ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

11- 3427

Е.П. Жидков, Чой Зай Хен

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА ПУТЕМ ВВЕДЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ПАРАМЕТРА

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1967.

5267/1 пр.

11- 3427

Е.П. Жидков, Чой Зай Хен

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА ПУТЕМ ВВЕДЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ПАРАМЕТРА

1. В настоящей заметке рассматривается метод решения граничной задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка путем введения непрерывного параметра.

Полученные результаты являются обобшением работы /1/, в которой рассматривались уравнения 2-го порядка.

Пусть требуется решить краевую задачу

$$y^{(n)} + f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0 \tag{1.1}$$

$$y^{(i)}(a) = y^{(j)}(b) = 0 \tag{1.2}$$

$$i = \overline{0, k-1} \qquad j = \overline{0, n-k+1},$$

где индекс k – любое фиксированное число из множества чисел

$$\{1, 2, \ldots, n-1\},$$

$n \geq 2$ – любое целое число.

Рассмотрим пространство $C_n[a, b]$ функций, удовлетворяющих граничному условию (1.2) и имеющих непрерывные производные до n -го порядка включительно.

Определим, как обычно, норму в $C_n[a, b]$ соотношением

$$\|y\| = \max_A |y| + \max_A |y'| + \ldots + \max_A |y^{(n)}|,$$

где $A = [a, b]$.

$C_n[a, b]$ является B -пространством.

Далее введем семейство функций

$$G_p^g[a,b] = \{ y(x) \mid p(x) \le y(x) \le g(x) \},$$

где $p(x)$, $g(x)$ – n раз непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие неравенству $p(x) < g(x)$ при $x \in (a,b)$

$$p^{(i)}(a) = p^{(j)}(b) = g^{(i)}(a) = g^{(j)}(b) = 0$$

$$i = \overline{0,\ k-1} \qquad j = \overline{0,\ n-k+1}\ .$$

Пусть дано дифференциальное уравнение в $G\ [a,b]$

$$\frac{d}{dt}\, y(t) = -\psi'^{-1}(y)\,\psi(y) \tag{1.3}$$

$$y(t=0) = r(x), \tag{1.4}$$

где

$$\psi(y) = y^{(n)} + f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

$r(x)$ – некоторая заданная функция.

Тогда для задачи (1.3)-(1.4) можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть задача (1.1)-(1.2) имеет единственное решение $y_* = y_*(x)$, лежащее внутри $G_p^g[a,b]$.

Пусть выполнены предположения:

1. Функция $f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

2. Для любой $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемой функции $y(x) \in G_p^g\ [a,b]$ задача

$$z^{(n)} + f'_{y^{(n-1)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\, z^{(n-1)} + \ldots + f'_y(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\, z = 0 \tag{1.5}$$

$$z^{(i)}(a) = z^{(j)}(b) = 0 \tag{1.6}$$

$$i = \overline{0,\ k-1}$$

$$j = \overline{0,\ n-k-1}$$

имеет только тривиальное решение.

Тогда существует такое число $\epsilon > 0$, что для любой функции $r(x) \in G_p^q[a, b]$, удовлетворяющей неравенству

$$| r^{(n)}(x) + f(x, r(x), r'(x), \dots, r^{(n-1)}(x) | \le \epsilon , \qquad (1.7)$$

существует решение задачи (1.3)-(1.4) на промежутке $0 \le t < +\infty$; при этом решение при $t \to +\infty$ сходится к y_* по норме пространства $C_n[a, b]$.

II. Эту теорему докажем, показав, что выполнены условия известной теоремы 2.

Теорема 2. Пусть уравнение

$$\phi(x) = 0 \qquad (2.1)$$

имеет единственное решение x_* в области D:

$$D = \{ x \mid \| x - x_* \| \le M \}. \qquad (2.2)$$

Предположим, что в области D существует производная Фреше $\phi'(x)$ и линейная производная Гато $\phi''(x)$.

Пусть, далее, существует обратный оператор $\phi'^{-1}(x)$, для которого в D выполняется неравенство

$$\| \phi'^{-1}(x) \| \le B \qquad (2.3)$$

и, кроме того, $\phi''(x)$ ограничена в окрестности каждой точки области D.

Тогда существует $\mathcal{E}_\epsilon : \| x_{p0} - x_* \| \le \delta$, $\delta < M$, что для любого $\bar{x} \in \mathcal{E}$ уравнение

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\phi'^{-1}(x)\phi(x), \quad x(0) = \bar{x}$$

имеет решение $x(t)$ в промежутке $0 \le t < +\infty$ и $\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_*$.

Проверим выполнимость условий последней теоремы, сформулированной для банахова пространства, в случае нашей конкретной задачи.

Проверка разбивается на ряд этапов.

1. Если функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ дважды непрерывно дифференцируема по всем переменным, то существует производная $\phi'(y)$ (в смысле Фреше) и

$\psi''(y)$ (в смысле Гато) в сфере

$$S = \{ y \mid \| y - y_* \| < N;\ y \in G^q_p [a, b] \},$$

$\psi'(y)$ имеет вид:

$$\psi'(y) = \frac{d^n}{dx^n} + f'_{y^{(n-1)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots .$$

$$+ \ldots + f'_{y'}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \frac{d}{dx} + f'_{y}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

2. Из предположения доказываемой теоремы следует существование линейного оператора $\psi'(y)^{-1}$.

3. Докажем, что

$$\| \psi'^{-1} \| \leq B .$$

Для этого рассмотрим линейное уравнение

$$\psi'_y (z) = \chi(x). \qquad z = \psi'^{-1} \chi \tag{2.4}$$

Нужно показать, что если функция $z(x)$ является решением уравнения (2.4), то при $\| \chi(x) \| \leq 1$ имеет место $\| z \| \leq B$.

$$(\| \chi(x) \| = \max_{A} | \chi(x) |).$$

Предположим противное.

Тогда можно выбрать такую последовательность функций

$$\{ y_n(x) \mid y_n(x) \to \bar{y}(x);\ y_n(x) \in G^q_p [a, b] \},$$

что каждой функции $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ соответствует $\| z_n \| > n$. При этом функции $\bar{y}(x) \in G^q_p [a, b]$ соответствует функция $f(x, \bar{y}, \bar{y}', \ldots, \bar{y}^{(n-1)})$ и $\bar{z}(x)$, являющаяся решением уравнения (2.4). Но тогда имеет место $\| \bar{z} \| = +\infty$. Противоречие, следовательно, существует постоянное B , удовлетворяющее неравенству $\| z \| \leq B$, т.е.

$$\| \psi'(y)^{-1} \| \leq B .$$

4. Третьим пунктом закончена проверка выполнимости всех условий теоремы 2 при условии выполнения условий теоремы 1.

Отсюда следует, что

$$\lim_{t \to +\infty} \| y(x, t) - y_*(x) \| = 0$$

$$\lim_{t \to +\infty} y_x^{(i)}(x, t) = y_*^{(i)}(x)$$

для всех i от 0 до n .

Замечание 1.

Задача (1.3)-(1.4) эквивалентна краевой задаче

$$\frac{\partial}{\partial t} y(x, t) = z(x, t) \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} z^{(n)} + f'_{y^{(n-1)}}(x, y(x,t), y'_x(x,t), \ldots, y_x^{(n-1)}(x,t))\, z^{(n-1)} + \ldots \\ + f'_y(x, y(x,t), y'_x(x,t), \ldots, y_x^{(n-1)}(x,t))\, z = \\ = -[\, y_x^{(n)}(x,t) + f(x, y(x,t), y'_x(x,t), \ldots, y_x^{(n-1)}(x,t)) \,] \end{gathered} \tag{2.6}$$

$$z^{(i)}(a,t) = z^{(j)}(b,t) = 0 \tag{2.7}$$

$$z(x, 0) = r(x),$$

где $r(x) \in G_p^q[a, b]$ - заданная функция.

III . Пусть X – B – пространство, а $\phi(x)$ – оператор, переводящий X в себя.

Пусть, далее, в некоторой открытой области $G \subset X$

$$\| \phi(x) \| \leq M^* \tag{3.1}$$

и, кроме того, $\phi(x)$ удовлетворяет в G условию Липшица, т.е. для любых $x', x'' \in G$

$$\| \phi(x') - \phi(x'') \| \leq L \| x' - x'' \| . \tag{3.2}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} x(t) = \phi(x) \tag{3.3}$$

$$x(0) = x_0 .$$

Для численного решения задачи Коши уравнения (3.3) можно воспользоваться известной теоремой работы /1/.

<u>Теорема 3.</u> Пусть решение уравнения (3.3) при $0 \le t \le \delta_*$ лежит внутри $G \subset X$ и пусть для $\phi(x)$ в G выполнены условия (3.1)-(3.2).

Предположим, что выполнено условие

$$r \le \frac{k\delta_*}{n},$$

где k - константа, не зависящая от n.

Тогда при $r \to 0$ решение, полученное методом Эйлера, сходится к решению $x(t)$ уравнения (3.3) на $[0, \delta_*]$.

$$r = \max(r_0, r_1, \ldots, r_{n-1})$$

$$x_1 = x_0 + r_0\,\phi(x_0)$$

$$x_2 = x_1 + r_1\,\phi(x_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = x_{n-1} + r_{n-1}\,\phi(x_{n-1})$$

$$r_0 + r_1 + \ldots + r_{n-1} = \delta_*$$

Уравнение (1.3)-(1.4) для решения задачи (1.1)-(1.2) удовлетворяет всем условиям теоремы 3.

Таким образом, численное решение задачи (2.5)-(2.7) можно получить по следующей схеме.

Выбираем шаг интегрирования ΔT:

$$t_i = i\,\Delta T, \quad \Delta T = t_{i+1} - t_i$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда уравнение (2.5) можно заменить разностным соотношением при $t = t_i$

$$z(x, t_i) = \Delta T^{-1}\,[y(x, t_{i+1}) - y(x, t_i)]. \qquad (3.4)$$

(2.6) является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением:

$$z^{(n)}(x,t_i) + f'_{y^{(n-1)}}(x, y(x,t_i), y'_x(x,t_i), \ldots, y_x^{(n-1)}(x,t_i))\, z^{(n-1)}(x,t_i) +$$

$$+ \ldots + f'_y \,(x, y(x, t_{1u}), y'_x(x, t_1), \ldots, y_x^{(n-1)}(x, t_1)\, z(x, t_1) =$$

$$= -[\, y_x^{(n)}(x, t_1) + f(x, y(x, t_1), y'_x(x, t_1), \ldots, y_x^{(n-1)}(x, t_1))] \qquad (3.5)$$

$$z^{(i)}(a, t_1) = z^{(i)}(b, t_1) = 0 \qquad (3.6)$$

$$z(x, 0) = y_0(x).$$

Решив (3.5)-(3.6) для начального приближения $y_0(x)$, получаем его решением $z(x, t_0)$. Потом, используя $z(x, t_0)$, из соотношения (3.4) определяем $y(x, t_1)$.

После того, используя $y(x, t_1) = y_1(x)$, решаем (3.5)-(3.6).

В результате получаем решение $z(x, t_1)$ и т.д.

При $\Delta T \to 0$ последовательность этих приближенных решений сходится к искомому решению уравнения (3.4)-(3.6).

Замечание 2.

Численное решение задачи (3.5)-(3.6) при $t = t_1$ осуществляется любым известным способом.

Литература

1. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. Об одном методе введения параметра при решении краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Препринт ОИЯИ 5-2959, Дубна 1966г.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 июля 1967 года