициентов p_i полинома наилучшего приближения $P_{n-1}(x)$ и величины наименьшего отклонения E_{n-1} в /I/ были получены следующие формулы:

$$E_{n-1} = \frac{a_n}{1+B_{2n}} \sqrt{1+\sum_{l=1}^{\infty}(A_l^2+B_l^2)} \;,$$

$$p_0 = a_0 - \frac{a_n}{1+B_{2n}} B_n \;,$$

$$p_i = a_i - \frac{a_n}{1+B_{2n}}(B_{n-i}+B_{n+i}) \;, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где величины A_i и B_i удовлетворяют системе:

$$A_i = -B_{2n+i} + \frac{a_{n+i}}{a_n}(1+B_{2n}) \;,$$

$$B_i = -A_i - \sum_{l=1}^{\infty}(A_l A_{l+i} + B_l B_{l+i}) - \sum_{l=1}^{i-1} A_l B_{i-l} \;, \tag{I}$$

$$i = 1, 2, \ldots$$

Для решения системы (I) в /I/ был предложен простой итерационный метод.

Если же предположить, что

$$\frac{a_{n+i}}{a_n} = x_i = O(x^i) \;, \quad x = o(1), \tag{2}$$

то нетрудно проверить, что при решении системы (I) итерационным методом будем получать $A_i = O(x^i)$, $B_i = O(x^i)$, $i = 1, 2, \ldots$, и для определения решения (I) с точностью до $O(x^{k+1})$ достаточно взять i = I,2,... k, а в формуле (I), определяющей B_i, верхний предел ограничить неравенством $2\ell + i \le k$. Тогда для решения системы (I) с такой точностью потребуется k итераций.

Для k = I,2,3 и $n > k$ итерации (I) легко выполнить в явном виде. Коэффициенты полинома наилучшего приближения для этих случаев выписаны в /I/ .

Выполнение итераций (I) для любых k и n $(0 \le k, n \le 9)$ и получение формул для B_i с точностью до $O(x^{k+1})$ было проделано на машине М-20.

Нетрудно видеть, что A_i и B_i с точностью до $O(x^k)$ являются полиномами вида

$$Q_i = \sum_j c_j \, z_{j_1}^{k_1} z_{j_2}^{k_2} \ldots z_{j_n}^{k_n} \qquad (3)$$

Введем порядок члена полинома

$$p_j = k_1 j_1 + k_2 j_2 + \ldots + k_n j_n \; ;$$

тогда

$$c_j \, z_{j_1}^{k_1} z_{j_2}^{k_2} \ldots z_{j_n}^{k_n} = O(x^{p_j}) \quad и \quad i \le p_j \le k .$$

Каждый член полинома Q_i можно описать тремя величинами: c_j, p_j, r_j,

где c_j – коэффициент,

p_j – порядок,

r_j – раскладка множителей в члене:

$$r_j = k_1 \cdot 10^{j_1 - 1} + \ldots + k_n \cdot 10^{j_n - 1} .$$

Таким образом, при перемножении членов полиномов вида (3) достаточно сложить порядки, перемножить коэффициенты и сложить раскладки множителей. При приведении подобных членов нужно будет

только отыскать члены с одинаковыми раскладками r .

Так как формулы для B_i нужно было получить с точностью до $O(x^{k+1})$, то при решении системы (I) итерационным методом члены в произведениях $A_\ell A_{\ell+i}$, $B_\ell B_{\ell+i}$ и других с порядками, большими k, не учитывались.

Вид формул B_i различен для разных значений n. Ввиду громоздкости приводятся только формулы для B_i с точностью до $O(x^8)$, справедливые при $n \geqslant 4$:

$$\begin{aligned} B_1 = & - z_1 \\ & - 2 z_2 z_1 + z_1^3 \\ & - z_3 z_1^2 + 4 z_2 z_1^3 - 2 z_1^5 - 2 z_3 z_2 \\ & - 12 z_2 z_1^5 + 5 z_1^7 + 3 z_2^2 z_1^3 - 2 z_4 z_2 z_1 + 2 z_2^3 z_1 + 4 z_3 z_2 z_1^2 - z_3 z_2^2 - 2 z_4 z_3 + 2 z_3 z_1^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 = & - z_2 + z_1^2 \\ & - 2 z_3 z_1 + 4 z_2 z_1^2 - 2 z_1^4 \\ & - z_4 z_1^2 + 4 z_3 z_1^3 - 12 z_2 z_1^4 + 5 z_1^6 + 3 z_2^2 z_1^2 - 2 z_4 z_2 + 2 z_3 z_2 z_1 + z_2^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3 = & - z_3 + 2 z_2 z_1 - z_1^3 \\ & - 2 z_4 z_1 + 4 z_3 z_1^2 - 8 z_2 z_1^3 + 3 z_1^5 + 3 z_2^2 z_1 \\ & - z_5 z_1^2 + 4 z_4 z_1^3 - 11 z_3 z_1^4 + 28 z_2 z_1^5 - 9 z_1^7 - 17 z_2^2 z_1^3 + 4 z_3 z_2 z_1^2 - 2 z_2^3 z_1 - \\ & - 2 z_5 z_2 + 4 z_3 z_2^2 + 2 z_4 z_2 z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_4 = & - z_4 + 2 z_3 z_1 - 3 z_2 z_1^2 + z_1^4 + z_2^2 \\ & - 2 z_5 z_1 + 4 z_4 z_1^2 - 8 z_3 z_1^3 + 14 z_2 z_1^4 - 4 z_1^6 - 10 z_2^2 z_1^2 + 6 z_3 z_2 z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_5 = & - z_5 + 2 z_4 z_1 - 3 z_3 z_1^2 + 4 z_2 z_1^3 - z_1^5 - 3 z_2^2 z_1 + 2 z_3 z_2 \\ & - 2 z_6 z_1 + 4 z_5 z_1^2 - 8 z_4 z_1^3 + 14 z_3 z_1^4 - 22 z_2 z_1^5 + 5 z_1^7 + 24 z_2^2 z_1^3 - \\ & - 20 z_3 z_2 z_1^3 + 6 z_4 z_2 z_1 - 4 z_2^3 z_1 + 3 z_3^2 z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_6 = & - z_6 + 2 z_5 z_1 - 3 z_4 z_1^2 + 4 z_3 z_1^3 - 5 z_2 z_1^4 + z_1^6 + 6 z_2^2 z_1^2 - 6 z_3 z_2 z_1 + \\ & + 2 z_4 z_2 - z_2^3 + z_3^2 \end{aligned}$$

Остальные B_i при вычислении коэффициентов p_i полинома наилучшего приближения с точностью до $O(x^8)$ не учитываются.

Интерес представляют формулы для E_{n-1}.

Ниже выписаны главные члены формул для E_{n-1} с точностью до $O(z_1^8)$.

$$E_1 = a_2 (1 + z_1^2 + z_4 - 2z_3 z_1 + 4z_2 z_1^2 - 2z_1^4 + 4z_5 z_1 - 9z_4 z_1^2 + \\ + 16 z_3 z_1^3 - 28 z_2 z_1^4 + 9 z_1^6 + 16 z_2^2 z_1^2 - 8 z_3 z_2 z_1 + z_3^2 + O(z_1^8))$$

$$E_2 = a_3 (1 + z_1^2 + z_2 z_1^2 - z_1^4 + z_2^2 + z_6 - 2 z_5 z_1 + 3 z_4 z_1^2 - 4 z_3 z_1^3 + 2 z_2 z_1^4 + z_1^6 + \\ + 7 z_2^2 z_1^2 + 8 z_3 z_2 z_1 - 2 z_4 z_2 + z_2^3 + O(z_1^8))$$

$$E_{n-1} = a_n (1 + z_1^2 + z_2 z_1^2 - z_1^4 + z_2^2 + 2 z_1^6 + 2 z_3 z_2 z_1 + z_3^2 - 3 z_2 z_1^4 - \\ - z_2^2 z_1^2 + O(z_1^8)),$$

для $n \geq 4$.

Время получения формул на машине М-20 для одного значения n составляло 4 минуты.

ЛИТЕРАТУРА:

1. А.А.Корнейчук, Н.Ю.Ширикова. Итерационный метод отыскания многочлена наилучшего приближения. Препринт ОИЯИ. Р11-3240, Дубна, 1967 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 июля 1968 года.