



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-2004-142

На правах рукописи
УДК 519.6, 517.9

Д-465

ДИМОВА
Стефка Николаева

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ СТРУКТУР**

Специальность: 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

С 325.4 + С 17К

Дубна 2004

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий
Объединенного института ядерных исследований

Научный консультант:

доктор физ.-мат. наук, чл.корр. РАН,
проф. Курдюмов Сергей Павлович.

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук, проф. Абрамов Александр Александрович;
доктор физ.-мат. наук, проф. Вабищевич Пётр Николаевич;
доктор физ.-мат. наук, проф. Гулин Алексей Владимирович.

Ведущая организация:

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва.


Защита диссертации состоится “ ” “ ” 2004 г.
в ч. на заседании Диссертационного совета Д 720.001.04 в Объединенном институте ядерных исследований (Лаборатория информационных технологий), г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан “ ” “ ” 2004 г.

Ученый секретарь Совета:

кандидат физико-математических наук

 Иванченко З.М.

1 ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

1.1 Актуальность работы

Новые тенденции в современной науке наиболее ярко проявляются в синергетике [1],[2]. Одной из главных задач синергетики – выявление общих принципов, лежащих в основе процессов самоорганизации в системах самой разной природы: физических, технических, биологических, социальных. При всем различии таких систем, все они характеризуются несколькими общими признаками, среди которых определяющими являются открытость, диссипативность и нелинейность [2].

Открытость системы означает наличие в ней обмена веществом и энергией с окружающей средой не только через границы системы, а также через объемные источники и стоки.

Диссипативность системы означает наличие в ней рассеивающего, размывающего неоднородности фактора (теплопроводность, диффузия, дисперсия и т.д.).

Нелинейность системы выражается нелинейной зависимостью диссипирующего фактора от состояния среды. В такой среде действие нелинейных объемных источников и стоков создает и может усиливать ее неоднородность. Взаимодействие этих двух нелинейных факторов (с одной стороны сглаживание неоднородностей благодаря диссипации, а с другой – их усиление объемными источниками и стоками) может приводить к локализации процессов на определенных участках среды – т.е., к возникновению структур, к возникновению самоорганизации. Чтобы отразить влияние диссипации на формирование структур, Пригожин ввел понятие диссипативной структуры [3]. Действие стоков приводит к возникновению стационарных диссипативных структур (стоячие волны, ячейки Бенара), а действие источников – к нестационарным, эволюлирующим диссипативным структурам (тепловые структуры, в частности Т-слои [4], бегущие и спиральные волны, вихри).

Благодаря нелинейности в одной и той же среде без изменения её параметров могут возникать разные структуры. Но не произвольные структуры, а свойственные только этой среде. Одна из важнейших и актуальных задач синергетики – определение спектра структур, которые могут возникать и самоподдерживаться в открытых нелинейных системах.

Важный класс диссипативных структур образуют сильно нестационарные структуры [5]. Они возникают в результате сверхбыстрых процессов в нелинейных открытых системах с объемными источниками (так называемые системы с положительной нелинейной обратной связью). Характерные величины в таких процессах (температура, концентрация, энергия) возрастают на несколько порядков за конечное время. Это время принято называть временем обострения, а сам процесс – режимом с обострением (blow-up).

Проблема режимов с обострением поставлена в 1940-х и 50-х годах в связи с теорией цепных реакций Семенова и с теорией горения (Зельдович, Баренблатт, Либрович). Их интенсивное изучение в 70-х годах началось благодаря предложенному на основе численных экспериментов [6] процессу сверхжгания центральных частей капли из дейтерия и трития путем ее облучения профилированным во времени лазерным импульсом. Режимы с обострением рассматриваются в области физики плазмы [7], лазерного термоядерного синтеза [8], магнитной гидродинамики [9], астрофизики. Методология решения “задач на обострение” позволяет с нетрадиционной точки зре-

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

ния рассмотреть ряд классических задач. Она открывает новые подходы к задачам коллапса (быстрое сжатие вещества), химической кинетики, метеорологии (катастрофические явления в атмосфере Земли), экологии (рост и вымирание биологических популяций), эпидемиологии (вспышка инфекционных заболеваний), экономики (феномен бурного экономического развития) и т.д. Поэтому разработка надежных и эффективных методов численного решения задач на обострение является актуальной проблемой, выходящей за рамки конкретного класса задач.

Механизмы самоорганизации можно проследить, изучая сравнительно простые на первый взгляд математические модели. Вся синергетика работает с несколькими такими моделями – это нелинейные уравнения (или системы уравнений) типа реакция-диффузия с нелинейными источниками и стоками.

Одна из самых богатых моделей – модель тепловых структур. В общем виде она выглядит так:

$$u_t = \sum_{i=1}^N (k_i(u)u_{x_i})_{x_i} + Q(u), \quad t > 0, \quad x \in R^N \quad (1)$$

Эта модель описывает процессы распространения тепла и горения в среде с коэффициентами теплопроводности $k_i(u) \geq 0$ и источником $Q(u) \geq 0$, которые являются нелинейными функциями температуры $u(t, x) \geq 0$.

Модели вида (1) в различном контексте изучались многими исследователями. Больше количество работ посвящено полулинейным уравнениям: $k_i(u) \equiv 1$, $Q(u) = \lambda e^u$ (уравнение Франка-Каменецкого), $Q(u) = u^\beta$, $\beta > 1$. После пионерской работы Н. Fujita (1966 г.), они и их обобщения изучались интенсивно многими авторами. Среди них: J. Bebernes, A. Bressan, H. Brezis, D. Eberly, A. Friedman, B.A. Галактионов, И.М. Гельфанд, М.А. Herrero, R. Kohn, Л.А. Лепин, С.А. Посашков, А.А. Самарский, J.L. Vazquez, L.J.L. Velazquez. Монография [28] содержит обширную библиографию и отражает часть этих исследований.

Квазилинейное уравнение изучалось в работах D.G. Aronson, A. Friedman, H.A. Levine, S. Kaplan, L.A. Pelitier и др.. Большой вклад ученых русской школы. Необычный эффект локализации граничных режимов с обострением обнаружен численным экспериментом в работе А. А. Самарского и М. И. Соболя 1963 года [10]. Проблема локализации в квазилинейных уравнениях с источником поставлена С.П. Курдюмовым в 1974 г. Работы И.М. Гельфанда, А.С. Калашникова, ученых школы А.А. Самарского и С. П. Курдюмова (их работы цитированы ниже) посвящены исследованию интереснейших проблем физического и математического характера, связанных с моделью (1) или ее обобщениями. Среди них: локализация (строгая и эффективная) процесса горения в пространстве, развитие разных типов режимов с обострением, возникновение структур – бегущие и стоячие волны, сложные структуры с различной степенью симметрии. Секретом успеха этих исследований явилось сочетание вычислительного эксперимента с применением и развитием качественных и аналитических методов теории обыкновенных и в частных производных дифференциальных уравнений, теорий групп Ли и Ли-Бэклунда.

Особое место в этих исследованиях занимает изучение разных типов автомодельных и инвариантно-групповых решений уравнения (1) со степенными нелинейностями:

$$k_i(u) = u^{\sigma_i}, \quad Q(u) = u^\beta \quad (2)$$

Такой выбор не случаен. Зависимости вида (2) от температуры встречаются в многих реальных процессах [11]. Например, в случае $\sigma_i = \sigma = 2.5$, $\beta \leq 5.2$, уравнение (1) моделирует термоядерное горение с электронной теплопроводностью в плазме [7]; значения $\sigma = 0$, $2 \leq \beta \leq 3$ соответствуют моделям автокаталитических процессов с диффузией в химических реакторах; $\sigma \approx 6.5$ соответствует радиационной теплопроводности высокотемпературной плазмы в звездах и т.д.

Установлено [31],[17], что на классе степенных функций симметрия уравнения (1) в определенном смысле максимальна, оно допускает богатый набор инвариантно-групповых решений. Нестационарные диссипативные структуры режимов с обострением, рассматриваемые в предлагаемой работе, связаны со степенными автомодельными решениями или с более общими инвариантными решениями, когда по радиусу автомодельность степенная, а по углу – бегущая волна. Исследования в области диссипативных структур дают основание считать, что именно инвариантные решения описывают “аттракторы” эволюции диссипативных структур и тем самым характеризуют важные внутренние свойства нелинейной диссипативной среды.

Этот богатый запас инвариантных решений уравнения (1) со степенными нелинейностями необходим для успешного применения методов исследования того же уравнения в случае более общих зависимостей $k_i(u)$, $Q(u)$. С помощью методов операторного сравнения и стационарных состояний удается исследовать свойства решений (такие как локализация, неограниченность, асимптотическое поведение) целых классов более общих нелинейных уравнений.

Наконец, в случае степенных коэффициентов есть нужные соотношения между диссипацией и источником, при которых происходит их согласование. В результате этого возникают сложные структуры, более того, возникает спектр структур, которые горят согласованно, с одним моментом обострения. Чтобы установить в системе эту сложную организацию и вывести ее на один из возможных путей эволюции, надо знать что заложено в ней и спровоцировать этот путь заданием начальных данных из области притяжения аттракторов-структур. Поэтому нахождение аттракторов процессов в системах различной природы является очень актуальной проблемой теории самоорганизации.

1.2 Цели работы

Основная цель работы – исследование условий возникновения и эволюции сильно нестационарных тепловых структур в среде, описываемой уравнением нелинейной теплопроводности со степенными нелинейностями и некоторыми его модификациями. В частности, это выявление и исследование возможных способов сложной организации нелинейной диссипативной среды. И так как исследования проводятся в основном численным экспериментом, то важной задачей является также создание и апробирование эффективных вычислительных алгоритмов для рассматриваемых классов задач:

- нелинейных параболических задач с сингулярными по времени решениями – задач Коши и краевых задач для квазилинейных параболических уравнений, системы таких уравнений и полулинейных уравнений;

- автомодельных нелинейных задач – краевых задач для квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), системы таких уравнений и квазилинейных эллиптических уравнений.

1.3 Научная новизна работы

Впервые реализованы численно инвариантные решения, которые описывают направленные распространение тепла и горения в двумерной нелинейной анизотропной среде со степенными коэффициентами теплопроводности и степенными источниками. Так конструктивным образом доказано их существование.

Найдены два новых типа решений автомодельной задачи (так называемых собственных функций горения нелинейной среды) – “с перетяжкой” и с полостью около центра симметрии, в цилиндрически- и сферически-симметричном случаях при параметрах среды $\beta > \sigma + 1$. На основе детального численного исследования предложены сценарии поведения сложных собственных функций (четных и нечетных) при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$.

Открыт новый мир структур при параметрах среды $\beta < \sigma + 1$. Это удалось благодаря:

- изменения идеологии – искать структуры, “живущие” и развивающиеся не на нулевом фоне, а на гомотермическом фоне (т.е. изменения математической модели тепловых структур постановкой новых условий на бесконечности);
- нахождения подходящего (комплекснозначного) разделения переменных в линеаризованной автомодельной задаче и тем самым нахождения линейных приближений к спиральным с.ф.;
- детального аналитического и численного исследования линейных приближений, которое показало, что их асимптотики автомодельные.

Все это дало возможность замкнуть автомодельную задачу в случае $\beta < \sigma + 1$ подходящими краевыми условиями, конструировать начальные приближения к различным решениям и решить ее численно. Таким образом впервые показано, что усложнение организации среды может происходить не только за счет локализованных во вне и сходящихся к центру структур, но и за счет расходящихся волн горения сложной структуры, в том числе раскручивающихся спиральных волн.

1.4 Достоверность результатов

Проведено детальное исследование поведения решений при изменении как физических, так и вычислительных параметров для каждого из рассмотренных классов задач. В частности, расчеты проводились на последовательностях вложенных сеток и таким образом исследовался их порядок точности; когда это было возможно, численные результаты сравнивались с известными аналитическими или качественными результатами.

Новые, неожиданные результаты подтверждены разными методами.

Разработанные методы и алгоритмы для параболических и для эллиптических задач имеют внутренний критерий точности:

- восстановление в параболической задаче времени обострения, заложенном в соответствующей автомодельной задаче, если начальные данные автомодельные;
- сохранение автомодельности вплоть до момента обострения при использовании точных автомодельных начальных данных.

Полученные новые типы решений автомодельной задачи в радиально-симметричном случае инициировали исследования других авторов [12]–[14] другими методами

(методом динамической аналогии, бифуркационным анализом). Цитированные исследования подтвердили существование этих новых решений.

1.5 Практическая ценность работы

Математическая модель тепловых структур возникла в связи с решением актуальных технологических проблем физики плазмы, лазерного термоядерного синтеза, магнитной гидродинамики и др.. Как было отмечено выше, режимы с обострением встречаются также во многих других областях. Разработанная здесь и тщательно апробированная методика решения задач на обострение применима к моделям физики плазмы, моделям автокаталитических реакций, в теории горения (модели воспламенения твердого и жидкого горючего). Она легко может быть перенесена и на другие классы задач. Отметим особо метод построения адаптивных сеток по пространственным переменным, согласованных с известными асимптотиками процессов в среде.

1.6 Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах в ЛИТ (ЛВТА), ОИЯИ, Дубна; в ИПМ им. “М.В. Келдыша”, РАН, Москва; в ВЦ РАН, Москва; в ФМИ Софийского университета “Св. Кл. Охридского”; в Институте математики и информатики Болгарской АН; в Университете в Линфилд, Орегон, США; в Департаменте по Прикладной математике Университета в Коллорадо, Боулдер, США; на коллоквиуме Факультета математики Университета в Кайзерслаутерне, Германия; в “Макс Планк” институте по физике плазмы, Мюнхен, Германия; в Техническом Университете в Гетеборге, Швеция, и на следующих международных конференциях:

Numerical Methods and Applications, 1988, 1994, 1998, София; 2002, Боровец, Болгария;

Qualitative Theory of Differential Equations, март 1989, Рига, Латвия;

International IMACS Conference on Mathematical Modelling and Applied Mathematics, июнь 1990, Москва;

International Colloquium on Differential Equations, август 1991, Пловдив, Болгария;

Elliptic Boundary Value Problems, March 1992, Росток, Германия;

International Colloquium on Numerical Analysis, август 1992, 1996, 1997, Пловдив, Болгария;

International Conference on Programming and Mathematical Methods for Solving Physical Problems, июнь 1993, Дубна;

International Conference “Criteria of Self-organization in Physical, Chemical and Biological Systems, июнь 1995, Москва-Суздаль;

IMA Minisymposium “Mathematical Investigations of Models in Combustion”, ноябрь 14-17, 1999, Минеаполис, США;

International Congress on Mathematical Modelling, октябрь 2002, Дубна.

Исследования проводились в соответствии с тематическими планами ЛИТ ОИЯИ, ИМИ Болгарской АН, ФМИ Софийского университета и были поддержаны грантами Министерства образования, науки и технологий Болгарии, и Научного фонда Софийского университета.

1.7 Публикации

По материалам диссертации опубликовано 22 работы, из которых 5 работ в российских ведущих научных журналах.

1.8 Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объём диссертации – 211 страниц, включая 65 рисунков, 22 таблицы и список литературы, содержащий 138 наименований.

1.9 Личный вклад автора

Автор диссертации, работая в коллективе соавторов из Института Прикладной Математики, РАН, Москва, из Института математики и информатики БАН, София, из Факультета математики и информатики Софийского университета, в большинстве случаев был инициатором данных исследований. Двое из соавторов – Даниела Василева и Милена Колева – были аспирантками автора диссертации (вторая руководимая совместно с проф. М. Касчиевым) и защитили успешно кандидатские диссертации. Все аналитические исследования, приведенные в диссертации, являются личным вкладом автора. Автор непосредственно участвовала в математической постановке задач, в разработке численных методов и алгоритмов, в их программной реализации, а также в численном решении поставленных задач, в обработке, анализе и интерпретации результатов численных экспериментов.

2 ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении обоснована актуальность проблем, исследованных в диссертационной работе, и сформулированы цели работы. Введены необходимые понятия, перечислены основные задачи и сделан обзор известных автору результатов, связанных с ними. Коротко изложены и прокомментированы полученные в диссертации результаты.

Основные используемые понятия введены на самой простой модели вида (1), когда предполагается радиальная симметрия. В этом случае задача Коши с финитными начальными данными формулируется так:

$$u_t = x^{1-N}(x^{N-1}u^\sigma u_x)_x + u^\beta, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t > 0, \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1, \quad (3)$$

$$u_x(t, 0) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad 0 \leq x < l, \quad u_0(x) \equiv 0, \quad x \geq l. \quad (4)$$

Если начальные данные удовлетворяют дополнительным условиям: $u_0(x) \in C(\mathbb{R}_+)$, $(u_0^\sigma u_0')(0) = 0$, то существует единственное локальное (по времени) обобщенное решение $u = u(t, x)$ задачи (3)-(4), которое является неотрицательной непрерывной функцией в $\mathbb{R}_+ \times (0, T_0)$, где $T_0 \in (0, \infty]$ – конечное или бесконечное время существования решения (см. список литературы в обзоре [15]). При этом $u(t, x)$ является классическим решением в окрестности любой точки (t, x) , где $u(t, x)$ является строго положительным. В точках вырождения оно может не иметь необходимой гладкости, но тепловой поток $-x^{N-1}u^\sigma u_x$ должен быть непрерывным. Это означает, что

$u^\sigma u_x = 0$ всюду, где $u = 0$. Когда время T_0 конечное и $\overline{\lim}_{t \rightarrow T_0^-} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(t, x) = +\infty$, T_0 называется временем обострения неограниченного (сингулярного по времени) решения.

Неограниченное решение называется локализованным (в строгом смысле), если множество $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^N : |u(T_0^-, x)| := \overline{\lim}_{t \rightarrow T_0^-} u(t, x) > 0\}$ ограничено в \mathbb{R}^N .

Неограниченное решение называется эффективно локализованным, если множество $\omega_L = \{x \in \mathbb{R}^N : |u(T_0^-, x)| = \infty\}$ ограничено.

Уравнение (3) допускает автомодельное решение (а.р.) [16]:

$$u_a(t, x) = \psi(t)\theta(\xi) = (1 - t/T_0)^{-\frac{1}{\beta-1}}\theta(\xi), \quad (5)$$

$$\xi = x/\varphi(t) = x(1 - t/T_0)^{-\frac{m}{\beta-1}}, \quad m = (\beta - \sigma - 1)/2. \quad (6)$$

Оно соответствует начальным данным $u_a(0, x) = \theta(x)$. Функцию $\theta(\xi) \geq 0$, определяющую пространственно-временную структуру автомодельного решения, согласно принятой терминологии [18] называют собственной функцией (с.ф.) горения нелинейной среды, описываемой уравнением (3). Далее для краткости используется название собственная функция. Она удовлетворяет в \mathbb{R}_+ вырождающемуся ОДУ:

$$-\frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}\theta^\sigma \theta')' + \frac{\beta - \sigma - 1}{2(\beta - 1)T_0}\xi \theta' + \frac{1}{(\beta - 1)T_0}\theta - \theta^\beta = 0 \quad (7)$$

и краевым условиям:

$$\theta'(0) = 0, \quad \theta(\infty) = 0, \quad \theta^\sigma \theta' = 0, \quad \text{если } \theta = 0. \quad (8)$$

Уравнение (7) имеет два решения, являющимися константами: $\theta(\xi) \equiv 0$ и $\theta(\xi) \equiv \theta_H = (T_0(\beta - 1))^{-1/(\beta-1)}$. Они играют существенную роль при анализе различных решений уравнения (7). Если задача (7), (8) имеет решение для некоторого $T_0 = T_{0,1}$, то она имеет решение и при любом другом $T_0 = T_{0,2}$, при этом решения связаны преобразованием подобия [19]. Это дает возможность без ограничения общности положить

$$T_0 = 1/(\beta - 1), \quad \text{и тем самым, } \theta_H \equiv 1.$$

Тогда уравнение (7) принимает вид:

$$L(\theta) \equiv -\xi^{1-N}(\xi^{N-1}\theta^\sigma \theta')' + m\xi \theta' + \theta - \theta^\beta = 0. \quad (9)$$

Анализ решений задачи (9), (8), (см. [17], [16], Глава IV, и ссылки в них), дает следующие результаты:

✓ При любых $1 < \beta \leq \sigma + 1$ существует финитное решение $\theta(\xi) \geq 0$.

✓ При $\beta < \sigma + 1$, $N \geq 1$ и $\beta = \sigma + 1$, $N > 1$ задача не имеет немонотонных решений. Единственность решения доказана для случая $\beta < \sigma + 1$, $N = 1$.

✓ При $\beta > \sigma + 1$, $N \geq 1$ задача не имеет финитных решений.

✓ Если $\sigma + 1 < \beta < \beta_s = (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$, то задача имеет по крайней мере одно решение $\theta(\xi) > 0$ в \mathbb{R}_+ , которое строго монотонно убывает по ξ и имеет асимптотику

$$\theta(\xi) = C_a \xi^{-2/(\beta-\sigma-1)}[1 + \omega(\xi)], \quad \omega(\xi) \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (10)$$

$C_a = C_a(\sigma, \beta, N)$ – постоянная. Позже [27] интервал по β был расширен.

✓ При $N = 1$, $\beta > \sigma + 1$ задача имеет не менее чем

$$K = -[-a] - 1, \quad [.] - \text{целая часть}, \quad a = (\beta - 1)/(\beta - \sigma - 1) > 1 \quad (11)$$

решений, различающихся по числу экстремумов на полуоси $\xi \in [0, \infty)$ [20]. Обозначим их через $\theta_{a,i}(\xi)$, $i = 1, 2, \dots, K$. На основе линейного анализа и некоторых численных результатов в работе [21] было высказано предположение, что число различных решений $\theta_{a,i}(\xi)$ при $\beta > \sigma + 1$ и $N \geq 1$ равняется $K + 1$. В случае $N = 1$ этот результат был уточнен недавно [14] бифуркационным анализом: число решений дается формулой $K = [a]$, если a - нецелое, и $K = a - 1$, если a - целое. Для $N = 2, 3$ бифуркационный анализ дает ту же оценку числа решений, но при $\beta \approx \sigma + 1$, $\beta > \sigma + 1$ она нарушается (см. раздел 2.2 и [14]).

На основе этих результатов устанавливаются базисные режимы горения среды, описываемыми а.р. (5), (6). Для их характеристики вводятся также следующие понятия: *полуширина* $x_s = x_s(t)$, которая для монотонных по x решений с единственным максимумом в точке $x = 0$ определяется уравнением $u(t, x_s) = u(t, 0)/2$, и *точка фронта* x_f : $u(t, x_f) = 0$, $u^\sigma u_x(t, x_f) = 0$.

HS-режим с обострением, $1 < \beta < \sigma + 1$. Формируется *тепловая волна*, которая за время T_0 охватывает все пространство. Процесс с обострением не локализован: $\text{mes } \Omega_L = \text{mes } \omega_L = \infty$, $x_s \rightarrow \infty$, $x_f \rightarrow \infty$, $t \rightarrow T_0^-$.

S-режим с обострением, $\beta = \sigma + 1$. Диффузия тепла и интенсивность нагрева согласуются так, что приводят к локализации процесса в области диаметром L_s , называемой "*фундаментальной длиной*" *S-режима*: $\Omega_L = \omega_L = \{|x| < L_s/2\}$. Внутри Ω_L среда нагревается до бесконечной температуры за время T_0 ; $x_s = \text{const}$, $x_f = L_s/2$.

LS-режим с обострением, $\sigma + 1 < \beta < \beta_f = \sigma + 1 + \frac{2}{N}$. Интенсивность источника сильнее, чем диффузия. Среда нагревается до бесконечной температуры за время T_0 только в одной точке: $\text{mes } \omega_L = 0$, $x_s \rightarrow 0$, $t \rightarrow T_0^-$. В соответствии с различными решениями $\theta_{a,i}(\xi)$, $i = 1, 2, \dots$, среда горит в виде простых ($i = 1$) и сложных структур ($i > 1$) с одним и тем же моментом обострения.

Чтобы показать значимость автомодельных решений как аттракторов широких классов других решений того же уравнения, введем еще несколько понятий.

В случае произвольных *финитных* начальных данных $u_0(x)$ (4) вводится в рассмотрение *автомодельное представление* решения $u(t, x)$ задачи (3), (4), определяемое в каждый момент времени в соответствии с видом а.р. (5), (6):

$$\Theta(t, \xi) = (1 - t/T_0)^{\frac{1}{\beta-1}} u\left(t, \xi(1 - t/T_0)^{\frac{m}{\beta-1}}\right) = \psi^{-1}(t)u(t, \xi\varphi(t)) \quad (12)$$

Автомодельное решение $u_a(t, x)$ называется *асимптотически устойчивым*, если существует достаточно широкий класс решений $u(t, x)$ задачи (3), (4) с начальными данными $u_0 \neq \theta(x)$, автомодельные представления $\Theta(t, \xi)$ которых стремятся в некоторой норме к $\theta(\xi)$ когда $t \rightarrow T_0^-$:

$$\|\Theta(t, \xi) - \theta(\xi)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow T_0^- \quad (13)$$

В определении автомодельного представления (12) участвует неизвестное время обострения T_0 и оно непригодно для численного исследования асимптотической устойчивости а.р. В работе [19] был предложен и численно реализован (при $N = 1$)

другой подход, позволяющий исследовать "*структурную*" устойчивость неограниченных а.р. в специальной "*автомодельной*" норме, согласованной при каждом t с геометрической формой структуры и не использующей в явном виде времени обострения T_0 . Вводится новое автомодельное представление в соответствии со структурой а.р. $u_a(t, x)$:

$$\Theta(t, \xi) = u(t, \xi(\gamma(t))^{-m})/\gamma(t), \quad \gamma(t) = \frac{\max_x u(t, x)}{\max_\xi \theta(\xi)} \quad (14)$$

Автомодельное решение $u_a(t, x)$ называется *структурно устойчивым*, если сходимость (13) имеет места для $\Theta(t, \xi)$, заданной через (14).

Для автомодельных решений со сложной пространственно-временной структурой, отвечающих немонотонным собственным функциям горения нелинейной среды, вводится понятие *метаустойчивости*. Автомодельное решение $u_a(t, x)$ называется *метаустойчивым*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует класс начальных данных $u_0(x) \approx \theta(x)$ и время T , $T_0 - T \ll T_0$ таких, что для автомодельных представлений соответствующих решений выполнялось

$$\|\Theta(t, \xi) - \theta(\xi)\|_{C(\Omega)} \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (15)$$

Глава 1 посвящена численным методам решения основных задач - нелинейных автомодельных задач (раздел 1.1) и нелинейных параболических задач с сингулярными по времени (blow-up) решениями (раздел 1.2). Детальное описание и исследование методов сделано для случая радиальной симметрии.

Общими трудностями как для автомодельных, так и для параболических задач, являются: нелинейность; зависимость от нескольких параметров (как правило - трех); недостаточная гладкость решений на поверхностях вырождения эллиптического оператора, где решения обращаются в ноль. В случае радиальной симметрии при $N > 1$ и в полярных координатах в двумерном случае к ним добавляется сингулярность в точке $x = 0$ ($\xi = 0$).

Что касается автомодельных задач, то самая существенная трудность - это неединственность решения, что существенно отличает их от классических задач с единственным решением. Возникают следующие проблемы:

- ✓ найти "хорошее" приближение к каждому решению;
- ✓ сконструировать итерационный метод, который: сходится всегда к искомому решению (соответствующему начальному приближению); сходится быстро; обеспечивает достаточную точность;
- ✓ автоматизировать процесс вычислений так, чтобы единообразно и быстро находить все различные решения при данных параметрах задачи (σ, β, N);
- ✓ определить априори куда перенести условия из бесконечности, чтобы асимптотика (10) выполнялась (отметим, что чем больше номер с.ф., тем больше константа C_a в асимптотике).

Для преодоления указанных проблем здесь использованы:

- подход "*линеаризации*" [19] автомодельного уравнения относительно нетривиального пространственно-однородного решения θ_N и *сшивание* решений линеаризованного уравнения с известной асимптотикой, для нахождения приближений к различным решениям;

– итерационные схемы, основанные на непрерывном аналоге метода Ньютона (НАМН) для решения нелинейных функциональных уравнений [35], который имеет большую, по сравнению с классическим методом Ньютона, область сходимости;

– метод конечных элементов (МКЭ) разного порядка точности на квазиравномерных сетках, для решения линейного уравнения НАМН на каждом шаге итерационного процесса;

– МКЭ, основанный на несимметричном методе Галеркина [22], для сингулярных в центре симметрии задач при $N \geq 3$.

В разделе 1.1.1 поставлена радиально-симметричная автомодельная задача:

Найти функцию $\theta(\xi) \geq 0$, удовлетворяющую уравнению (9) и краевым условиям (8), которые с учетом перечисленных ее свойств и асимптотику (10), уточнены следующим образом:

$$\theta'(0) = 0, \quad \theta(l) = 0, \quad \text{для } \beta \leq \sigma + 1, \quad (16)$$

где l выбирается так, чтобы краевое условие не влияло на решение, т.е., l было больше носителя ξ_0 решения;

$$\theta'(0) = 0, \quad \theta'(l) + (p/l)\theta(l) = 0, \quad p = 1/m = 2/(\beta - \sigma - 1), \quad \text{для } \beta > \sigma + 1, \quad (17)$$

где l выбирается так, чтобы с хорошей точностью выполнялась асимптотика (10).

Детальное изложение численного метода сделано на примере этой задачи. В ньютоновской итерационной схеме (раздел 1.1.2)

$$L'(\theta_k)v_k = -L(\theta_k), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} &= \theta_k + \tau_k v_k, \quad 0 < \tau_k \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots, \\ \theta_k &= \theta_k(\xi) = \theta(\xi, t_k), \quad v_k = v_k(\xi) = v(\xi, t_k), \\ \theta_0(\xi) &\text{ – начальное приближение,} \end{aligned} \quad (19)$$

уравнение (18) имеет вид

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta_k^\alpha v_k')' - \frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \sigma \theta_k^{\sigma-1} \theta_k' v_k)' + m \xi v_k' + \\ &+ (1 - \beta \theta_k^{\beta-1}) v_k = - \left[-\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta_k^\alpha \theta_k')' + m \xi \theta_k' + \theta_k - \theta_k^\beta \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Итерационные поправки $v_k(\xi)$ удовлетворяют однородным граничным условиям

$$v_k'(0) = 0, \quad v_k(l) = 0 \quad \text{для } \beta \leq \sigma + 1, \quad (21)$$

$$v_k'(0) = 0, \quad v_k'(l) + (p/l)v_k(l) = 0 \quad \text{для } \beta > \sigma + 1. \quad (22)$$

В разделе 1.1.3 проведена дискретизация по МКЭ задач (20), (21) и (20), (22) в слабой форме:

Найти функцию $v_k(\xi) \in H^1(0, l)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(L'(\theta_k)v_k, w) = -(L(\theta_k), w), \quad \forall w \in H_\alpha^1(0, l), \quad (v, w) = \int_0^l \xi^{N-1} v(\xi) w(\xi) d\xi \quad (23)$$

и граничным условиям (21) или (22), где $\theta_k(\xi)$ – заданная функция,

$$\begin{aligned} \theta_k &\in D = \{\theta(\xi) : \theta^{\sigma+1}, d\theta^{\sigma+1}/d\xi \in L^2(0, l)\}, \\ H_\alpha^1(0, l) &= \{w : \xi^{(N-1)/2} w, \xi^{(N-1)/2} w' \in L^2(0, l), (1 - \alpha)w(l) = 0\}. \end{aligned}$$

Значение $\alpha = 0$ отвечает условию (21), а $\alpha = 1$ – условию (22).

Аппроксимация интегрального тождества (23) проводится на основе МКЭ с использованием Лагранжевых (линейных и квадратичных) конечных элементов. Так для вектора \bar{V} с компонентами значения итерационных поправок в узлах конечно-элементной сетки получена линейная система уравнений

$$A(\theta)\bar{V} = -B(\theta)\bar{\Theta} \quad (24)$$

с несимметричными ленточными матрицами A и B . Для решения системы (24) использовано LU разложение матрицы A , которое не увеличивает ее профиля.

Шаг τ_k в (19) определяется экстраполяционной формулой [23]:

$$\tau_k = \min \left(1, \tau_{k-1} \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k} \right), \quad \text{если } \delta_k < \delta_{k-1}, \quad \tau_k = \max \left(\tau_0, \tau_{k-1} \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k} \right), \quad \text{если } \delta_k \geq \delta_{k-1},$$

где $\delta_k = \max_{\eta \in \bar{\omega}_k} |B(\theta_k)\bar{\Theta}_k|$. Этот выбор τ_k при уменьшении δ_k обеспечивает стремление τ_k к 1, и скорость сходимости (18), (19) становится квадратичной.

Выбор начальных приближений обоснуется в Разделе 1.1.5. Для $\beta \leq \sigma + 1$ предложено

$$\theta_0^N(\xi) = \begin{cases} A^{(N)} \cos^2(\pi\xi/2\xi_0^{(N)}), & \xi \leq \xi_0^{(N)}, \\ 0, & \xi_0^{(N)} \leq \xi \leq l, \end{cases} \quad (25)$$

где $A^{(N)} \geq 1$ – константы. Приближения (25) основаны на известном [5] точном решении для S -режима при $N = 1$:

$$\theta(\xi) = \begin{cases} \left(\frac{2(\sigma+1)}{(\sigma+2)} \cos^2 \frac{\pi\xi}{2\xi_0^{(1)}} \right)^{\frac{1}{\sigma}}, & \xi \leq \xi_0^{(1)} = L_S^{(1)}/2 = \pi\sqrt{\sigma+1}/\sigma, \\ 0, & \xi \geq \xi_0^{(1)} \end{cases} \quad (26)$$

на полученных в [21] приближенных оценках для ξ_0 при $N = 2, 3$:

$$L_S^{(N)}/2 = \xi_0^{(N)} \approx \pi\sqrt{\sigma+1 + 1.84(N-1)\sigma/\pi}/\sigma,$$

и на установленном нами в численном эксперименте соотношении $\xi_{0,HS}^{(N)} < \xi_0^{(N)}$.

Для $\beta > \sigma + 1$ “линейные приближения” искались в виде:

$$\bar{\theta}_{0,i}(\xi) = \begin{cases} 1 + \alpha_i y(\xi), & 0 \leq \xi < \bar{\xi}_i \\ C_i \xi^{-p}, & \bar{\xi}_i \leq \xi \leq l. \end{cases} \quad (27)$$

где $y(\xi) = F(-(\beta-1)/(\beta-\sigma-1), N/2; (\beta-\sigma-1)\xi^2/4)$ – вырожденная гипергеометрическая функция. Она является решением линеаризованного относительно $\theta_H \equiv 1$ автомодельного уравнения $(\theta(\xi) = 1 + \varepsilon y(\xi), |\varepsilon y(\xi)| \ll 1)$:

$$-\xi^{1-N} (\xi^{N-1} y')' + m \xi y' - (\beta-1)y = 0. \quad (28)$$

Параметры $\bar{\xi}_i$, α_i , C_i определялись из условий $\bar{\theta}_{0,i}(\xi) \in C^2[0, l]$ (C^2 - приближения) или $\bar{\theta}_{0,i}(\xi) \in C^1[0, l]$ (C^1 - приближения). В обоих случаях

$$\alpha_i = -p/[p y(\bar{\xi}_i) + \bar{\xi}_i y'(\bar{\xi}_i)], \quad C_i = \bar{\xi}_i^{p+1} y'(\bar{\xi}_i)/[p y(\bar{\xi}_i) + \bar{\xi}_i y'(\bar{\xi}_i)]. \quad (29)$$

Для C^1 -приближений точка $\bar{\xi}_i$ является корнем уравнения $y(\xi) = 0$ (всего $K + 1$ корней), а для C^2 -приближений - корнем уравнения

$$(p + 1)y'(\xi) + \xi y''(\xi) = 0.$$

На основе изложенной методики создан комплекс программ на языке *FORTRAN*. Он дает возможность вычислять решения автомодельной задачи для всех видов режимов с обострением. В случае *LS*-режима вычисление "линейных приближений" и сшивание с асимптотикой реализовано программно, так что процесс полностью автоматизирован - задается только номер искомой с.ф.. Это сделало возможным тщательное исследование сходимости и точности численного метода (Раздел 1.1.6). Оно проводилось посредством сравнения с известным точным решением (26) *S*-режима при $N = 1$ и методом Рунге на последовательностях вложенных сеток для *HS*- и *LS*-режимов. Исследование показало: в той части области, где решение имеет необходимую гладкость, при использовании линейных элементов имеет место оптимальный порядок точности $O(h^2)$, а при использовании квадратичных элементов - сверхсходимость порядка $O(h^4)$ в узлах разбиения.

Многочисленные эксперименты, проведенные в широком диапазоне изменения значений параметров σ и β при $N = 1, 2, 3$, указывают на быструю сходимость итерационного процесса (18), (19). Замечены однако следующие особенности:

- при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ гипотеза о малых колебаниях с.ф. около гомотермического решения, на которой подход линеаризации основан, не выполняется. При $N = 2, 3$ были обнаружены с.ф., значения которых равны нулю в кольцевой области около центра симметрии. Это обусловило необходимость детального исследования случая $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$.

- при $N = 2, 3$ в сингулярной точке $\xi = 0$ порядок точности ниже ($\alpha \approx 1.7$ для линейных и $\alpha \approx 3.7$ для квадратичных элементов).

Для преодоления потери точности в окрестности $\xi = 0$ была использована модификация метода Галеркина на сингулярный случай. Она предложена и теоретически исследована для линейных сингулярных при $x = 0$ задач в работе [22] и названа несимметричным методом Галеркина. Идея несимметричного метода - применить метод Галеркина к специальной, несимметричной форме оригинальной (самосопряженной) задачи. Применительно к автомодельной задаче он изложен в Разделе 1.1.7. Вычислительная схема построена на основе альтернативной формы записи уравнения (9):

$$\tilde{L}(\theta) = -(\xi^\gamma \theta^\sigma \theta')' - \gamma(N - 2)\theta^\sigma \theta' + m\xi^{1+\gamma} \theta' + \xi^\gamma \theta(1 - \theta^{\beta-1}) = 0 \quad (30)$$

где $\gamma = 0$ при $N = 1$, $\gamma = 1$ при $N = 2, 3$. При $N = 1, 2$ она совпадает с (9).

Многочисленные эксперименты на последовательностях вложенных сеток, проведенные для *S*-, *HS*- и *LS*-режимов, $N \geq 3$, показывают оптимальный порядок точности этой вычислительной схемы вплоть до центра симметрии.

Раздел 1.2 посвящен численным методам решения параболических задач.

Основная трудность численного решения параболических задач - неограниченность решений, при этом неограниченность в изолированных точках, в конечной области или во всем пространстве. И еще связанные с ней: подвижная граница, на которой решение не во всех случаях достаточно гладкое; неустойчивость неограниченных решений.

Неограниченные решения режимов с обострением неустойчивы в том смысле, что малым возмущениям начальных данных соответствует малое (априорно неизвестное) изменение времени обострения, и следовательно - сколь угодно большие изменения в решении вблизи момента обострения. Именно для устранения проблем с неустойчивостью вблизи момента обострения введены понятия структурной устойчивости и метаустойчивости. Они отражают сущность режимов с обострением. Простые структуры устойчивы в этом смысле вплоть до момента обострения, сложные структуры вырождаются в простые вблизи момента обострения. При этом вырождение может происходить разным образом - сложная структура может выродиться в одну или несколько простых. Эта неустойчивость стохастическая.

Одна из задач этой работы - исследование структурной устойчивости и метаустойчивости различных инвариантных решений - накладывает существенные требования на методы решения параболических задач - реализовать методы, вычислительная неустойчивость которых существенно "меньше" неустойчивости решения. Как показано дальше, разработанные методы дают возможность, во-первых, вычислять автомодельные решения вплоть до момента обострения, когда максимум решения нарастает на 3-15 порядков (в зависимости от параметров задачи) с сохранением автомодельности, и во-вторых, восстанавливать время обострения T_0 , заложенное в автомодельной задаче ($T_0 = 1/(\beta - 1)$), с точностью до $10^{-5} \div 10^{-7}$. Это дает возможность прогнозировать с большой точностью возникновение критических режимов в среде.

Для преодоления указанных проблем и для удовлетворения поставленных требований, здесь использованы:

- трансформация Кирхгофа для линеаризации эллиптической части дифференциального оператора;

- МКЭ для дискретизации по пространственным переменным с интерполированием нелинейных коэффициентов по базису конечномерного пространства и концентрацией матрицы массы;

- динамические адаптивные сетки в *LS*-режиме (сгущающиеся сетки) и в *HS*-режиме (разреживающиеся сетки с сохранением числа узлов), согласованные с автомодельными (и приближенными автомодельными в полулинейном случае) законами;

- несимметричный метод Галеркина в радиально-симметричном случае при размерностях пространства $N \geq 3$;

- явный метод типа Рунге-Кутты второго порядка точности с расширенной областью устойчивости и с автоматическим выбором шага, обеспечивающим выполнение слабого принципа максимума и, в случае глобальных решений, достижение заданной точности ϵ в конце интервала интегрирования.

В разделе 1.2.1 поставлена радиально-симметричная параболическая задача:

$$u_t = \frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} u^\sigma u_r)_r + u^\beta, \quad 0 < r < R, \quad 0 < t < T_0, \quad (31)$$

$$u_r(t, 0) = 0, \quad 0 < t < T_0, \quad u(t, R) = 0, \quad 0 < t < T_0, \quad (32)$$

$$u(0, r) = u_0(r) \geq 0, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (33)$$

Величина R выбирается так, чтобы граничное условие в (32) не влияло на решение $u(t, r)$. При $\beta \geq \sigma + 1$ это возможно из-за локализации процесса, при $\beta < \sigma + 1$ величина $R = R(t)$ меняется автоматически в процессе счета.

Симметричный метод Галеркина изложен в разделе 1.2.2. Применение трансформации Кирхгофа

$$p(u) = \int_0^u w^\sigma dw = \frac{u^{\sigma+1}}{\sigma+1}, \quad (34)$$

является существенным для последующего интерполирования нелинейных коэффициентов и оптимизации процесса вычислений.

Задача (31)-(34) в слабой форме формулируется так:

Найти функцию $u(t, r) \in D$, $D = \{u : u, \partial u^{\sigma+1}/\partial r \in L_2\}$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$(u_t, v) = A(t; u, v), \quad \forall v \in H_0^1(0, R), \quad 0 < t < T_0, \quad (35)$$

начальному условию (33) и граничным условиям (32). Здесь

$$(u, v) = \int_0^R r^{N-1} u(r) v(r) dr, \quad A(t; u, v) = \int_0^R r^{N-1} \left[\frac{\partial p(u)}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + q(u) v \right] dr, \quad q(u) = u^\beta,$$

$$H_0^1(0, R) = \{v : r^{(N-1)/2} v, r^{(N-1)/2} v' \in L_2(0, R), v(R) = 0\}.$$

Для дискретизации (35), (33) использованы Лагранжевы (линейные и квадратичные) конечные элементы.

Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ - стандартный узловой базис Лагранжа пространства S_h . Интерполируем $u(t, r)$, $u_0(r)$ и нелинейные функции $p(u)$, $q(u)$ по базису S_h :

$$u_h(t, r) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \varphi_i(r), \quad u_0(r) = \sum_{i=1}^n u_0(r_i) \varphi_i(r), \quad (36)$$

$$p(u) \sim p_I = \sum_{i=1}^n p(u_i) \varphi_i(r), \quad q(u) \sim q_I = \sum_{i=1}^n q(u_i) \varphi_i(r). \quad (37)$$

Использование аппроксимаций (36), (37) и концентрация матрицы массы дают следующую систему ОДУ (записанной в нормальной форме):

$$\dot{\mathbf{u}} = -\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{p}(\mathbf{u}) + \mathbf{q}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \quad (38)$$

Здесь $\mathbf{u} = [u_1(t), \dots, u_n(t)]^T$, $\mathbf{p}(\mathbf{u}) = [p(u_1), \dots, p(u_n)]^T$, $\mathbf{q}(\mathbf{u}) = [q(u_1), \dots, q(u_n)]^T$,

$$\tilde{\mathbf{M}} = \text{diag}\{\tilde{m}_{ii}\}, \tilde{m}_{ii} = \sum_{j=1}^n m_{ij}, m_{ij} = \int_0^R r^{N-1} \varphi_i \varphi_j dr, \mathbf{K} = \{k_{ij}\}, k_{ij} = \int_0^R r^{N-1} \varphi_i' \varphi_j' dr.$$

Отметим следующие два преимущества этого подхода: матрица жесткости \mathbf{K} постоянная; матрица массы $\tilde{\mathbf{M}}$ диагональная, так что произведение $\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{K}$ имеет ту же разреженную структуру, как и матрица \mathbf{K} .

Несимметричный метод Галеркина обобщен для нелинейной параболической задачи (31)-(33) в разделе 1.2.3. После трансформации Кирхгофа (34) уравнение (31) записывается в следующей несимметричной форме:

$$r^\gamma u_t = (r^\gamma p_r)_r + \gamma(N-2)p_r + r^\gamma q(u), \quad \gamma = 0, N = 1; \quad \gamma = 1, N > 1.$$

на основе которой делается дискретизация. Применяя все следующие шаги как в симметричном методе, получаем систему ОДУ:

$$\dot{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (-\mathbf{K} \mathbf{p}(\mathbf{u}) + \gamma(N-2)\mathbf{B} \mathbf{u}) + \mathbf{q}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad (39)$$

$$m_{ij} = \int_0^R r^\gamma \varphi_i \varphi_j dr, \quad k_{ij} = \int_0^R r^\gamma \varphi_i' \varphi_j' dr, \quad \mathbf{B} = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad b_{ij} = \int_0^R r^\gamma \varphi_i' \varphi_j dr.$$

Матрица \mathbf{B} несимметричная.

Модификация явного метода Рунге-Кутты второго порядка точности с расширенной областью устойчивости, использованная для решения систем ОДУ (38) и (39), приведена в разделе 1.2.4. Реализован автоматический выбор шага так, чтобы одновременно выполнялись условия устойчивости и достижения заданной точности ϵ в конце интервала интегрирования. Для сингулярных по времени решений использован стоп-критерий $\tau < 10^{-16}$ и тогда \tilde{T}_0 - время, достигнутое в счете.

Выбор явного метода решения системы ОДУ обусловлен следующими причинами: исследование чисто неявной нелинейной разностной схемы для решения задачи (31)-(33) при $N = 1$, проведенное в [16], §5, Глава VII, показало, что ее однозначная разрешимость на временном слое накладывает зависимость между шагами по пространству и по времени такова порядка, как и условия устойчивости явной схемы;

- вблизи момента обострения, когда значения решения на временном слое различаются на несколько порядков, связывать их в системе уравнений необоснованно;
- при одинаковых ограничениях на шаги по времени, явные методы намного экономичнее неявных; они допускают и распараллеливание;
- явные методы лучше приспособлены к локальному сгущению пространственной сетки, которое абсолютно необходимо в случае обостряющихся в изолированных точках решений.

Идеология динамических адаптивных сеток, согласованных с автомодельными (и приближенными автомодельными) законами, изложена в самом общем случае в разделе 1.2.5.

Если дифференциальное уравнение $u_t = Lu$ допускает автомодельное решение $u_a(t, x) = \varphi(t)\theta(\xi)$, $\xi = x/\psi(t)$, то связь между x и ξ дает идею как адаптировать пространственную сетку. Для задачи (31)-(33) эта связь дает:

$$\xi = r\Gamma(t)^m, \quad \Delta\xi = \Delta r\Gamma(t)^m, \quad \Gamma(t) = \frac{\max_r u(t, r)}{\max_r u_0(r)}, \quad m = (\beta - \sigma - 1)/2. \quad (40)$$

На основе соотношений (40) выработана следующая стратегия адаптации. Пусть $\Delta r^{(k)}$ - шаг по пространству (длина конечного элемента) в момент времени $t = t^k$.

В LS -режиме, $m > 0$ шаг $\Delta r^{(k)}$ выбирается так, чтобы шаг $\Delta\xi^{(k)}$ был ограничен сверху: $\Delta\xi^{(k)} = \Delta r^{(k)}\Gamma(t)^m \leq \lambda h_0$. Когда условие нарушается, делается следующее:

– каждый элемент делится пополам и значения решения в новых точках находятся линейной или квадратичной интерполяцией по старым значениям;

– чтобы не увеличивать излишне число точек, сгущение сетки делается только в той части области, где решение меняется; точки сетки, где оно уже установилось с заданной точностью δ_u (в расчетах обычно $\delta_u = 10^{-7}$), отбрасываются.

Отметим особо, что условие для $\Delta\xi^{(k)}$ проверяется на каждом временном шаге, но сетка сгущается только тогда, когда оно нарушается. Тогда производится и проверка для отбрасывания точек сетки из-за установления решения.

В *HS*-режиме, $m < 0$ шаг $\Delta r^{(k)}$ выбирается так, чтобы шаг $\Delta\xi^{(k)}$ был ограничен снизу: $h_0/\lambda \leq \Delta\xi^{(k)} = \Delta r^{(k)}\Gamma(t)^m$. Когда условие нарушается, делается следующее:

- точки сетки, начиная с второй, отбрасываются через одну;
- длина $R(t)$ интервала интегрирования увеличивается вдвое добавлением новых элементов: $R(t^k) = 2R(t^{k-1})$. Адаптация сетки в этом случае производится с сохранением числа элементов.

Эта идея – вложение структурных свойств (геометрии, разных видов симметрий, законов сохранения) непрерывных задач при разработке дискретных методов – лежит в основе нового важного направления в вычислительной математике – геометрическое интегрирование, которому посвящено много работ и монографий (см. например [25],[26]). Достоинство предложенного подхода по сравнению с применяемыми обычно методами подвижных сеток [26] в том, что для сетки здесь не решается дополнительная дифференциальная задача.

На основе изложенного метода создан комплекс программ на языке *FORTRAN* для решения задачи (31)-(33) на множестве всех допустимых физических параметров. Создана также компьютерная система для визуализации особенностей нелинейных процессов. Комплекс программ и система визуализации используются в процессе обучения по курсам “Нелинейные математические модели” и “Математические модели и вычислительный эксперимент” в ФМИ Софийского университета.

В разделе 1.2.6 приведены результаты численного исследования сходимости и точности метода решения задачи (31)-(33) как с автомодельными, так и с неавтомодельными начальными данными.

Пример 1. Это случай $\beta = \sigma + 1$, $N = 1$, когда известно точное решение (с.ф.) (26) автомодельной задачи. Оно использовано в качестве начальных данных для параболической задачи при разных вычислительных параметрах и анализировались его автомодельные представления. Как было сказано, для обостряющихся решений сходимость и оценка ошибки в автомодельной норме имеет смысл вплоть до момента обострения. Зависимость этой ошибки от дискретизации по пространству и по времени показана в Таблице 1. Там содержатся также: вычисленное время обострения T_0 , число шагов по времени, максимум решения за это время, и относительные ошибки $e(t, \xi) = |\Theta(t, \xi) - \theta(\xi)|/\max_{\xi} \theta(\xi)$ автомодельных представлений решения $u_{a,h}(t, r)$ для $t = T_0$ в трех точках по r . Как показывают эти и все проведенные эксперименты, восстановление (в процессе решения параболической задачи) времени обострения, заложенном в автомодельной задаче, как и сохранение автомодельности, зависят больше всего от дискретизации по пространству.

Табл. 1. *S*-режим: $\sigma = 2, \beta = 3, N = 1, T_0 = 0.5$

h	ϵ	T_0	$NSTEP$	$u(T_0, 0)$	$e(T_0, 1.8)$	$e(T_0, 2.7)$	$e(T_0, 2.8)$
0.1	10^{-2}	0.507910	1262	0.13E+8	0.11E - 2	0.33E - 2	0.18E - 3
0.05	10^{-2}	0.507077	5266	0.62E+7	0.28E - 3	0.44E - 3	0.11E - 7
0.05	10^{-4}	0.499976	5870	0.54E+7	0.28E - 3	0.44E - 3	0.11E - 7
0.05	10^{-6}	0.499958	9057	0.50E+7	0.28E - 3	0.44E - 3	0.11E - 7
0.025	10^{-4}	0.499998	21737	0.31E+7	0.70E - 4	0.11E - 3	0.0

Пример 2. В Таблице 2 показаны некоторые результаты численного исследования эволюции второй с.ф. $\theta_2(\xi)$ при $\sigma = 2, \beta = 3.25, N = 2, T_0 = 1/(\beta - 1) = 0.4$. Они показывают, что и для немонотонных с.ф. при уменьшении шага h время t_a , до которого автомодельность сохраняется, увеличивается.

Табл. 2 *LS*-режим, $\theta_2(\xi)$: $\sigma = 2, \beta = 3.25, N = 2, T_0 = 0.4$

h	T_0	$u_{a,m}$	t_a	t_a/T_0
0.25	0.4421401	10	0.4414948	99.85405%
0.125	0.4438751	10^2	0.4438662	99.99799%
0.0625	0.4443102	10^3	0.4443100	99.99996%
0.03125	0.4444104	2×10^4	0.4444104	99.99999%

Глава 2 посвящена исследованию автомодельных решений и их структурной устойчивости в радиально-симметричном случае.

В разделе 2.1 проведено исследование “линейных приближений” к собственным функциям при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$. Получены асимптотики решений

$$y_N(\xi) = F(-a, N/2, (\beta - \sigma - 1)\xi^2/4), \quad a = (\beta - 1)/(\beta - \sigma - 1)$$

линеаризованного уравнения (28) (N – размерность пространства):

$$Y_1(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} y_1(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} F\left(-a, \frac{1}{2}; \frac{1}{a} \frac{\beta - 1}{4} \xi^2\right) = \cos(\sqrt{\sigma}\xi)$$

$$Y_2(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} y_2(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} F\left(-a, 1.0; \frac{1}{a} \frac{\beta - 1}{4} \xi^2\right) = J_0(\sqrt{\sigma}\xi)$$

$$Y_3(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} y_3(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} F\left(-a, \frac{3}{2}; \frac{1}{a} \frac{\beta - 1}{4} \xi^2\right) = \frac{\sin(\sqrt{\sigma}\xi)}{\sqrt{\sigma}\xi}$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя. Отсюда для расстояний между C^1 -точками сшивания ξ_i (27) (а в пределе $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ и между C^2 -точками сшивания) получено

$$\xi_{i+1} - \xi_i \rightarrow \pi/\sqrt{\sigma}, \quad \beta \rightarrow \sigma + 1 + 0.$$

Исследовано также поведение точек пересечения с.ф. θ_i с пространственно-однородным решением $\theta(\xi) \equiv 1$ и поведение констант α_i в (27),(29) при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$. На основе результатов даны рекомендации по использованию “линейных приближений”.

В разделе 2.2 исследована и уточнена структура с.ф. *LS*-режима при переходе к *S*-режиму.

1. Показано, что структура с.ф. при $N > 1$ и $\beta \sim \sigma + 1, \beta > \sigma + 1$ существенно отличается от структуры с.ф. при $N = 1$. При $N = 1$ максимумы с.ф. увеличиваются с удалением от центра симметрии [20], а при $N > 1$ вычислительным экспериментом было обнаружено, что при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ первый, центральный максимум с.ф. становится больше других (такие с.ф. были названы потом [12] с.ф. “с перетяжкой”).

2. Различен и переход LS -режима к S -режиму. При $N = 1$ переход $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ "непрерывен" – с.ф. $\theta_k(\xi)$ LS -режима стремится к с.ф. S -режима, составленной из k элементарных решений (26) (Рис. 1а). При $N > 1$ такого "непрерывного" перехода нет.

2.1. Для фиксированного σ и некоторого $\beta_j^* = \beta_j^*(\sigma, N)$ центральный (первый) минимум с.ф. с четными номерами $\theta_{2j}^{(N)}$, $j = 1, 2, \dots$, становится равным нулю и для $\beta < \beta_j^*(\sigma, N)$ все с.ф. $\theta_{2j}^{(N)}(\xi)$ аннулируются в некоторой области около начала координат (Рис. 1б):

$$\theta_{2j}^{(N)}(\xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_j^* = \xi_j^*(\sigma, \beta, N), \quad j = 1, 2, \dots; \quad (\theta_{2j}^{(N)})'(\xi_j^*) = 0,$$

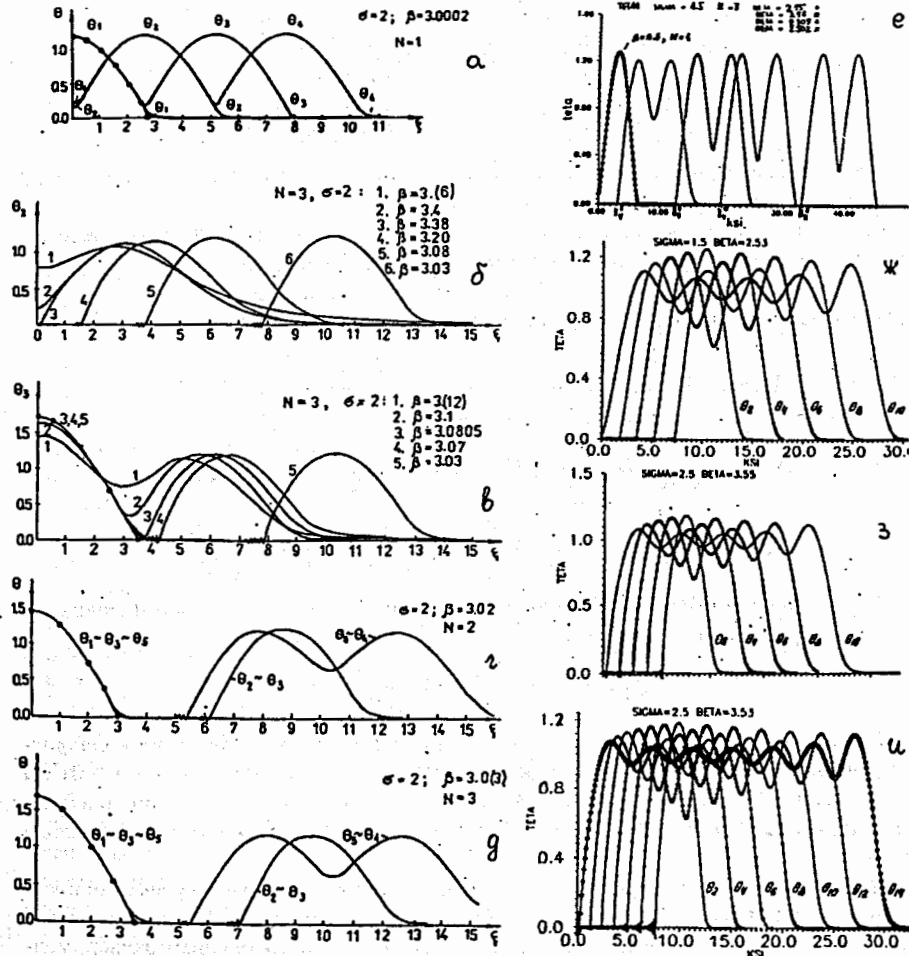


Рис. 1. Поведение с.ф. при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$

при этом ξ_j^* растут при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$. Все максимумы $\theta_{2j}^{(N)}(\xi)$ стремятся к максимуму с.ф. S -режима при тем же σ и $N = 1$. Таким образом с.ф. $\theta_{2j}^{(N)}(\xi)$, "уходя на бесконечность" при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$, стремится к с.ф. S -режима при $N = 1$ и того же σ , состоящей из j элементарных решений (26) (Рис. 1е).

2.2. Для фиксированного σ существует такое значение $\beta_j^{**} = \beta_j^{**}(\sigma, N)$, что при $\sigma + 1 < \beta < \beta_j^{**}$ с.ф. $\theta_{2j+1}^{(N)}(\xi)$, $j = 1, 2, \dots$ распадается на две части: центральная, которая стремится к с.ф. S -режима для соответствующего значения N ($\theta^{(N)}(\xi)$), и вторая, которая совпадает с с.ф. $\theta_{2j}^{(N)}(\xi)$, "уходящей на бесконечность" при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$. Для фиксированных σ, N всегда $\beta_j^{**} < \beta_j^*$ (Рис. 1в-1д).

Согласно описанному "сценарию" перехода LS - к S -режиму, при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ остается только первая с.ф. LS -режима, которая стремится к единственной с.ф. S -режима. Этот "сценарий" является результатом детального вычислительного эксперимента.

Так в процессе этого исследования найдены с.ф. новой структуры – с.ф. "с перетяжкой" и с.ф. с левым фронтом.

Существование с.ф. с левым фронтом было подтверждено асимптотическим анализом – получена асимптотика с.ф. в окрестности левого фронта $\xi \rightarrow \xi^* + 0$:

$$\theta(\xi) \sim C(\xi - \xi^*)^\alpha, \quad \alpha = 1/\sigma, \quad C = ((\beta - \sigma - 1)\sigma\xi^*/2)^{1/\sigma}.$$

3. Собственные функции с левым фронтом представляют собой тела вращения с "пустотой" в центре. Численные эксперименты показывают, что при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ радиусы "пустот" увеличиваются и четные с.ф. $\theta_{2j}^{(N)}$, $j = 1, 2, \dots$ "выстраиваются" так, что разности этих радиусов стремятся к одной и той же величине. Гипотеза автора о ней: $\rho = \rho(\sigma) = 2\sqrt{\sigma + 1}/\sigma = L_S/\pi$ (Рис. 1ж – 1и).

Полученные новые типы решений инициировали исследования других авторов [12]-[14] другими методами (методом динамической аналогии, бифуркационным анализом). Их исследования подтвердили существование этих новых решений, и в частности [14] описанного выше сценария.

В разделе 2.2.3 исследован аналитически предельный случай $\sigma \rightarrow 0$, $\beta = \sigma + 1$. Показано, что при $\sigma \rightarrow 0+$ автомодельное решение S -режима стремится к автомодельному решению с конечной энергией соответствующего линейного уравнения $u_t = u_{xx} + u$, $x \in \mathbb{R}_+$, $t > 0$.

В разделе 2.3 исследовано существование с.ф. и структурная устойчивость а.р. LS -режима при переходе параметра β через некоторые пороговые значения, получившие название "критические экспоненты" (см. [27] и ссылки там), когда свойства решений как автомодельной, так и параболической задачи, меняются существенно. До сих пор обнаружены следующие критические экспоненты:

$$\begin{aligned} \beta_f &= \sigma + 1 + 2/N \quad (\text{экспонента Фуджиты}); \\ \beta_s &= (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2), \quad N \geq 3 \quad (\text{экспонента Соболева}); \\ \beta_u &= (\sigma + 1)(1 + 4/(N - 4 - 2\sqrt{N - 1})), \quad N \geq 11; \quad \beta_u = \infty, \quad N < 11; \end{aligned}$$

$$\beta_p = 1 + \frac{3(\sigma + 1) + (\sigma^2(N - 10)^2 + 2\sigma(5\sigma + 1)(N - 10) + 9(\sigma + 1)^2)^{1/2}}{N - 10}, \quad N \geq 11.$$

В разделе 2.3.1 исследована структурная устойчивость неограниченных решений с конечной энергией для параметров $\beta > \beta_f = \sigma + 1 + 2/N$, когда автомодельное

решение (5) $u_a(t, \tau) \notin L_1(\mathbb{R}^N)$. В этом случае качественная теория нестационарно осреднения "амплитуда - полуширина" предсказывает автомодельное поведение амплитуды решения задачи (31)-(33) и возможное неавтомодельное поведение полуширины [16]. Там был поставлен вопрос: какое инвариантное или ПАР описывает асимптотическую ($t \rightarrow T_0^-$) стадию процесса? Численное исследование стало возможным благодаря адаптации сетки. Показано, что а.р. (5), соответствующее $\theta_1(\xi)$, структурно устойчиво: во всех экспериментах с финитными начальными данными, обеспечивающими неограниченность решений, на асимптотической стадии они стремятся к автомодельному.

В разделе 2.3.2 конструированы численно решения а.з. при соотношениях параметров за критическими экспонентами, $\beta \geq \beta_s, N \geq 3; \beta \geq \beta_u, N \geq 11; \beta > \beta_p, N \geq 11$. Таким образом конструктивно установлено существование решений а.з. при $\beta \geq \beta_u, N \geq 11$, что является открытой проблемой [27]. Показано тоже, что соответствующие им автомодельные решения структурно устойчивые, что подтверждает гипотезу из [27].

В разделе 2.4 разработанные для радиально-симметричных задач (9), (16), (17) и (31)-(33) методы обобщены на случай системы нелинейных уравнений с источниками, которая описывает процессы теплопроводности и горения двухкомпонентной среды:

$$\begin{cases} u_{1t} = x^{1-N}(x^{N-1}u_{1x})_x + u_1^{\beta_1}u_2^{\gamma_2}, & x \in R_+^1, N = 1, 2, 3, \\ u_{2t} = x^{1-N}(x^{N-1}u_{2x})_x + u_1^{\gamma_1}u_2^{\beta_2}, & \sigma_i > 0, \beta_i > 1, \gamma_i \geq 0, i = 1, 2. \end{cases} \quad (41)$$

Система допускает неограниченные автомодельные решения $u_a = (u_{1a}, u_{2a})$

$$u_{1a} = g_1(t)\theta_1(\xi) = (1 - t/T_0)^{m_1}\theta_1(\xi), \quad \xi = x/(1 - t/T_0)^n, \quad (42)$$

$$u_{2a} = g_2(t)\theta_2(\xi) = (1 - t/T_0)^{m_2}\theta_2(\xi), \quad m_i < 0, i = 1, 2,$$

$$m_i = \alpha_i/p, \quad \alpha_i = \gamma_i + 1 - \beta_i, \quad i = 1, 2, \quad p = (\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) - \gamma_1\gamma_2,$$

$$n = (m_1\sigma_1 + 1)/2 = (m_2\sigma_2 + 1)/2, \quad \sigma_1(\gamma_2 + 1 - \beta_2) = \sigma_2(\gamma_1 + 1 - \beta_1), \quad 0 < Nn < -m_i, \quad i = 1, 2.$$

Функции $\theta_1(\xi), \theta_2(\xi)$ удовлетворяют системе автомодельных уравнений

$$\begin{cases} L_1(\theta_1, \theta_2) \equiv -\xi^{1-N}(\xi^{N-1}\theta_1^{\sigma_1}\theta_1')' + n\xi\theta_1' - m_1\theta_1 - \theta_1^{\beta_1}\theta_2^{\gamma_2} = 0, \\ L_2(\theta_1, \theta_2) \equiv -\xi^{1-N}(\xi^{N-1}\theta_2^{\sigma_2}\theta_2')' + n\xi\theta_2' - m_2\theta_2 - \theta_1^{\gamma_1}\theta_2^{\beta_2} = 0 \end{cases} \quad (43)$$

и краевым условиям

$$f_i'(\xi) = (m_i/n)(f_i(\xi)/\xi), \quad \xi = l \gg 1, \quad i = 1, 2 \quad (44)$$

В уравнениях (43) без ограничения общности положено $T_0 = 1$. Поведение автомодельных решений при $t \rightarrow T_0$ зависит от знака параметра n : $n < 0$ - HS режим с обострением; $n = 0$ - S режим с обострением; $n > 0$ - LS режим с обострением.

Системы (41) и (43) называются системами с сильной обратной связью, если $p < 0$, и системами с слабой обратной связью, если $p > 0$.

В случае $N = 1$ автомодельное решение (42) и задача (43), (44) рассматривались в работах Курдюмова С.П., Куркиной Е.С., Малинецкого Г.Г. и Тельковской О.В.. При

численном построении с.ф. для конкретных параметров использованы разностные методы и метод стрельбы.

Для построения с.ф. и детального исследования структурной устойчивости автомодельных решений при $N = 1, 2, 3$ здесь использованы обобщения методов, изложенных в Главе 1. Сформулируем основные результаты:

- структурно устойчивыми являются только а.р. с двумя компонентами простой структуры систем с сильной обратной связью;
- все другие а.р. метаустойчивы.

Таким образом показана принципиальная возможность применения разработанных методов для исследования процессов самоорганизации в широких классах нелинейных диссипативных сред, описываемых системами типа реакция-диффузия.

В Главе 3 исследуется асимптотическое поведение сингулярных по времени решений трех классов полулинейных параболических уравнений с источниками

$$u_t = r^{1-N}(r^{N-1}u_r)_r + Q(u), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad t > 0, \quad N = 1, 2, 3 \quad (45)$$

$$Q(u) = (1+u)\ln^\beta(1+u), \quad \beta > 1, \quad Q(u) = u^\beta, \quad \beta > 1, \quad Q(u) = e^u.$$

Условия существования неограниченных решений таких уравнений изучаются с 1966 г. и этой проблеме посвящено большое количество работ (см. обзор в книге [28]). Случай полулинейных уравнений, где из-за недостаточности диффузии не возникает сложных структур, оказался более трудным для исследования, чем квазилинейный случай. Причина этому - несуществование точных инвариантных решений N пространства. В этих случаях асимптотическое поведение неограниченных решений описывается приближенными автомодельными решениями (ПАР), которые являются точными а.р. других уравнений - уравнений типа Гамильтона-Якоби. Это означает, что на асимптотической стадии, при $t \rightarrow T_0^-$, параболическое уравнение вырождается в уравнение первого порядка. Строгие результаты о вырождении на асимптотической стадии уравнения (45) получены в основном для $N = 1$ и при ограничениях на начальные возмущения. Поэтому численное исследование, особенно при $N > 1$, является актуальной задачей.

В разделе 3.1 исследуется уравнение с источником $Q(u) = (1+u)\ln^\beta(1+u)$, которое не имеет нетривиальных инвариантных решений с обострением [16,17]. Это единственное полулинейное уравнение, для которого до сих пор найдены аналоги трех режимов с обострением: HS-режим: $1 < \beta < 2$; S-режим: $\beta = 2$; LS-режим: $\beta > 2$. В начале [16] качественными методами было показано, что асимптотическое поведение его неограниченных решений описывается автомодельными решениями

$$v(t, r) = \exp\{(T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}\theta(\xi)\} - 1, \quad \xi = r(T_0 - t)^{-m/(\beta-1)}, \quad m = (\beta - 2)/2, \quad (46)$$

$$(\theta')^2 - \frac{m}{\beta-1}\theta'\xi - \frac{1}{\beta-1}\theta + \theta^\beta = 0, \quad \theta(\xi) = \cos^2(\xi/2), \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \quad \text{при } \beta = 2 \quad (47)$$

уравнения первого порядка типа Гамильтона-Якоби $v_t = v_r^2/(1+v) + (1+v)\ln^\beta(1+v)$.

Уже имеются строгие результаты [29] об асимптотической устойчивости ПАР (46). При достаточно ограничительных предположениях [29] на начальное возмущение доказано, что при $\beta = 2, N = 1$ область эффективной локализации $L_{SL} = [-\pi, \pi]$. Для $\beta = 2$ и $N > 1$ нет такого точного результата - доказано только, что решение

растет неограниченно в сфере $B \supseteq \{r \leq \pi\}$. Нами показана численно (раздел 3.1.3) структурная устойчивость ПАР (46) при практически произвольных начальных данных во всех трех режимах. В S -режиме ($\beta = 2$) все численные эксперименты подтверждают сходимость автомодельных представлений к точному решению (47) для произвольных начальных данных при $N = 1$ и для достаточно больших при $N = 2, 3$ (чтобы обеспечить неограниченность решения, см. [16]). Показано также, что при $\beta = 2$, $N > 1$ неограниченное решение эффективно локализовано в сфере радиуса π : $\omega_L = \{r \leq \pi\}$. Кроме того показано: если начальное возмущение нецентрально, достаточно далеко от центра симметрии и с достаточно большой энергией, то тепловая энергия не распыляется и горение локализовано эффективно в кольцевой области толщиной 2π , что является новым результатом (Рис. 2).

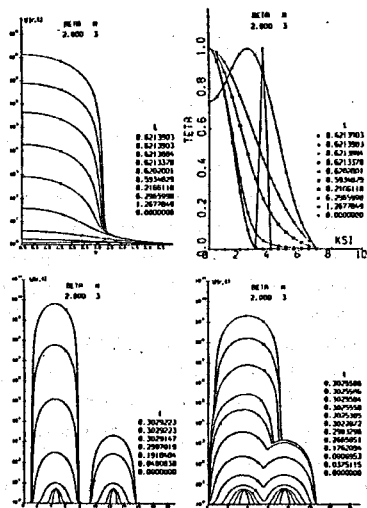


Рис. 2. $\beta = 2$, $N = 3$

Качественный анализ [16] показал, что пространственно-временная структура $u(t, x)$ при $t \rightarrow T_0^-$ описывается ПАР

$$u_a^*(t, r) = (T_0 - t)^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta^*(\eta), \quad \eta = \frac{r}{\sqrt{(T_0 - t)|\ln(T_0 - t)|}}, \quad (48)$$

$$\theta^*(\eta) = \{\beta - 1 + ((\beta - 1)\eta)^2 / (4\beta)\}^{-\frac{1}{\beta-1}} \quad (49)$$

которое является точным а.р. уравнения $v_t + xv_x \{2(T_0 - t)|\ln(T_0 - t)|\}^{-1} = v^\beta$.

Строгое доказательство этого результата дано в [30] для $N = 1$ и при ограничениях на начальные данные. Для $N > 1$ строгого доказательства нет. Численным экспериментом нами показана структурная устойчивость ПАР (48), (49) для $N = 1, 2, 3$ при практически произвольных начальных данных.

В разделе 3.3 исследовано асимптотическое поведение решений уравнения с источником $Q(u) = e^u$ (модель воспламенения твердого горючего). Задача Коши имеет

Методом конечных элементов с концентрацией матрицы массы, интерполированием нелинейных коэффициентов и динамической адаптацией сетки решались численно как оригинальная задача (для переменной u), так и трансформированная, для $U(t, r) = \ln(1 + u(t, r))$ (раздел 3.1.2).

В разделе 3.2 исследовано асимптотическое поведение решений уравнения с источником $Q(u) = u^\beta$. При $1 < \beta \leq 1 + 2/N$, $u_0 \neq 0$, задача Коши имеет только неограниченные решения, но их асимптотика существенно отличается от той, которую следует ожидать по аналогии с квазилинейным случаем. Автомодельная задача, которая получается по этой аналогии, не имеет решения при $1 < \beta \leq \beta_* = (N + 2)/(N - 2)_+$.

В разделе 3.3 исследовано асимптотическое поведение уравнения с источником $Q(u) = e^u$ (модель воспламенения твердого горючего). Задача Коши имеет только неограниченные решения, но уравнение (45) при $N = 1, 2$ не имеет точных инвариантных неограниченных решений, кроме гомотермического $u_H = -\ln(T_0 - t)$. Качественный анализ [16] показал, что асимптотическое поведение неограниченных решений описывается ПАР

$$u_a^*(t, r) = -\ln(T_0 - t) + \theta^*(\eta), \quad \eta = \frac{r}{\sqrt{(T_0 - t)|\ln(T_0 - t)|}}, \quad \theta^*(\eta) = \ln\left(1 + \frac{\eta^2}{4}\right)^{-1} \quad (50)$$

которое является точным а.р. уравнения $v_t + xv_x \{2(T_0 - t)|\ln(T_0 - t)|\}^{-1} = e^v$.

Строгое доказательство для $N = 1$ и при ограничениях на начальные данные дано в [30]; для $N = 2$ нет строгого доказательства. Численным экспериментом нами показана структурная устойчивость ПАР (50) для $N = 1, 2$ при практически произвольных начальных данных.

Отметим, что ПАР (48), (50) существенно отличаются от а.р., рассматриваемых до сих пор. Это отличие, во-первых, в зависимости автомодельной переменной η от произведения $(T_0 - t)|\ln(T_0 - t)|$, и, во-вторых, в структуре ПАР (50), которое является суммой гомотермического решения и функции $\theta^*(\eta)$. Разработанные численные методы (отметим особо адаптацию сетки, согласованную с ПАР) работают достаточно хорошо и при наличии этих особенностей и дают возможность установить структурную устойчивость ПАР (48), (50) на достаточно больших компактах $|\eta| \leq \eta^*$

Глава 4 посвящена исследованию новых способов организации в двумерной нелинейной теплопроводной среде.

В разделе 4.1 построены численно инвариантные решения, которые описывают направленное распространение тепла и горения в нелинейной анизотропной среде со степенными коэффициентами теплопроводности

$$u_t = (u^{\sigma_1} u_{x_1})_{x_1} + (u^{\sigma_2} u_{x_2})_{x_2} + u^\beta, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 > 0, \quad \beta > 1. \quad (51)$$

В работе [31], (см. тоже [17]) методами группового анализа установлено, что уравнение (51) допускает неограниченное инвариантное решение

$$u_a(t, x_1, x_2) = (1 - t/T_0)^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \xi_i = x_i(1 - t/T_0)^{-m_i/(\beta-1)}$$

$m_i = (\beta - \sigma_i - 1)/2$, $i = 1, 2$. Функция $\theta(\xi)$ удовлетворяет нелинейному эллиптическому уравнению (в нем положено $T_0 = 1/(\beta - 1)$):

$$L(\theta) \equiv \sum_{i=1}^2 \left(-\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\theta^{\sigma_i} \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \right) + \frac{\beta - \sigma_i - 1}{2} \xi_i \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \right) + \theta - \theta^\beta = 0. \quad (52)$$

Характер распространения тепла определяется соотношением между величинами β , $(\sigma_1 + 1)$, $(\sigma_2 + 1)$. По аналогии с радиально-симметричным случаем в каждом направлении ξ_i рассматриваем три типа соотношений:

$1 < \beta < \sigma_i + 1$ - HS -режим с обострением;

$1 < \beta = \sigma_i + 1$ - S -режим с обострением;

$\sigma_i + 1 < \beta$ - LS -режим с обострением.

В разделе 4.1.1 поставлена краевая задача для уравнения (52), приведена итерационная схема на основе НАМН и konstruированы начальные приближения.

Для $LS-S-$ ($LS-HS-$) режимов использовались начальные приближения

$$\tilde{\theta}_i(\xi_1, \xi_2) = \theta_{i,0}^{(1)}(\xi_1)\theta_0(\xi_2), \quad i = 1, 2, \dots, k_1,$$

которые являются произведением одномерных приближений (27) для $LS-$ и (25) для $S-$ ($HS-$) режимов.

Метод решения параболической задачи обсуждается в разделе 4.1.2. И здесь основной момент при реализации МКЭ - это трансформации Кирхгофа:

$$p_\alpha(u) = \int_0^u \lambda_\alpha(\omega) d\omega, \quad \lambda_\alpha(\omega) = \omega^{\sigma_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Они, вместе с последующей интерполяцией нелинейных функций $p_\alpha(u)$ и $q(u) = u^\beta$ позволяют перенести нелинейность задачи на векторы $\bar{p}_\alpha(\bar{U})$ и $\bar{q}(\bar{U})$ в системе ОДУ

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \bar{M}^{-1} \{K_1 \bar{p}_1(\bar{U}) + K_2 \bar{p}_2(\bar{U})\} + \bar{q}(\bar{U}), \quad \bar{U}(0) = \bar{U}_0 \quad (53)$$

относительно $\bar{U}(t) = \{U_1(t), \dots, U_n(t)\}^T$, что очень важно для эффективности метода в двумерном случае.

Метод реализован в виде комплекса программ, который представляет собой развитие Пакета прикладных программ TERMO для решения тепловых задач методом конечных элементов, созданного в ИМИ БАН и предназначенного для решения двумерных стационарных и нестационарных задач теплопроводности (электро- и магнитостатики, диффузии, фильтрации) для кусочно-неоднородных сред.

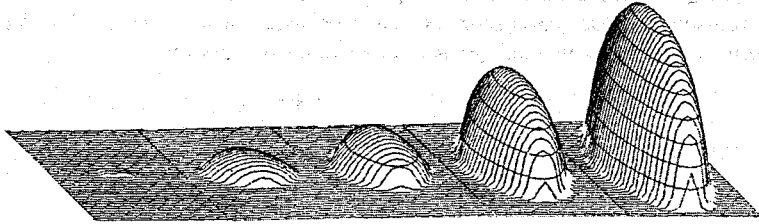


Рис. 3. $HS-S-$ режим: $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2, \beta = 3$.

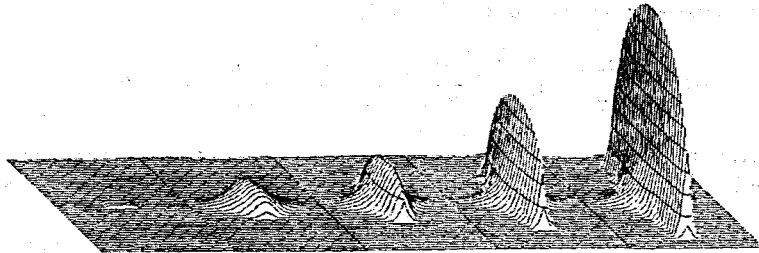


Рис. 4. $HS-LS-$ режим: $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 1, \beta = 3$.

В разделе 4.1.3 приведены три типа решений, отвечающие одним и тем же начальным данным:

$$u(0, x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in \Omega_1 \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_1 \end{cases}, \quad \Omega_1 = \{0 \leq x_1 \leq b_1, 0 \leq x_2 \leq b_2\}.$$

$HS-S-$ режим: $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2, \beta = \sigma_2 + 1 = 3$ (Рис. 3). По направлению x_1 тепловой фронт за конечное время T_0 достигает бесконечности ($S-$ режим), а в направлении x_2 тепло распространяется лишь до некоторой глубины L_S , после чего происходит остановка фронта ($S-$ режим). Носитель решения представляет выпуклую область.

$HS-LS-$ режим: $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 1, \beta = 3$ (Рис. 4). По направлению x_1 тепловой фронт за конечное время T_0 достигает бесконечности ($S-$ режим), а в направлении x_2 происходит сокращение эффективной глубины прогрева ($LS-$ режим). На финальной стадии решение представляет собой бесконечно прогретую линию, вне которой температура конечна.

Для сравнения там приведен также $S-$ режим: $\sigma_1 = \sigma_2 = \beta - 1 = 2$.

В разделе 4.2 исследуются автомодельные решения двумерной модели тепловых структур в полярных координатах:

$$u_t = \frac{1}{r}(ru^\sigma u_r)_r + \frac{1}{r^2}(u^\sigma u_\varphi)_\varphi + u^\beta, \quad t > 0, 0 < r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (54)$$

Методом инвариантно-группового анализа С.Р. Свирщевским было установлено, (см. тоже [17]), что оно допускает инвариантные решения следующего вида:

$$u_\alpha(t, r, \varphi) = (1 - \frac{t}{T_0})^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta(\xi, \phi), \quad \xi = r(1 - \frac{t}{T_0})^{\frac{m}{\beta-1}}, \quad \phi = \varphi + \frac{C_0}{\beta-1} \ln(1 - \frac{t}{T_0}), \quad (55)$$

Здесь C_0 - параметр семейства решений. Функция $\theta(\xi, \phi) \geq 0$ удовлетворяет нелинейному эллиптическому уравнению (как и раньше, положено $T_0 = 1/(\beta - 1)$):

$$L(\theta) \equiv -\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \xi}) - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \phi} (\theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \phi}) + m \xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - C_0 \frac{\partial \theta}{\partial \phi} + \theta - \theta^\beta = 0. \quad (56)$$

Из (55) при $C_0 \neq 0$ непосредственно следует

$$\xi e^{s\phi} = r e^{s\varphi} = \text{const}, \quad s = (\beta - \sigma - 1)/2C_0 = m/C_0. \quad (57)$$

Это означает, что траектории неоднородностей в среде (например, локальных максимумов) будут логарифмическими спиралями при $\beta \neq \sigma + 1$ или окружностями при $\beta = \sigma + 1$. Направление движения для фиксированного C_0 , например $C_0 > 0$, зависит от соотношения σ и β : при $\beta > \sigma + 1$ - к центру (скручивающиеся спирали), при $\beta < \sigma + 1$ - от центра (раскручивающиеся спирали).

Случай $C_0 = 0$ рассматривался в работах [32],[33]. Там впервые konstruированы радиально-несимметричные с.ф. горения среды в $LS-$ режиме. В $HS-$ режиме до сих пор были получены только радиально-симметричные с.ф.. Причина этому - решения автомодельной задачи всегда искались при условии

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \theta(\xi, \phi) = \theta_H^0 \equiv 0.$$

Изменение идеологии – искать решения а.з., которые на бесконечности стремятся не к тривиальному решению $\theta \equiv 0$, а к гомотермическому $\theta \equiv \theta_H \equiv 1$:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \theta(\xi, \phi) = \theta_H \equiv 1.$$

дало возможность получить два новых класса с.ф. в *HS*-режиме – радиально-несимметричные с.ф. сложной симметрии при $C_0 = 0$ и спиральные с.ф. при $C_0 \neq 0$. Изменение идеологии было подсказано в процессе тщательного исследования (аналитического и численного) решений линеаризованного относительно $\theta_H \equiv 1$ автомодельного уравнения и их эволюции во времени.

Раздел 4.2.1 посвящен радиально-несимметричным с.ф. в *LS*-режиме при $C_0 = 0$. На основе метода линеаризации и сшивания с асимптотикой в работах [32],[33] предложен эффективный способ определения начальных приближений (*EiMm*) для решения автомодельной задачи итерационным методом. Проведенные там эксперименты показали: структура с.ф. не всегда следует структуре начальных приближений; итерационный процесс сходится не при всех начальных приближениях. Там был поставлен вопрос о создании более эффективного итерационного метода и это обусловило наше исследование.

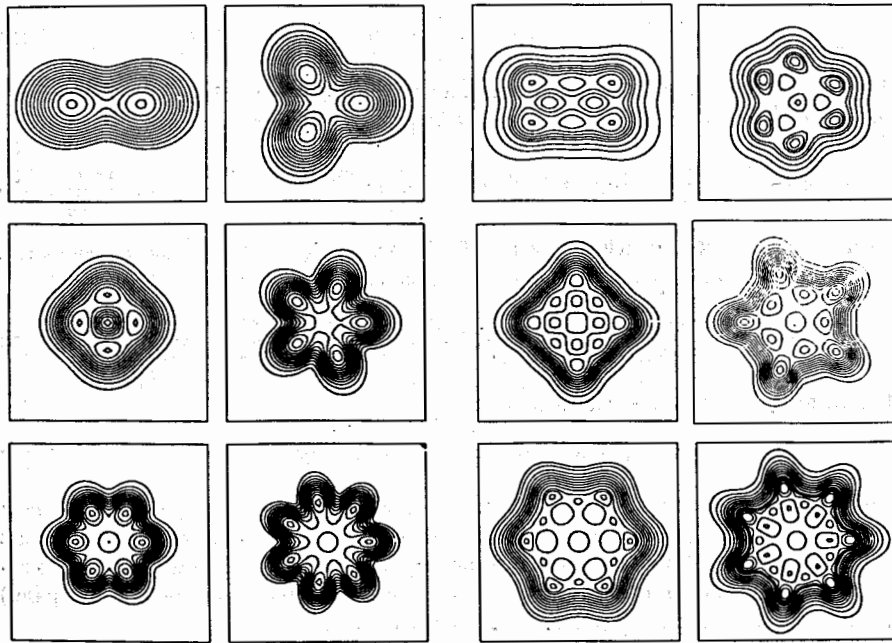


Рис. 5. $\sigma = 2$, $\beta = 3.25$: слева: $E1Mm$, $m = 2, \dots, 7$; справа: $E2Mm$, $m = 2, \dots, 7$

Используя обобщенные на случай полярных координат методы из Раздела 4.1 и способ получения линейных приближений из [33], нами были сконструированы

с.ф. для разных значений параметров σ и β и разной степени симметрии. В некоторых случаях однако итерационный процесс сходился к радиально-симметричным с.ф. Впоследствии в диссертации М. Колевой были предложены и реализованы начальные приближения, число и поведение которых в области немонотонности тоже самое, как у предложенных в [33], но различающиеся от них процедурой сшивания с асимптотикой – сшивание проводилось по окружности, а не по лучам. С их помощью удалось получить радиально-несимметричные с.ф. в тех случаях, когда прежними приближениями это не удавалось. На Рис. 5 слева показаны изолинии с.ф. $E1Mm$ для $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, а справа – изолинии с.ф. $E2Mm$, $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ для значений параметров $\sigma = 2$, $\beta = 3.25$.

Отметим следующее:

– как и в работе [33], при $m > 1$ наблюдалось раздвоение некоторых максимумов начальных приближений, при этом для данного значения m оно происходило для двух видов начальных приближений (на Рис. 5. это $E2M2$ и $E2M3$);

– при одном и том же наборе параметров нам удалось получить большее количество с.ф., чем в работе [33].

– исследование эволюции во времени радиально-несимметричных с.ф. *LS*-режима показало, что соответствующие им автомодельные решения **метаустойчивые**. Они сохраняют свою структуру (в смысле (15)) до времени T , очень близкое к времени обострения T_0 . После этого сложная тепловая структура вырождается в одну или несколько простых структур, соответствующих самой простой (в общем случае радиально-симметричной) с.ф. с теми же параметрами σ, β .

Разделы 4.2.2-4.2.7 посвящены конструированию радиально-несимметричных с.ф. в *HS*-режиме.

Задача о численной реализации “спиральных” инвариантных решений была поставлена в 1984 г. Как отмечалось в [34], на пути к её решению были существенные трудности. Во первых, считалось, что линеаризация автомодельного уравнения здесь не дает желаемого результата, потому что в полученном линейном уравнении нельзя сделать разделения переменных. Во вторых, не была известна асимптотика решений автомодельного уравнения (56) на бесконечности.

Для преодоления этих проблем сделано следующее.

1. Предложено (Раздел 4.2.3) подходящее (комплекснозначное) разделение переменных

$$Y_k(\xi, \phi) = R_k(\xi)e^{ik\phi}, \quad k \neq 0, \quad k - \text{целое (для периодичности)} \quad (58)$$

в линеаризованном относительно гомотермического решения автомодельном уравнении

$$\frac{1}{\xi}(\xi y_\xi)_\xi + \frac{1}{\xi^2}y_{\phi\phi} - \frac{\beta - \sigma - 1}{2}\xi y_\xi + C_0 y_\phi + (\beta - 1)y = 0. \quad (59)$$

Для функции $R_k(\xi)$ получено уравнение:

$$R_k'' + \left(\frac{1}{\xi} - \frac{\beta - \sigma - 1}{2}\xi\right) R_k' + \left(-\frac{k^2}{\xi^2} + C_0 k i + \beta - 1\right) R_k = 0 \quad (60)$$

2. Рассмотрены ограниченные в т. $\xi = 0$ решения уравнения (60) при $k > 0$:

$$\beta = \sigma + 1: R_k(\xi) = J_k(z), \quad z = (\sigma + C_0 k i)^{1/2} \xi,$$

$J_k(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка k ,

$$\beta \neq \sigma + 1: R_k(\xi) = \xi^k {}_1F_1(a, b; z), \quad a = -\frac{\beta - 1 + C_0 k i}{\beta - \sigma - 1} + \frac{k}{2}, \quad b = 1 + k, \quad z = \frac{\beta - \sigma - 1}{4} \xi^2,$$

${}_1F_1(a, b; z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

3. На основании свойств функций $J_k(z)$ и ${}_1F_1(a, b; z)$ установлено:

- можно рассматривать только случай $k > 0, C_0 > 0$;
- если $\beta = \sigma + 1$ (и $C_0 k \neq 0$) или $\beta > \sigma + 1$, то $|R_k(\xi)| \rightarrow \infty$ когда $\xi \rightarrow \infty$;
- если $\beta < \sigma + 1$, то $|R_k(\xi)| \rightarrow 0$, когда $\xi \rightarrow \infty$.

4. Обосновано, что без ограничения общности можно использовать только реальную часть

$$y_k(\xi, \varphi) = |R_k(\tau)| \cos(\arg(R_k(\xi) + k\varphi))$$

частных решений (58) линейного уравнения (59).

5. Исследована геометрическая структура решений $y_k(\xi, \varphi)$ в зависимости от параметров σ, β, C_0 и k . Самый существенный результат: линии уровня функций $y_k(\xi, \varphi)$ при $\beta < \sigma + 1$ ($\beta > \sigma + 1$) и при больших ξ близки к логарифмическим спиральям с параметром $s(-s)$, определенным в (57). Этот факт дал возможность вывести асимптотику с.ф. $\theta(\xi, \varphi)$ из асимптотики решений $y_k(\xi, \varphi)$:

$$y_k(\xi, \varphi) \sim c \xi^{(\beta-1)/m} \cos k \left(\phi + \frac{1}{s} \ln \xi \right), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad c = c(k, \sigma, \beta, C_0). \quad (61)$$

6. Предложены “линейные приближения” к с.ф. HS -режима:

$$\tilde{\theta}_k(r, \varphi) = \begin{cases} 1 + \alpha y_k(r, \varphi), & 0 \leq r < r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 1, & r \geq r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}, \quad (62)$$

α, r_0 – константы. В экспериментах r_0 выбиралось так, чтобы круг $V_{r_0}(0)$ был телом спирали для $\delta = 0.01$.

7. Чтобы установить как близки “линейные приближения” к с.ф., была исследована их эволюция во времени и асимптотика при $t \rightarrow T_0^-$ (Раздел 4.2.4). Использовано автомодельное представление $\Theta(t, \xi, \varphi)$ решения $u(t, r, \varphi)$, соответствующего начальным данным $u_0(r, \varphi)$, согласованное с автомодельным законом (55) при $C_0 \neq 0$:

$$\Theta(t, \xi, \varphi) = u(t, r, \varphi) / \Gamma(t), \quad \xi = r \Gamma(t)^m, \quad \phi = \varphi - C_0 \ln(\Gamma(t)), \quad (63)$$

$$\Gamma(t) = \max_{\Omega} u(t, r, \varphi) / \max_{\Omega} u_0(r, \varphi), \quad \bar{\Omega} = [0, \infty) \times [0, 2\pi]$$

Численные эксперименты, проведенные для широкого набора физических и вычислительных параметров, показали, что при $\alpha \ll 1$ приближения (62) близки с.ф.: они сохраняют свою структуру до времени, близкое к T_0 , при этом T_0 очень близко к времени обострения а.р., отвечающих тем же параметрам σ, β . И это вполне естественно – линеаризация “уничтожает” S и LS -режимы (линеаризованное уравнение имеет линейную диффузию и линейный источник, т.е. для его решений полуширина будет увеличиваться, как это имеет место в HS -режиме).

8. Асимптотика (61) предсказывает следующую асимптотику с.ф. $\theta(\xi, \varphi) = \theta_k(\xi, \varphi)$, $k = 1, 2, \dots$:

$$\theta_k(\xi, \varphi) \sim 1 + \gamma \xi^{(\beta-1)/m} \cos k \left(\phi + \frac{1}{s} \ln \xi \right), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad \gamma = \alpha c \quad (64)$$

и такую аппроксимацию:

$$\tilde{\theta}_k(\xi, \varphi) = 1 + \alpha y_k(\xi, \varphi), \quad \alpha = \text{const}. \quad (65)$$

9. Из (64) выведено граничное условие третьего рода при $\xi = l \gg 1$:

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial \xi} = \frac{\theta_k - 1}{m^* \xi} - \frac{\gamma k}{s \xi^{(m^*-1)/m^*}} \sin k \left(\phi + \frac{1}{s} \ln \xi \right), \quad m^* = m/(\beta - 1). \quad (66)$$

При решении задачи о спиральных с.ф. возникла идея поиска в случае $C_0 = 0$ сложных немонотонных волн HS -режима, выходящих на гомотермический фон при $\xi \rightarrow \infty$. Для единообразного рассмотрения автомодельная задача ставится в области $\bar{\Omega} = [0, l] \times [0, \omega]$, где $\omega = \pi/k$ для $C_0 = 0$ и $\omega = 2\pi/k$ для $C_0 \neq 0$, с условиями симметрии при $C_0 = 0$:

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial \phi}(\xi, 0) = \frac{\partial \theta_k}{\partial \phi}(\xi, \frac{\pi}{k}) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq l, \quad (67)$$

с условиями периодичности при $C_0 \neq 0$

$$\theta_k(\xi, 0) = \theta_k(\xi, \frac{2\pi}{k}), \quad \frac{\partial \theta_k}{\partial \phi}(\xi, 0) = \frac{\partial \theta_k}{\partial \phi}(\xi, \frac{2\pi}{k}), \quad 0 \leq \xi \leq l, \quad (68)$$

и с условием симметрии в нуле. Задача замыкается краевым условием (66) при $C_0 \neq 0$ и краевым условием

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial \xi} = \frac{\theta_k - 1}{m^* \xi}, \quad m^* = m/(\beta - 1)$$

при $C_0 = 0$. В Разделе 4.2.5 изложен численный метод решения автомодельной задачи, в Разделе 4.2.6 – параболической задачи.

Раздел 4.2.7 содержит результаты численного исследования асимптотического поведения радиально несимметричных волн в HS -режиме. Одновременно продемонстрированы надежность и хорошая точность методов решения как эллиптической, так и параболической задачи.

Все проведенные численные эксперименты демонстрируют высокую точность восстановления времени обострения T_0 и метаустойчивость этих волн. Эволюция во времени пяти с.ф., отвечающих одним и тем же параметрам $\sigma = 2$ и $\beta = 2.4$, показана и анализирована. Первые две с.ф. отвечают параметру $C_0 = 0$; остальные три – $C_0 = 1$. Точное время обострения равняется $T_0 = 1/(\beta - 1) = 0.714285$.

Здесь приведена эволюция двух с.ф.. На Рис. 6, ($t = 0$), показаны поверхность и линии уровня с.ф. с одним максимумом, одним минимумом и с одной осью симметрии, вычисленной из начального приближения (65), где $k = 1, \alpha = 1$. При $t > 0$ показаны линии уровня решения параболической задачи на четырех временных слоях. Время обострения, найденное в счете, $\tilde{T}_0 = 0.714475$. Для $0 \leq t \leq 0.7108 = 99.49\% \tilde{T}_0$ движение максимума следует автомодельному закону

$$r(t) = r(0)(1 - t/T_0)^{\frac{m}{\beta-1}} \approx r(0)\Gamma(t)^{-m}.$$

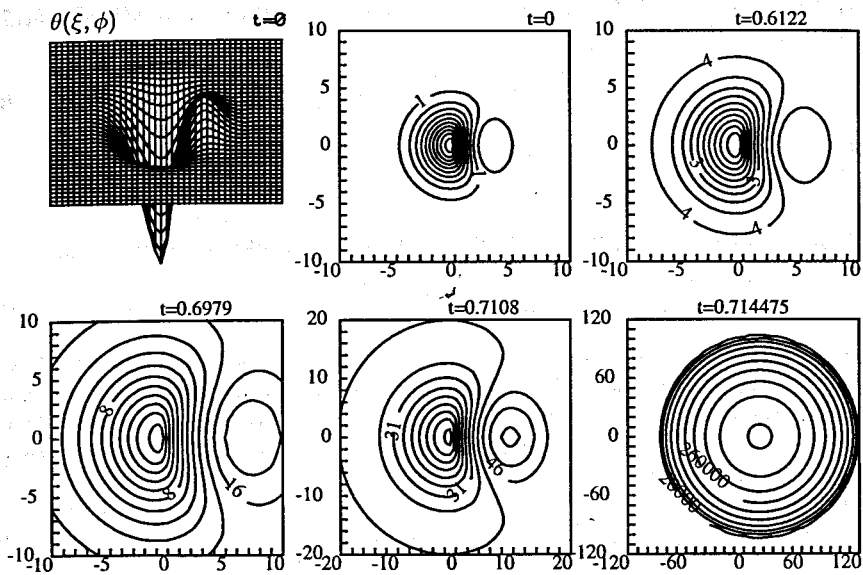


Рис. 6. Эволюция сложной волны HS -режима: $\sigma = 2$, $\beta = 2.4$, $C_0 = 0$, $k = 1$.

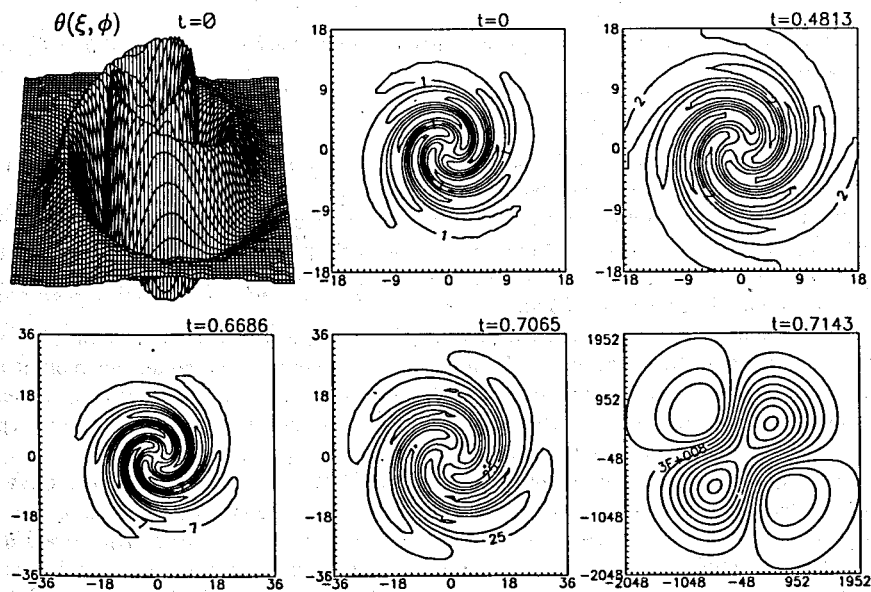


Рис. 7. Эволюция двухрукавной спиральной волны: $\sigma = 2$, $\beta = 2.4$, $C_0 = 1$, $k = 2$.

На асимптотической стадии фон решения замирает, сложная волна вырождается в радиально симметричную, развивающуюся на этом фоне. Автомодельные представления $\Theta(t, \xi, \phi)$ решения $u(t, \xi, \phi)$ стремятся к радиально-симметричной с.ф. с конечным носителем, отвечающей тем же параметрам σ и β . Отметим, что это происходит при $t > 99.49\%T_0$. Следовательно, сложная волна, соответствующая этой с.ф., является метастойчивой.

Для двухрукавной спиральной волны (Рис. 7) $\bar{T}_0 = 0.71428579$ еще ближе к точному T_0 . Движение максимума и минимума следует автомодельному закону до времени $t = 0.7065 = 98.91\%T_0$. Вырождаясь на асимптотической стадии, волна переходит через стадию волны сложной симметрии, перед тем как выродится в радиально-симметричную.

Отметим, что существование континуума решений а.з. в радиально-симметричном случае и HS -режима, которые выходят на гомотермическое решение θ_H при $\xi \rightarrow \infty$, было отмечено в [16], но этому результату не было уделено достойное внимание. Оказывается, именно такие решения а.з. определяют найденные здесь спиральные волны.

Вопрос о существовании спиральных структур в LS -режиме (скручивающиеся спирали) пока остается открытым. Хотя "хребты" линейных приближений к с.ф. LS -режима при $\xi \rightarrow \infty$ стремятся тоже к автомодельным (см. п.5. выше), но их амплитуда стремится к бесконечности. Остается неясным с какой асимптотикой надо сшивать линейные приближения. Автор считает, что в задаче нахождения спиральных структур в LS -режиме надо отказаться от условия ограниченности с.ф. при $\xi = 0$. На эту идею наводят другие решения линеаризованного уравнения (логарифмическое решение вырожденного гипергеометрического уравнения с особенностью в нуле), а также и некоторые физические соображения.

3 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Предложена, исследована и реализована общая методика решения нелинейных автомодельных задач, основанная на непрерывном аналоге метода Ньютона и методе конечных элементов. Она дает возможность автоматизировать процесс вычислений (включая случай неединственности решений) и единообразно решать краевые задачи для нелинейных ОДУ второго порядка, систем таких уравнений и нелинейных эллиптических уравнений второго порядка.

Предложена, исследована и реализована общая методика решения нелинейных параболических задач с сингулярными по времени решениями, основанная на методе конечных элементов с концентрацией матрицы массы и интерполированием нелинейных коэффициентов. Реализованы адаптивные динамические сетки по пространству, согласованные с автомодельным или приближенным автомодельным законом.

2. В радиально-симметричном случае исследовано поведение собственных функций горения нелинейной среды при стремлении LS -режима к S -режиму, когда организация среды существенно усложняется. Показано существенное различие плоского и

радиально-симметричного случаев. Найдены два новых типа собственных функций – “с перетяжкой” и с левым фронтом. На основе детального численного исследования предложен сценарий поведения сложных собственных функций (четных и нечетных) при стремлении к S -режиму.

Исследовано асимптотическое поведение локализованных обостряющихся решений параболической задачи в LS -режиме, когда автомодельное решение не принадлежит $L_1(R^N)$. Численно показано, что и в этом случае монотонное по τ автомодельное решение структурно устойчиво.

Конструированы численно решения автомодельной задачи при соотношениях параметров за критическими экспонентами. Показано, что соответствующие им монотонные по τ автомодельные решения структурно устойчивые, подтверждая таким образом гипотезу Галактионова и Вазкеса.

3. Конструированы численно собственные функции горения двухкомпонентной нелинейной среды в радиально-симметричном случае и исследована структурная устойчивость соответствующих автомодельных решений. Показано, что в LS -режиме структурно устойчивыми являются только автомодельные решения простой структуры (с монотонными по τ компонентами) систем с сильной обратной связью.

4. Численно исследовано асимптотическое поведение обостряющихся решений полунелинейных уравнений с различными нелинейными источниками в радиально-симметричном случае. Подтверждены результаты качественного анализа о том, что асимптотическая стадия эволюции обостряющихся решений описывается приближенными автомодельными решениями (точными автомодельными решениями уравнений первого порядка типа Гамильтона-Якоби). В случае источника $(1+u)\ln^2(1+u)$ показано, что обостряющиеся решения эффективно локализованы в сфере радиуса π или в кольцевой области толщиной 2π .

5. Численно реализованы инвариантные решения, которые описывают направленное распространение тепла и горения в двумерной нелинейной анизотропной среде со степенными коэффициентами теплопроводности. Так конструктивным образом подтверждено их существование.

6. Расширено понятие собственной функции горения нелинейной среды введением в рассмотрение инвариантных решений, которые стремятся к нетривиальному гомотермическому решению, а не к нулю на бесконечности. Это дало возможность получить радиально-несимметричные сложные волны в HS -режиме и численно реализовать инвариантные решения, которые описывают распространение спиральных волн в нелинейной изотропной среде. Таким образом показано, что усложнение организации среды может происходить не только в LS -режиме за счет локализованных во вне и сходящихся к центру структур, но и в HS -режиме за счет метаустойчивых расходящихся волн горения сложной структуры, в том числе раскручивающихся спиральных волн.

Публикации по теме диссертации:

- [Д01] М.И. Бакирова, С.Н. Борщукowa, В.А. Дородницын, С.Р. Свирщевский. О направленном распространении тепла в нелинейной анизотропной среде //Препринт ИПМ АН СССР, No 182, 1985, 12 стр.
- [Д02] S.N. Dimova-Borshukowa. Numerical analysis of the directed heat diffusion in a nonlinear anisotropic medium. Proc. ICCM, Tokyo, 1986, VIII, 78-82.
- [Д03] Бакирова М.И., Димова С.Н., Дородницын В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А., Свирщевский С.Р., Инвариантные решения уравнений теплопроводности, описывающие направленное распространение горения и спиральные волны в нелинейной среде, *ДАН СССР*, 299 (2), 1988, 346-350.
- [Д04] С.Н. Димова, М.С. Касчиев, С.П. Курдюмов. Численный анализ одномерных собственных функций горения нелинейной среды. I. Численный метод и эксперименты. Препринт ОИЯИ, Дубна, P11-88-473, 1988, 16 стр.
- [Д05] С.Н. Димова, М.С. Касчиев, С.П. Курдюмов. Численный анализ одномерных собственных функций горения нелинейной среды. II. Некоторые предельные случаи. Препринт ОИЯИ, Дубна, P11-88-831, 1988, 15 стр.
- [Д06] С.Н. Димова, М.С. Касчиев. Численный анализ двумерных собственных функций горения нелинейной анизотропной среды. Сообщения ОИЯИ, Дубна, P11-88-876, 1988, 9 стр.
- [Д07] С.Н. Димова, М.С. Касчиев. Численный анализ двумерных собственных функций горения нелинейной среды. Proc. Intern. Conf. Numerical Methods and Applications, Sofia, 1988, Publ. House BASci, Sofia, 1989, 121-125.
- [Д08] S.N. Dimova, M.S. Kastchiev, S.P. Kurdiunov. Structure of the onedimensional eigen functions of a nonlinear heat-conducting medium. Proc. Intern. Conf. Numerical Methods and Applications, Sofia, 1988, Publ. House BASci, Sofia, 1989, 126-130.
- [Д09] С.Н. Димова, Касчиев М.С., Курдюмов С.П., Численный анализ собственных функций горения нелинейной среды в радиально-симметричном случае, *ЖВМ и МФ*, 1989, 29 (6), 61-73.
- [Д10] S.N. Dimova, V.A. Galaktionov, D.I. Ivanova. Numerical analysis of blow-up and degeneracy of a semilinear heat equation. Сообщения ОИЯИ, Дубна, E11-89-785, 1989, 20 стр.
- [Д11] Д.И. Иванова, С.Н. Димова, М.С. Касчиев. Численный анализ одномерных собственных функций горения нелинейной среды. III. Сообщения ОИЯИ, Дубна, P11-90-11, 1990, 15 стр.

- [Д12] S.N. Dimova, D.I. Ivanova. Finite element method with special mesh refinement for analysis of single point blow-up solutions. Сообщения ОИЯИ, Дубна, Е11-91-39, 1991, 14 стр.
- [Д13] М.Г. Колева, С.Н. Димова, М.С. Касчиев. Исследование собственных функций горения нелинейной среды в полярных координатах методом конечных элементов. Сообщения ОИЯИ, Дубна, P11-91-552, 1991, 15 стр.
- [Д14] С.Н. Димова, М.С. Касчиев, М.Г. Колева. Анализ собственных функций горения нелинейной среды в полярных координатах методом конечных элементов. Математическое моделирование, т.4, 3, 1992, 74-83.
- [Д15] S.N. Dimova, D.P. Vasileva. On the numerical realization of blow-up spiral wave solutions of a nonlinear heat-transfer equation. Доклады БАН, 46, N 5, 1993, 31-34.
- [Д16] S.N. Dimova, D.P. Vasileva. Numerical realization of blow-up spiral wave solutions of a nonlinear heat-transfer equation. Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow, 4, N 6, 1994, 497-511.
- [Д17] S.N. Dimova, M.S. Kastchiev, M.G. Koleva, D.P. Vasileva. Numerical analysis of nonradially symmetric structures, arising in nonlinear reaction-diffusion processes. In: Programming and Mathematical Methods for Solving Physical Problems, World Scientific, 1994, 251-256.
- [Д18] С.Н. Димова, Касчиев М.С., Колева М.Г., Василева Д.П., Численное исследование радиально-несимметричных структур в нелинейной теплопроводной среде, Доклады РАН, Москва, 338 (4), 1994, 461-464.
- [Д19] S.N. Dimova, D.P. Vasileva. Lumped-mass finite element method with interpolation of the nonlinear coefficients for a quasilinear heat transfer equation. Numerical Heat Transfer, Part B, 28, 1995, 199-215.
- [Д20] S.N. Dimova, M.S. Kastchiev, M.G. Koleva, D.P. Vasileva. Numerical analysis of the blow-up regimes of combustion of two-component nonlinear heat-conducting medium. ЖВМ и МФ, 35 (3), 1995, 303-319.
- [Д21] S.N. Dimova, M.S. Kastchiev, M.G. Koleva, D.P. Vasileva. Numerical analysis of radially nonsymmetric blow-up solutions of a nonlinear parabolic problem. J. Comp. Appl. Math., 97, 1998, 81-97.
- [Д22] S.N. Dimova, T.P. Chernogorova. Asymptotically self-similar blow-up for a quasilinear parabolic equation beyond some critical exponents//Доклады БАН, 53, N 12, 2000, 21-24

Список цитируемой литературы

- [1] Hacken G. *Synergetics.*, Springer, 1977.
- [2] Князева Е. Н., Курдюмов С. П. *Законы эволюции и самоорганизации сложных систем*, М.: Наука, 1994.
- [3] Гленсдорф П., Пригожин И. *Термодинамическая теория структур, устойчивости, флуктуаций*, М.: Мир, 1973.
- [4] Самарский А. А., Дородницын В. А., Курдюмов С. П., Попов Ю. П. *ДАН СССР*, т. 216, 6, 1974, стр.1254.
- [5] Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. Михайлов А. П., Самарский А. А. *Препринт ИПМат., Москва*, 74, 1976, стр.67.
- [6] Nuckolls J., Wood L., Thiessen A., Zimmerman G., *Nature*, v.239, no.5368, 1972, p.139
- [7] Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. Михайлов А. П., Самарский А. А. *Письма в ЖЭТФ*, т. 26, 9, 1977, стр.620-624.
- [8] Волосевич П.П., Дегтярев Л.М., Курдюмов С.П., *Физика плазмы*, т.2, 6, 1976, стр.883-897.
- [9] Тихонов А. Н. и др. *ДАН СССР*, т.173, 4, 1967, стр.808.
- [10] Самарский А. А., Соболев И. М. *ЖВМ и МФ*, т.3, 4, 1963, стр.18-28.
- [11] Wilhelmsson H., Lazaro E. *Reaction-diffusion Problems in the Physics of Hot Plasmas*. IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 2001.
- [12] Тельковская О. В. *Препринт ИАЭ, Москва*, 5021/1, 1990, 15 стр.
- [13] Гуревич М. И., Тельковская О. В. *Препринт ИАЭ, Москва*, 5565/1, 1992.
- [14] Куркина Е. С., Курдюмов С. П., Доклады РАН, т.395, 6, 2004, стр.743-748.
- [15] Калашников А. С., Успехи Мат. наук, 42, 1987, 135-176.
- [16] Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, М.: Наука, 1987.
- [17] Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. *Совр. пробл. матем. Новейшие достижения*. Т. 28. ВИНТИ АН СССР, М., 1986, стр.95-206.
- [18] Курдюмов С. П. *Современные проблемы матем. физики и вычислительной математики*. М.: Наука, 1983, стр.217-243.

- [19] Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. *Препринт ИПМатем, Москва* 106, 1977.
- [20] Адьютов М. М., Клоков Ю. А., Михайлов А. П. *ДУ*, т. 19, 7, 1983, стр.1107–1114.
- [21] Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. *ДАН СССР*, 1980, т.251, 3, стр.587–591.
- [22] Eriksson K., Thomee V. *Math. Comp.*, v.42, 166, 1984, pp.345–367.
- [23] Пузынин И. В., Пузынина Т. П. *KFKI-74-34, Будапешт*, 1974, стр.93–100.
- [24] Дородницын В. А. *Групповые свойства разностных уравнений*. М.: МАКС Пресс, 2000.
- [25] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner. *Geometric Numerical Integration. Structure-preserving Algorithms for ODE*. Springer 2002.
- [26] C. J. Budd, W. Huang, R. D. Russell. *SIAM J. Sci. Comp.*, v.17, 2, 1996, pp.305–327.
- [27] Galaktionov V. A., Vazquez J. L. *Comm. Pure Appl. Math.*, v.L, 1997, pp.1–67.
- [28] Bebernes J., Eberly D. *Mathematical problems from combustion theory*. Appl. Math. Sci. 83, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [29] Galaktionov V. A., Vazquez J. L. *J. Differ. Eq.*, v.127, 1, 1996, pp.1–40.
- [30] Herrero M. A., Velazquez J. L. L. *Ann. Inst. Henry Poincare*, 10, 1993, pp.131–189.
- [31] Дородницын В. А. *ЖВМ и МФ*, т.22, 6, 1982, стр.1393–1400.
- [32] Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А. *ДАН СССР*, т.274, 5, 1984, стр.1071–1075.
- [33] Потапов А. Б. *Препринт ИПМат., Москва*, 8, 1986.
- [34] Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. *Нестационарные структуры и диффузионный хаос*, М.: Наука, 1992.
- [35] Жидков Е. П., Пузынин И. В., *ЖВМ и МФ*, 2, 1969, стр.442–447.