

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-2003-147

П-271

На правах рукописи
УДК 519.6

ПЕРЕПЕЛКИН
Евгений Евгеньевич

**ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ
В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ФЕРРОМАГНЕТИКА**

Специальность: 01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

179

Дубна 2003

Работа выполнена в Лаборатории физики частиц Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна Московская область.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук, профессор Евгений Петрович Жидков
кандидат технических наук Иван Павлович Юдин

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук Сергей Евгеньевич Сычевский
доктор физико-математических наук, профессор Татьяна Ивановна Савелова

Ведущая организация:

Институт ядерных исследований (г. Троицк Московской области)

Защита диссертации состоится " ____ " _____ 2003 г.
в _____ на заседании диссертационного Совета Д720.001.04 в Лаборатории информационных технологий Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна Московская область.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан " ____ " _____ 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук

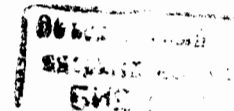
З.М. Иванченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы

Во многих физических установках используются магнитные системы различной конфигурации. Примером могут служить ускорители, в состав которых входят дипольные (поворотные) и квадрупольные (фокусирующие) магниты. С практической точки зрения, очень важно решить задачу моделирования конфигурации магнитной системы, с целью получения необходимого вида магнитного поля (обратная задача), а также уметь с хорошей точностью находить распределение магнитного поля, создаваемого такой системой.

Реально проблема сводится к постановке задачи магнитостатики о нахождении распределения магнитного поля рассматриваемой магнитной системы. В настоящее время существует множество методов решения таких задач. Среди них условно можно выделить три типа постановок по виду используемых в них уравнений – дифференциальных, интегральных, дифференциальных и граничных интегральных (комбинированная постановка). Вот названия некоторых из них: постановка относительно векторного потенциала, постановка относительно одного и двух скалярных потенциалов, постановка относительно модифицированного скалярного потенциала и т.д. Из-за сложной конфигурации магнитной системы решение задачи обычно ищется численными методами. Очень часто при расчете конкретной магнитной системы область, в которой решается краевая задача, имеет всюду гладкую границу, за исключением конечного числа угловых точек, в окрестности которых граница образована пересечением двух гладких кривых. В таких случаях решение задачи или производные решения могут иметь особенность. Примером может служить краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа в области, изображенной на рис.1.



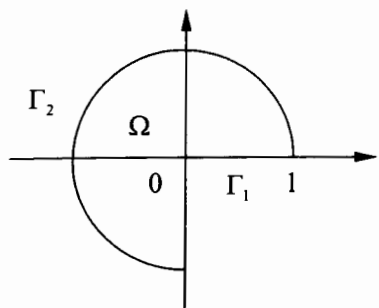


Рис. 1

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & p \in \Omega, \\ u|_{\Gamma_1} = 0, \\ u|_{\Gamma_2} = \sin 2\varphi/3. \end{cases} \quad (1)$$

(r, φ) - полярная система координат;

область

$$\Omega = \{(r, \varphi): 0 < r < 1, 0 < \varphi < 3\pi/2\},$$

граница $\Gamma_1 = \Gamma' \cup \Gamma''$, где

$$\Gamma' = \{(r, \varphi): 0 \leq r \leq 1, \varphi = 0\}, \quad \Gamma'' = \{(r, \varphi): 0 \leq r \leq 1, \varphi = 3\pi/2\}, \text{ а граница}$$

$$\Gamma_2 = \{(r, \varphi): r = 1, 0 < \varphi < 3\pi/2\}.$$

Задача (1) имеет решение $u = r^{2/3} \sin 2\varphi/3$. Запишем производные u_x и u_y .

Получим $u_x = -(2/3)r^{-1/3} \sin \varphi/3, u_y = (2/3)r^{-1/3} \cos \varphi/3$. При $r \rightarrow 0$ производные

u_x и u_y неограниченно растут. Поэтому, при решении таких задач численными

методами необходимо учитывать характер поведения ее решения в окрестности угловой точки.

Цель и задачи исследования

Целью настоящей работы было изучение вопроса о поведении магнитного поля в окрестности угловых точек и построение эффективных алгоритмов, дающих улучшение точности при численном решении задачи магнитостатики.

Научная новизна

При помощи нелинейного преобразования Лежандра исследование нелинейной задачи магнитостатики в области ферромагнетика было сведено к рассмотрению свойств краевой задачи для линейного дифференциального уравнения. Показано существование решений с неограниченно растущим $|\nabla u|$ в окрестности угловой точки ферромагнетика. Исследованы свойства таких решений. Для краевой задачи Дирихле в области с углом построена разностная схема, дающая существенное улучшение точности решения.

Исходя из интегральной постановки задачи магнитостатики сделана верхняя оценка допустимого роста магнитного поля вблизи угловой точки в области ферромагнетик / вакуум. На основании полученной оценки предложен метод сгущения разностной сетки в окрестности угловой точки. В случае, когда при достаточно больших полях функция магнитной проницаемости принимается равной 1 доказана теорема об ограниченности магнитного поля в окрестности угловой точки.

Произведены расчеты модельных и практических задач с использованием полученных методов.

Практическая значимость

Полученные результаты могут быть использованы при решении нелинейной задачи магнитостатики в области с кусочно-гладкой границей.

Решена практическая задача моделирования конфигурации магнитной системы с использованием разработанных алгоритмов.

Основные положения, выносимые на защиту

Исследование нелинейной задачи магнитостатики для области ферромагнетика при помощи нелинейного преобразования Лежандра было сведено к рассмотрению линейной краевой задачи. Найдены решения с неограниченно растущим $|\nabla u|$, а также исследованы их свойства. Построена разностная схема для краевой задачи Дирихле в области с углом. При численных расчетах такая разностная схема дает уменьшение относительной погрешности на порядок.

Получена верхняя оценка допустимого роста магнитного поля вблизи угловой точки в области ферромагнетик / вакуум. Исходя из сделанной оценки предложен метод сгущения разностной сетки в окрестности угловой точки. В случае, когда при достаточно больших полях функция магнитной проницаемости принимается равной 1, доказана теорема об ограниченности магнитного поля в окрестности угловой точки.

Произведено моделирование конфигурации спектрометрического магнита СП-94, используемого в эксперименте Дельта-Сигма (ОИЯИ).

Апробация работы

Основные результаты и положения диссертационной работы доложены и обсуждены на:

четвертой международной конференции "Beam Dynamics and Optimization", Дубна, Россия, 13-17 октября 1997 г.; первой международной конференции "Modern Trends in Computational Physics", Дубна, Россия, 15-20 июня 1998 г.; II открытой научной конференции молодых ученых и специалистов ОИЯИ, Дубна, Россия, 2-6 марта 1998 г.; пятой международной конференции "Beam Dynamics and Optimization", Санкт-Петербург, Россия, 29 июня-3 июля 1998 г.; XXXV всероссийской научной конференции по проблемам физики, химии, математики, информатики и методике преподавания, Москва, Россия, 24-28 мая 1999 г.; научных семинарах по вычислительной математике в 2000, 2001, 2002, 2003 г. (ЛИТ ОИЯИ, Дубна); восьмой международной конференции "Beam Dynamics and Optimization", Саратов, Россия, 25-30 июня 2001 г.; международном конгрессе по математическому моделированию, Дубна, Россия, октябрь 2002; VII открытой научной конференции молодых ученых и специалистов ОИЯИ, Дубна, Россия, 2-6 февраля 2003 г.; объединенном научном семинаре ЛВЭ-ЛФЧ ОИЯИ, Дубна в 2003 г.

По теме диссертации опубликовано 8 работ.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав (теоретические исследования, численные расчеты), заключения и списка литературы. Диссертация содержит 118 машинописных страниц, 5 таблиц, 17 графиков, 24 рисунка. Список литературы содержит 103 работы, из них 88 на русском и 20 на иностранных языках.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведена формулировка решаемой задачи, дан обзор литературы по данной тематике и приведены основные результаты работы.

В §1 главы 1 приведено описание постановки задачи. Изучение поведения магнитного поля в окрестности угловой точки Q было сведено к рассмотрению краевой задачи (2) в области Ω (см. рис.2).

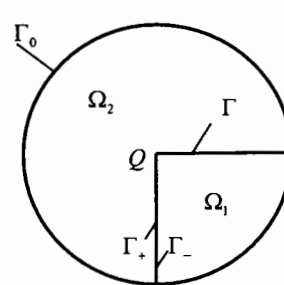


Рис.2

$$\begin{cases} \operatorname{div}[\mu(|\nabla u|)\nabla u(p)] = 0, & p \in \Omega_2, \\ \Delta u(p) = 0, & p \in \Omega_1, \\ u|_{\Gamma_+} = u|_{\Gamma_-}, \\ \mu \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_+} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_-}, \\ u|_{\Gamma_0} = \Psi, \end{cases} \quad (2)$$

где $\Omega = \Omega_2 \cup \Omega_1 \cup \Gamma$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω_1, Ω_2 - области вакуума и ферромагнетика соответственно; Γ_0 - граница Ω ; обозначения Γ_+ и Γ_- соответствуют границе Γ ; $\mu(H)$ - магнитная проницаемость ферромагнетика. Функция Ψ - «достаточно» гладкая. Относительно функции $\mu(H)$ считаются выполненными следующие условия:

$$\mu \in C^{(1)}[0, +\infty), \quad \lim_{H \rightarrow +\infty} \mu'(H)H = 0, \quad \lim_{H \rightarrow +\infty} \mu(H) = 1. \quad (3)$$

Таким образом, необходимо исследовать поведение функции $u(p)$, являющейся решением краевой задачи (2). Так же рассматривается случай, когда на рис.2 области Ω_1 и Ω_2 меняются местами.

В §2 главы 1 рассмотрен случай задачи (2), когда функция магнитной проницаемости $\mu(H)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} \mu(H) \in C^{(1)}[0, +\infty), \\ \exists H_0 > 0 \quad \forall H' > H_0: \mu(H') = 1, \end{cases} \quad (4)$$

где H_0 - «достаточно велико» и в угловой точке Q значение μ определено однозначно. В результате доказывается теорема об ограниченности магнитного поля в окрестности угловой точки.

В §3 главы 1 исследовалось нелинейное дифференциальное уравнение

$$\operatorname{div}[\mu(|\nabla u|)\nabla u] = 0, \quad (5)$$

входящее в постановку задачи (2), на наличие у него решений с неограниченным $|\nabla u|$. С помощью нелинейного преобразования Лежандра уравнение (5) удалось свести к линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Преобразование основано на том, что некоторая поверхность $u(x, y)$ задается не как множество точек (u, x, y) , а как множество касательных к ней плоскостей. Такое отображение отличается от простого преобразования координат тем, что оно ставит в соответствие не точке точку, а элементу поверхности (x, y, u, u_x, u_y) элемент поверхности $(\xi, \eta, \omega, \omega_\xi, \omega_\eta)$. Здесь справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \omega(\xi, \eta) + u(x, y) &= x\xi + y\eta, \\ \xi &= u_x, \quad \eta = u_y, \quad x = \omega_\xi, \quad y = \omega_\eta, \\ u_{xx} &= \rho\omega_{\eta\eta}, \quad u_{xy} = -\rho\omega_{\xi\eta}, \quad u_{yy} = \rho\omega_{\xi\xi}, \end{aligned}$$

где $\rho = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$ - якобиан отображения Лежандра.

В результате уравнение (5) принимает вид

$$[1 + \xi^2 f(r')] \omega_{\eta\eta} - 2\xi\eta f(r') \omega_{\xi\eta} + [1 + \eta^2 f(r')] \omega_{\xi\xi} = 0, \quad (6)$$

где $f(r') = \frac{\mu'(r')}{\mu(r')r'}$, $r' = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Далее необходимо найти решения, для которых

$$|\nabla \omega(\xi, \eta)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad (\xi, \eta) \rightarrow \infty, \quad (7)$$

т.к. эти решения при обратном отображении будут давать решения (5), обладающие свойством

$$|\nabla u(x, y)| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad (x, y) \rightarrow 0. \quad (8)$$

Такие решения в данной работе были найдены. Помимо решений с неограниченным $|\nabla u|$ уравнение (5) имеет решения с ограниченным $|\nabla u|$. Уравнение (6) в полярной системе координат имеет вид

$$\omega_{r'r'} + a(r') \left(\frac{1}{r'} \omega_r + \frac{1}{r'^2} \omega_{\varphi\varphi} \right) = 0, \quad (9)$$

где $a(r') = 1 + r'^2 f(r')$.

Следовательно, решения уравнения (5) с ограниченным $|\nabla u|$ могут быть получены из решений уравнения (9) в области, не содержащей бесконечно

удаленные точки. Решения уравнения (5), обладающие неограниченным $|\nabla u|$, могут быть получены из решений уравнения (10) в области, не содержащей бесконечно удаленные точки.

$$w_n + \frac{2 - \bar{a}(t)}{t} w_r + \frac{\bar{a}(t)}{t^2} w_{\varphi\varphi} = 0, \quad (10)$$

где $w(t, \varphi') = \omega(1/r', \varphi')$, $\bar{a}(t) = a(1/r')$.

Некоторые решения уравнения (9) (аналогичные результаты справедливы и для уравнения (10)) могут быть получены методом разделения переменных

$$\omega(r', \varphi') = \sum_{\lambda} R_{\lambda}(r') \Phi_{\lambda}(\varphi'), \quad (11)$$

где $R_{\lambda}(r')$ удовлетворяет уравнению $R_{\lambda}'' + \frac{1}{r'} a(r') R_{\lambda}' - \frac{\lambda^2}{r'^2} a(r') R_{\lambda} = 0$, а $\Phi_{\lambda}(\varphi')$

удовлетворяет $\Phi_{\lambda}'' + \lambda^2 \Phi_{\lambda} = 0$.

$$R_{\lambda}(r') = C_{\lambda}^{(1)} R_{\lambda}^{(1)}(r') + C_{\lambda}^{(2)} R_{\lambda}^{(2)}(r'),$$

$$\Phi_{\lambda}(\varphi) = C_{\lambda}^{(3)} \sin \lambda \varphi + C_{\lambda}^{(4)} \cos \lambda \varphi,$$

$$R_{\lambda}^{(1)}(r') = r'^{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r'^k, \quad R_{\lambda}^{(2)}(r') = r'^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r'^k.$$

Если $2|\lambda| = n$, $n \in \mathbb{N}$, то $R_{\lambda}^{(2)}(r')$ представимо в виде

$$R_{\lambda}^{(2)}(r') = A R_{\lambda}^{(1)}(r') \ln r' + r'^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k r'^k.$$

Некоторые частные решения исходного уравнения (5) могут быть получены в явном виде, а также исследованы их свойства. Так, например, в самом простейшем случае при $\lambda = 0$ (для уравнения (9)) частное решение исходного уравнения (5) принимает вид

$$u(r, \varphi) = C\varphi. \quad (12)$$

Из (12) видно, что в угловой точке (начало координат) решение (12) не определено, а значение $|\nabla u| = \frac{C}{r}$ неограниченно растет при приближении к началу координат.

Решения, соответствующие другим значениям λ , могут быть использованы при решении краевых задач в областях с углами. Так, например,

задача Дирихле (1), сформулированная для уравнения Лапласа, может быть рассмотрена для нелинейного уравнения (5).

$$\begin{cases} \operatorname{div}[\mu(|\nabla u|)\nabla u(p)] = 0, & p \in \Omega, \\ u|_{\Gamma_1} = 0, \\ u|_{\Gamma_2} = \Psi, \end{cases} \quad (13)$$

где область Ω изображена на рис.1. Замечание: в §5 главы 1 сделана оценка роста величины $|\nabla u|$ для задачи (13). Выяснилось, что величина $|\nabla u| \sim r^{-1/3}$ при $r \rightarrow 0$. Как известно, краевая задача (1) (в общем случае $u|_{\Gamma_2} = \Psi$, где Ψ «достаточно» гладкая функция) имеет тот же порядок роста $|\nabla u| \sim r^{-1/3}$ при $r \rightarrow 0$. Такой результат следовало ожидать, т.к. при $|\nabla u| \rightarrow \infty$ уравнение (5) формально переходит в уравнение Лапласа.

В §4 главы 1 описано построение разностной схемы для краевой задачи (13). Полученная разностная схема учитывает характер поведения решения в окрестности угловой точки. Функция, описывающая особенность решения, зависит от величины угла в угловой точке, и в общем случае не выражается через элементарные функции. Однако, с заданной точностью может быть построена таблица ее значений, которая и используется в расчетах. Пример расчета задачи (13) приведен в §1 главы 2.

В §5.1 главы 1 рассматривался вопрос о возможности построения решения с неограниченным $|\nabla u|$ задачи (2) из решений, полученных в §3 для уравнения $\operatorname{div}[\mu(|\nabla u|)\nabla u] = 0$, и решений, известных для уравнения $\Delta u = 0$ с неограниченным $|\nabla u|$ (вид особенности $u(r, \varphi) = Ar^\lambda \ln^p r \Phi(\varphi) + w$, где $\lambda < 1$, p -целое положительное число, $\Phi(\varphi)$ - бесконечно дифференцируемая функция, w - «достаточно» гладкая функция, A - постоянная величина, (r, φ) - полярная система координат с центром в угловой точке).

В §5.2 главы 1 исходя из интегральной постановки задачи магнитостатики сделана верхняя оценка допустимого роста магнитного поля вблизи угловой точки ферромагнетика. Полученная оценка имеет вид

$$H(s) \leq C_0 \ln \frac{1}{r} + w(s), \quad (14)$$

где r_s - расстояние от угловой точки до точки s , в которой рассматривается поле; $w(s)$ - достаточно гладкая функция; C_0 - положительная постоянная величина.

На основании оценки (14) в §5.3 главы 1 предложен метод сгущения разностной сетки в окрестности угловой точки. Суть метода состоит в выборе шага

разностной сетки таким образом, чтобы величина $\int_{x_{m-1}}^{x_m} \left| \ln \frac{1}{x} \right|^2 dx$ ($x_m - x_{m-1} = h_m$, $m = 1, 2, \dots, M$, где h_m - шаг сетки вдоль координатной оси OX или OY , x_m - координата узловой точки по оси OX или по оси OY) оставалась постоянной.

В §1 главы 2 приведен пример расчета задачи (13) с использованием метода описанного в §4 главы 1. При численных расчетах такая разностная схема давала уменьшение относительной погрешности на порядок.

В §2 главы 2 продемонстрировано использование метода, предложенного в §5.3 главы 1, при расчете магнитной системы, содержащей угловую точку. Для проверки эффективности предложенного метода производились следующие расчеты:

1-й вариант. Задача вычислялась на сетках: 10×10 , 20×20 , 40×40 , 80×80 , 100×100 , 200×200 , 400×400 . При этом в окрестности угловой точки шаг сетки был равномерный;

2-й вариант. Та же задача была рассчитана на той же последовательности сеток, но в окрестности угловой точки использовался, описанный выше метод сгущения разностной сетки.

Результаты, полученные из вычислений по первому варианту, считались эталонными, так как при увеличении числа разбиений предполагалось, что точность вычисляемого решения должна увеличиваться.

Далее результаты, полученные при вычислении по второму варианту, сравнивались с результатами, полученными по первому варианту.

Из полученных данных было видно, что точность расчетов по второму варианту (неравномерная сетка) существенно выше аналогичных расчетов по первому варианту (равномерная сетка). Отсюда можно заключить, что предложенный метод построения разностной сетки в окрестности угловой точки оправдывает свое использование и дает результаты по точности, сравнимые с

результатами, получаемыми лишь на сетках с числом узлов по каждой оси в 4 - 5 раз большим, чем у исходной сетки.

В §3 главы 2 приведены результаты моделирования магнита СП-94 (ОИЯИ). Необходимо было подобрать конфигурацию магнита таким образом, чтобы получить максимально возможное при данных физических условиях увеличение величины $\int_{-\infty}^{+\infty} B_y(0,0,z)dz$ (обратная задача). В результате численного моделирования была найдена необходимая конфигурация магнитной системы. В расчетах использовался метод учета поведения решения в угловых точках.

Выводы

1. Рассмотрена задача магнитостатики (2) в области с углом, когда функция магнитной проницаемости $\mu(H)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \mu(H) &\in C^{(1)}[0, +\infty), \\ \exists H_0 > 0 \quad \forall H' > H_0: \mu(H') &= 1, \end{aligned}$$

где H_0 - достаточно велико и в угловой точке Q функция μ определена однозначно. Доказана теорема об ограниченности магнитного поля в окрестности угловой точки Q .

2. Исследовано нелинейное дифференциальное уравнение

$$\operatorname{div}[\mu(|\nabla u|)\nabla u] = 0,$$

входящее в постановку задачи магнитостатики (2), на наличие у него решений с неограниченно растущим $|\nabla u|$. В процессе исследования:

- изложен метод нахождения частных решений;
- среди полученных решений были найдены решения с неограниченно растущим $|\nabla u|$ в окрестности некоторой точки Q ;
- показано, что решения могут иметь предел в угловой точке Q , и возможен случай, когда предел зависит от пути, по которому он берется. Возможен такой случай, когда решение u в угловой точке не ограничено;

- сделана оценка роста $|\nabla u|$ в угловой точке. Она совпадает с оценкой $|\nabla v|$ для уравнения Лапласа $\Delta v = 0$. Этот факт показывает аналогию в поведении решений уравнений $\operatorname{div}[\mu(|\nabla u|)\nabla u] = 0$ и $\Delta v = 0$ при $\mu \rightarrow 1$;

- для краевой задачи Дирихле с уравнением $\operatorname{div}[\mu(|\nabla u|)\nabla u] = 0$ в области с углом $3\pi/2$ построена разностная схема, учитывающая характер поведения решения в окрестности угловой точки. Использование такой разностной схемы уменьшает относительную погрешность решения «примерно» на порядок.

3. Рассмотрена задача магнитостатики (2) в области с углом, когда $\mu(H) \rightarrow 1$ при $H \rightarrow \infty$ асимптотически. В результате:

- сделана верхняя оценка допустимого роста магнитного поля $\vec{H}(p)$ в окрестности угловой точки

$$H(p) \leq C_0 \ln \frac{1}{r_p} + w(p),$$

где C_0 - постоянная величина, $w(p)$ - ограниченная функция, r_p - расстояние до угловой точки;

- исходя из сделанной оценки предложен метод сгущения разностной сетки в окрестности угловой точки. При расчете магнитной системы предложенный метод дает существенное улучшение точности вычисляемого решения;

- приведены результаты численного моделирования магнитной системы СП-94 (ОИЯИ) эксперимента Дельта-Сигма, осуществляемого в рамках тематического плана ОИЯИ по международному сотрудничеству. Произведено 2-х и 3-х мерное моделирование конфигурации магнитного сердечника и обмоток с током с целью получения максимального значения интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} B_y(0,0,z)dz$.

Список работ, опубликованных по теме диссертации

1. Жидков Е.П., Перепелкин Е.Е., Полякова Р.В., Юдин И.П. Численное моделирование некоторых модификаций спектрометрического магнита

- СП-94. "Beam Dynamics and Optimization - BDO2001", Саратов, СГУ, 2001, сс. 133-138.
2. Жидков Е.П., **Перепелкин Е.Е.** Краевая задача для уравнения эллиптического типа в области с углом. ОИЯИ, P5-2000-52, Дубна, 2000, 5 с.
 3. Zhidkov E.P., **Perepelkin E.E.** An analytical approach for quasi-linear equation in secondary order. СМАМ, vol 1(2001), No.3 pp. 285-297.
 4. Жидков Е.П., **Перепелкин Е.Е.** Исследование поведения решения задачи магнитостатики в окрестности угловой точки ферромагнетика. ОИЯИ, P5-2001-229, Дубна, 2001, 14 с.; Математическое моделирование, N4, т. 15, стр. 77-84, 2003.
 5. Zhidkov E.P., **Perepelkin E.E.**, Yudin I.P., Polyakova R.V. Shavrina T.V., Panacik V.A. Change of field distribution for the spectrometric magnet. BDO97, JINR, Dubna, 1997, pp. 79-85.
 6. Жидков Е.П., **Перепелкин Е.Е.** Оценка роста магнитного поля в окрестности угловой точки ферромагнетика для задачи магнитостатики. ОИЯИ, P11-2003-40, Дубна, 2003, 14 с.
 7. Zhidkov E.P., **Perepelkin E.E.**, Yudin I.P., Polyakova R.V. Shavrina T.V., Andreev S.V. Calculation of the SP-94 magnet field for the EXCHARM setup. BDO97, JINR, Dubna, 1997, pp. 41-45.
 8. Жидков Е.П., **Перепелкин Е.Е.**, Юдин И.П. Алгоритмы численного моделирования в методе двух скалярных потенциалов для описания трехмерного распределения поля магнита. Вестник Российского Университета Дружбы Народов. Серия Физика. Изд-во РУДН, Москва, 2001, № 9(1), с. 27-32.

Получено 24 июля 2003 г.