На правах рукописи

РАХМОНОВ
Турдимухаммад Тухтаматович

ГЕНЕРАТОРЫ ПРЯМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ БЛОЧНО-ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ (ИМ ОБРАТНЫХ) МАТРИЦ И МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Специальность: 01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск 2002

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий (ЛИТ) Объединенного института ядерных исследований.

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Емельяненко Геннадий Андреевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Ильин Валерий Павлович
доктор физико-математических наук, профессор
Воеводин Анатолий Федорович
доктор физико-математических наук
Нечепуренко Юрий Михайлович

Ведущая организация: Институт математики им. академика С.Л.Соболева СО РАН

Защита состоится "24" апреля 2002 г. в 10 часов на заседании специализированного совета Д 003.061.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при ИВМ и МГ СО РАН (630090, г.Новосибирск, просп. Лаврентьева, 6).

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале библиотеки Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (просп. Лаврентьева, 6).

Автореферат разослан "22" марта 2002 г.

Ученый секретарь диссертационного совета д.ф.м.н., профессор Ю.И.Кузнецов

1. *Общая характеристика работы*

Целью настоящей *диссертационной работы является*:

—*разработка генераторов* прямых представлений блочно-трехдиагональных (и им обратных) матриц общего вида

$$C = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & \\ & - & - & - & \\ & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & p_m & q_m \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где $\{q_\xi\}_{\xi=1}^m$ — диагональные элементы - блоки матрицы C, являющиеся в общем случае квадратными матрицами различных размерностей, а $\{p_\xi, r_\xi\}_{\xi=2}^m$ — под (над) диагональные элементы - блоки матрицы C, являющиеся в общем случае прямоугольными матрицами, размерности которых определяются размерностями соответствующих квадратных матриц $\{q_{\xi-1}$ и $q_\xi\}_{\xi=2}^m$;

—*разработка* эффективных *численных непараметрических методов критических компонент* решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений вида

$$AZ = F, \qquad (2)$$

где $A = (a_{ij})$ квадратная порядка m или прямоугольная размерности $m \times n$ вещественная матрица общего вида, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, $Z = (z_1, ..., z_n)^T$ — искомый и $F = (f_1, ..., f_m)^T$ — заданный n и m-мерные векторы соответственно;

—*разработка эффективных алгоритмов* на основе *метода критических компонент и создание* машинно - независимого пакета программ JINRLINPACK для численного решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений.

Актуальность *проблем*, рассматриваемых в настоящей диссертации, обусловлена следующим:

Во-первых, по-прежнему высок исследовательский интерес в вычислительной математике к аппарату и методам линейной алгебры и теории матриц из-за постоянно подкрепляемой новыми результатами уверенности в существовании неиспользованных еще здесь больших резервов повышения эффективности численных методов решения на ЭВМ различных задач теоретической и математической физики, обработки экспериментальных данных, моделирования сложных физических явлений и установок, управления динамическими процессами и т.д. В частности, популярность предобусловленных вариантов итерационных методов (например, сопряженных градиентов) решения больших систем уравнений служит дополнительным стимулом изучения свойств матриц, обратных к блочно - трехдиагональным $C(1)$. Обилие накопившихся в настоящее время в справочной и оригинальной литературе результатов свидетельствует о недостаточно полной еще изученности *проблем построения* всевозможных типов представлений (не использующих, в частности, перестановки) *и их систематизации* для матриц $C(1)$ и $B = C^{-1}$, а также для их (блочно)угловых миноров Δ_1^i, Δ_j^m и определителей как при всех отличных от нуля, так и некоторых равных нулю указанных минорах. Решение этой задачи позволяет построить наиболее эффективные методы вычисления на ЭВМ матриц B, миноров Δ_1^i, Δ_j^m и $\det(C)$, а также решение систем линейных алгебраических уравнений. В настоящее время имеется огромное количество монографий, сборников, обзоров и оригинальных публикаций, в которых либо рассмотрены методы решения указанных задач, либо приводятся примеры задач из различных областей науки и практики к ним приводящих.

Во-вторых, вторая из поставленных в диссертации задач решается достаточно просто, если матрица системы хорошо обусловлена и, следовательно, решение системы устойчиво относительно погрешностей. В настоящее время проблеме решения систем линейных алгебраических уравнений и исследованию свойств матриц системы, а также разработке и описанию пакетов программ уделено большое место в фундаментальных монографиях, обзорах, справочниках и многочисленных оригинальных публикациях. Проблема решения систем линейных алгебраических уравнений (2) занимает одно из центральных мест в вычислительной алгебре. При численном решении этой задачи точными по сути методами имеется несколько источников появления погрешности решения. Один из них обусловлен округлением вещественных чисел в процессе вычисления на ЭВМ. Второй — неточностью задания самих исходных данных задачи (2). Третий — ошибками собственно метода,

применяемого для решения задач (2). При этом к численному методу предъявляются жесткие требования к устойчивости получаемого им решения относительно указанных погрешностей.

Численное решение систем (2) с плохо обусловленными матрицами сводится, как известно, к проблеме устойчивого решения редуцированных систем вида

$$C_3 X = Y, \qquad (3)$$

$$C_2 \hat{X} = \hat{Y}, \qquad (4)$$

где C_3 и C_2 соответственно трехдиагональная и двухдиагональная матрицы

$$C_3 = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ p_2 & q_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & r_m \\ & & p_m & q_m \end{bmatrix}, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ & q_2 & \ddots & \\ & & \ddots & r_m \\ & & & q_m \end{bmatrix} \qquad (5)$$

а $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ и $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m)^T$ — искомые, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ и $\hat{Y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_m)^T$ — m-мерные векторы, $\{q_i\}_{i=1}^m$ — диагональные и $\{p_i, r_i\}_{i=2}^m$ — под(над)диагональные элементы матриц C_3 и C_2.

В-третьих, трехдиагональные, ленточные и блочно - трехдиагональные матрицы играют и самостоятельную роль при решении многих задач вычислительной математики и математической физики . В самом деле, численное решение краевых задач математической физики приводится, в общем случае, к решению алгебраических задач с трехдиагональными, ленточными и блочно-трехдиагональными матрицами. Как известно, например, что исследование процессов ядерных взаимодействий и структуры атомного ядра и процессов электрофизики приводит к решению полной алгебраической проблемы собственных значений матриц вида $C_3(5)$. Также известно (см., например, [11,12]),что факторизованное представление матрицы ошибок с учетом многократного кулоновского рассеяния, энергетических потерь, а также аппаратурных погрешностей и произвольного разбиения треков при обработке информации в экспериментах по физике высоких энергий содержит матрицы — сомножители вида $C(1)$. При этом способы построения и эффективность вычислительных алгоритмов для решения указанных выше основных задач линейной алгебры (с такими матрицами) во многом определяются характерными для них и им обратных матриц представлениями, а также представлениями для их ведущих угловых миноров и определителей. Методам решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами посвящена обширная литература . Эти методы в значительной степени связаны с построением экономичных алгоритмов для характерных типов систем, возникающих при решении задач математической физики. Основная задача при их разработке заключается в минимизации числа арифметических действий с учетом специфики уравнений или в обеспечении надежности, т.е. устойчивости к накоплению погрешностей округления при реализации на ЭВМ.

В-четвертых, практическое использование существующих пакетов программ и сравнительный анализ результатов расчетов на их основе, показывают [23], что в случае плохой обусловленности (особенно паталогически плохой обусловленности $\mathrm{cond}(A) > 1/\varepsilon_1$, где ε_1 — относительная погрешность вычислений с вещественными числами данной ЭВМ) поставленная задача разработки эффективного пакета программ еще не решена окончательно.

Достоверность *основных результатов*, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью их математического доказательства. Правильность работы созданного пакета программ JINRLINPACK для решения задач (1)$\div$(4) проверена на характерных задачах, используемых в мировой практике для тестирования подобных стандартных программ. Приведенные численные результаты хорошо согласуются с известными точными результатами тестовых примеров.

Научная новизна:

1. *Разработаны генераторы* прямых представлений (блочно)трехдиагональных (и им обратных) матриц общего вида.

2. *Разработаны* эффективные численные *методы* критических компонент решения плохо обусловленных ($\mathrm{cond}(A) \geq 1/\varepsilon_1$) систем линейных алгебраических уравнений.

3. *Разработаны* на основе *метода критических компонент* эффективные *алгоритмы* решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений.

Практическая значимость настоящей диссертационной работы определяется созданным на основе новых разработанных алгоритмов машинно - независимым пакетом программ [24,25] JINRLINPACK (INIT, CHEXP, CTEXP, LinsysccmSolver, Lin2dsysccmSolver,

Lin3dsysccmSolver, PseudsysccmSolver) [24,25]. Многочисленные эксперименты показали, что новые программы обладают в среднем лучшими основными показателями, чем подобные программы из наиболее известных пакетов CERNLIB, NAG, LIBJINR, LINA.

Новый машинно-независимый пакет программ JINRLINPACK тестирован и поставлен в библиотеку LIBJINR базовых ЭВМ ЛИТ (ЛВТА) ОИЯИ [24]. Ему присвоен индекс F499 по классификации CERN. Фортранный текст всех программ пакета JINRLINPACK находится в файле f499.f на сервере Convex и доступен через WWW по адресу http://www.jinr.ru/~tsap/Koi/jinrlib.

Высокая эффективность программ пакета JINRLINPACK подтверждена [26] при численном решении плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений в задаче рассеяния с вариационным функционалом Швингера.

Апробация *работы.* Основные результаты диссертации докладовались на научных семинарах: по методам вычислительной и прикладной математики ЛИТ (ЛВТА), по прим. выч. техн. в науч. исслед. ЛИТ (ЛВТА) ОИЯИ, а также на межд. конф-циях: "Межд. совещ. по прогр. и мат. методам реш. физ. задач" (P& MM'93, Дубна, 14-19 июня 1993 г.), "Числ. моделир. и вычисления в физ." (CMCP-96, Дубна, 16–21 сент. 1996 г.), "Актуал. пробл. выч. физ." (MTCP-98, Дубна, 15–20 июня 1998 г.), "Актуал. пробл. выч. физ." (MTCP-2000, Дубна, 24–30 июля 2000 г.), III науч. конф. молод. уч. и спец-тов (Дубна, 15–19 февр. 1999 г.), на семинаре Инс-та выч. мат. РАН (Москва, 17 апр. 2001 г.), на семинаре "Методы выч. матем-ки" отдела матем-ких задач физ. и хим. ИВМ и МГ СО РАН (Новосиб., 19 февр. 2002 г.), на семинаре по выч. физике ЛИТ ОИЯИ (Дубна, 26 февр. 2002 г.).

Личный вклад *автора.* Автор диссертации, работая в коллективе соавторов, возглавляемом д.м.-м.н., профессором Г.А.Емельяненко, объединяющем сотрудников ЛИТ (ЛВТА) ОИЯИ, ИЯФ АН РУ (Академия наук Республики Узбекистан, г.Ташкент), ВМК МГУ (г. Москва), университет "Дубна", внес большой вклад в разработку генераторов прямых представлений блочно-трехдиагональных (и им обратных) матриц, в разработку численных методов критических компонент решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений, а также в разработку алгоритмов и основных модулей машинно

- независимого пакета JINRLINPACK [24,25].

По теме диссертации автором опубликовано 24 работы [1–24]. Из них в диссертацию вошли лишь результаты работ [14–24].

Структура и строение *диссертации.* Диссертация состоит из 3 глав, которые состоят из разделов и параграфов. В параграфах имеются рисунки и таблицы. Объем диссертации 261 страница.

В диссертации принята следующая (а.б) – двузначная нумерация формул, лемм, теорем, замечаний, следствий и представлений, где а — номер параграфа, б — номер соответствующих формул, лемм, теорем, замечаний, следствий и представлений в этом параграфе данного раздела. Например, теорема 3.1 – есть первая теорема третьего параграфа данного раздела в соответствующей главе. Если по тексту делаются ссылки на (а.б), то перед этой (а.б) ссылкой добавляется к — номер главы. Например, ссылка на теорему (2.3.1) означает, что это есть ссылка на первую теорему третьего параграфа второй главы диссертации.

Объем автореферата *обусловлен* особенностями алгебраических представлений, поэтому с целью экономии места, в реферате приводятся лишь некоторые из полученных в диссертации представлений.

2. *Краткое содержание диссертации*

Во введении обсуждается содержание предмета исследований, обосновывается их актуальность и приводится краткий анализ состояния проблемы. Сформулирована также цель, научная новизна и практическая значимость работы. Указаны основные результаты , выносимые на защиту.

Первая глава, состоящая из четырех разделов, посвящена: *изучению* свойств факторизации блочно - трехдиагональных (и им обратных матриц) при наличии нулевых блочно угловых миноров*); *разработке* генераторов представлений блочно - трехдиагональных (и им обратных) матриц при наличии различных комбинаций нулевых ведущих блочно - угловых миноров; *разработке* генераторов прямых методов декомпозиционного типа решения систем линейных алгебраических уравнений с блочно - трехдиагональными матрицами общего вида;

*) Под ведущими $\{\Delta_1^{\xi}\}_{\xi=1}^{m}$ – верхними и $\{\Delta_{\xi}^{m}\}_{\xi=1}^{m}$ – нижними блочно - угловыми минорами $C(1)$, как и в [1,9,14], понимаются определители ведущих усеченных подматриц, начинающихся с q_1 и q_m соответственно.

построению множества матрично - факторизованных представлений блочно - трехдагональных матриц общего вида при наличии нулевых ведущих блочно - угловых миноров на основе квазиобобщенных процессов.

В разделе 1 главы 1 *обобщены* результаты [1÷10,12] работ по различным прямым факторизованным представлениям элементов - блоков матрицы обратной к $C(1)$ при наличии у нее лишь одного верхнего (либо нижнего) нулевых ведущих блочно - угловых миноров, либо плохой обусловленности соответствующих усеченных подматриц. При этом использованы, введенные нами в работах [1÷10,12] в случае обращения в нуль некоторых их ведущих верхних (нижних) блочно - угловых миноров невырожденных матриц $C(1)$, обобщенные матричные (процессы) - последовательности вида

$$\begin{cases} \text{Если} \ \ \det(\Lambda_\xi) \neq 0, \ \text{то} \ \ \Lambda_{\xi+1} = q_\xi - p_\xi \Lambda_\xi^{-1} r_\xi, \Lambda_2 = q_1, \\ (\det(q_1) \neq 0), \xi = 2, \dots, m. \\ \text{Если} \ \ \det(\Lambda_\xi) = 0 \ \text{для любого} \ \xi \ \text{из} \ (3 \leqslant \xi \leqslant m-1), \\ \text{то} \ \ \Lambda_{\xi+1} = ?, \ \text{но} \ \ \Lambda_{\xi+2} = q_{\xi+1}, \ \text{где} \ \det(q_{\xi+1}) \neq 0. \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \text{Если} \ \ \det(G_\xi) \neq 0, \ \text{то} \ \ G_{\xi-1} = q_\xi - r_{\xi+1} G_\xi^{-1} p_{\xi+1}, \\ G_{m-1} = q_m, (\det(q_m) \neq 0), \ \xi = m-1, \dots, 1. \\ \text{Если} \ \ \det(G_\xi) = 0 \ \text{для любого} \ \xi \ \text{из} \ (2 \leqslant \xi \leqslant m-2), \\ \text{то} \ \ G_{\xi-1} = ?, \ \text{но} \ \ G_{\xi-2} = q_{\xi-1}, \ \text{где} \ \det(q_{\xi-1}) \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

В параграфе 1 раздела 1 установлено (теорема 1.1), что, если для последовательностей матриц $\{\Lambda\}(6)$ и $\{G\}(7)$ выполняется одно из следующих условий:

$$\text{I.} \quad \begin{cases} [\det(\Lambda_{k+1}) = 0 \ \text{для любого} \ k \ \text{из} \ (2 \leqslant k \leqslant m-2), \\ \text{но} \ \{\det(\Lambda_\xi) \neq 0\}_{\xi=2}^{k}, \ \{\det(\Lambda_\xi) \neq 0\}_{\xi=k+3}^{m+1}] \to \\ [\Delta_1^k = 0 \ \text{для любого} \ k \ \text{из} \ (2 \leqslant k \leqslant m-2)]; \end{cases}$$

$$\text{II.} \quad \begin{cases} [\det(G_k) = 0 \ \text{для любого} \ k \ \text{из} \ (2 \leqslant k \leqslant m-2), \\ \text{но} \ \{\det(G_\mu) \neq 0\}_{\mu=k+1}^{m-1}, \ \{\det(G_\mu) \neq 0\}_{\mu=0}^{k-2}] \to \\ [\Delta_{k+1}^m = 0 \ \text{для любого} \ k \ \text{из} \ (2 \leqslant k \leqslant m-2)]; \end{cases}$$

$$\text{III.} \quad \begin{cases} [\det(G_k) = 0 \ \text{для любого} \ k \ \text{из} \ (2 \leqslant k \leqslant m-2), \\ \text{но} \ \{\det(G_\xi) \neq 0\}_{\xi=k+1}^{m-1}, \ \{\det(G_\xi) \neq 0\}_{\xi=0}^{k-2}] \ \textit{и} \ \ [\Delta_1^k = 0 \\ \text{и} \ \Delta_{k+1}^m = 0 \ \text{одновременно для любого} \ k \ \text{из} \ (2 \leqslant k \leqslant m-2)], \end{cases}$$

то обратная матрица $B = C^{-1}$ имеет следующую структуру

$$
B=\left[\begin{array}{ccc}
\left[\;[B_{ij}]_{11}\;\right] & \begin{array}{cc} B_{1\,k} & B_{1\,k+1}\\ B_{2\,k} & B_{2\,k+1}\\ \dots & \dots \\ B_{k-1\,k} & B_{k-1\,k+1}\end{array} & \left[\;[B_{ij}]_{12}\;\right]\\
B_{k\;1}\cdots B_{k\;k-1} & (B_{k\;k}=X_{k\;k})(B_{k\;k+1}=X_{k\;k+1}) & B_{k\;k+2}\cdots B_{k\;m}\\
B_{k+1\;1}\cdots B_{k+1\;k-1} & (B_{k+1\;k}=X_{k+1\;k})(B_{k+1\;k+1}=X_{k+1\;k+1}) & B_{k+1\;k+2}\cdots B_{k+1\;m}\\
\left[\;[B_{ij}]_{21}\;\right] & \begin{array}{cc} B_{k+2\,k} & B_{k+2\,k+1}\\ B_{k+3\,k} & B_{k+3\,k+1}\\ \dots & \dots \\ B_{m\,k} & B_{m\,k+1}\end{array} & \left[\;[B_{ij}]_{22}\;\right]
\end{array}\right] \tag{8}
$$

При этом для B_{ij} - элементов блоков в (8) имеют место следующие прямые факторизованные представления:

Представления 1.1 (при условии I)

$$
\left[B_{ii}(\Lambda)\right]_{11}=\begin{cases}\tilde{B}_{ij}(\Lambda)+\tau_i X_{kk} z_j,\\ \text{если } 1\le i<j\le k-1,\\ \tilde{B}_{ii}(\Lambda)+\tau_i X_{kk} z_i,\\ \text{если } 1\le (i=j)\le k-1,\\ \tilde{B}_{ij}(\Lambda)+\tau_i X_{kk} z_j,\\ \text{если } 1\le j<i\le k+1;\end{cases} \tag{8'}
$$

$$
\left[B_{ii}(\Lambda)\right]_{22}=\begin{cases}\tilde{B}_{ij}(\Lambda)+\xi_i X_{k+1\;k+1} f_j,\\ \text{если } k+2\le i<j\le m,\\ \tilde{B}_{ii}(\Lambda)+\xi_i X_{k+1\;k+1} f_i,\\ \text{если } k+2\le (i=j)\le m,\\ \tilde{B}_{ij}(\Lambda)+\xi_i X_{k+1\;k+1} f_j,\\ \text{если } k+2\le j<i\le m;\end{cases} \tag{9}
$$

$$
\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}B_{k\;j}=X_{kk}z_j;\\ B_{k+1\;j}=X_{k+1\;k}z_j,\\ \text{если } 1\le j\le k-1.\end{cases}\\ \begin{cases}B_{i\;k}=\tau_i X_{kk};\\ B_{i\;k+1}=\tau_i X_{k\;k+1},\\ \text{если } 1\le i\le k-1.\end{cases}\end{array}\right.\qquad
\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}B_{k\;j}=X_{k\;k+1}f_j;\\ B_{k+1\;j}=X_{k+1\;k}f_j,\\ \text{если } k+2\le j\le m.\end{cases}\\ \begin{cases}B_{i\;k}=\xi_i X_{k+1\;k};\\ B_{i\;k+1}=\xi_i X_{k+1\;k+1},\\ \text{если } k+2\le i\le m.\end{cases}\end{array}\right. \tag{10}
$$

$$
\begin{cases}\left[B_{i\;j}(\Lambda)\right]_{21}=\xi_i X_{k+1\;k}\;z_j,\\ \text{если } k+2\le i\le m,\\ 1\le j\le k-1;\end{cases}\quad
\begin{cases}\left[B_{i\;j}(\Lambda)\right]_{12}=\tau_i X_{k\;k+1}\;f_j,\\ \text{если } 1\le i\le k-1,\\ k+2\le j\le m,\end{cases} \tag{10'}
$$

где

$$
\begin{cases}\{\tau_i=\prod_{\xi=i+1}^{k} c_\xi\}_{i=1}^{k-1},\{z_j=\prod_{\xi=j+1}^{k}\beta_\xi\}_{j=1}^{k-1},\\ \{\xi_i=-\tilde{B}_{ii}(\Lambda)\prod_{\xi=k+3}^{i}\beta_\xi p_{k+2}\}_{i=k+2}^{m},\\ \{f_j=-r_{k+2}\prod_{\xi=k+3}^{j}c_\xi\tilde{B}_{jj}(\Lambda)\}_{j=k+2}^{m}.\end{cases} \tag{11}
$$

Здесь (в соответствии с [3]) $\tilde{B}_{ij}(\Lambda)$ – элементы-блоки усеченных обратных подматриц $\tilde{B}_1^{k-1}=[C_1^{k-1}(\Lambda)]^{-1}$ и $\tilde{B}_{k+2}^{m}=[C_{k+2}^{m}(G)]^{-1}$ соответственно могут быть представлены в виде

$$
\tilde{B}_{ij}(\Lambda)=\begin{cases}\tilde{B}_{ij}(\Lambda)=c_{i+1}\tilde{B}_{i+1\;j}(\Lambda),\\ \text{если } 1\le i<j\le k-1; k+2\le i<j\le m,\\ \tilde{B}_{ii}(\Lambda)=\Lambda_{i+1}^{-1}+c_{i+1}\tilde{B}_{i+1\;i+1}(\Lambda)\beta_{i+1},\\ \text{если } 1\le (i=j)\le k-1;\; k+2\le (i=j)\le m,\\ \tilde{B}_{ij}(\Lambda)=\tilde{B}_{i\;i+1}(\Lambda)\beta_{i+1},\\ \text{если } 1\le j<i\le k-1; k+2\le j<i\le m.\end{cases} \tag{12}
$$

Представления 1.2 (при условии II)

$$
\left[B_{ij}(G)\right]_{11}=\begin{cases}\tilde{B}_{ij}(G)+\hat{f}_i X_{kk}\hat{\xi}_j,\\ \text{если } 1\le i<j\le k-1,\\ \tilde{B}_{ii}(G)+\hat{f}_i X_{kk}\hat{\xi}_i,\\ \text{если } 1\le (i=j)\le k-1,\\ \tilde{B}_{ij}(G)+\hat{f}_i X_{kk}\hat{\xi}_j,\\ \text{если } 1\le j<i\le k-1;\end{cases} \tag{12'}
$$

$$
\left[B_{ij}(G)\right]_{22}=\begin{cases}\tilde{B}_{ij}(G)+\hat{z}_i X_{k+1\;k+1}\hat{\tau}_j,\\ \text{если } k+2\le i<j\le m,\\ \tilde{B}_{ii}(G)+\hat{z}_i X_{k+1\;k+1}\hat{\tau}_i,\\ \text{если } k+2\le (i=j)\le m,\\ \tilde{B}_{ij}(G)+\hat{z}_i X_{k+1\;k+1}\hat{\tau}_j,\\ \text{если } k+2\le j<i\le m;\end{cases} \tag{13}
$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}B_{k\,j}=X_{kk}\hat{\xi}_j;\\ B_{k+1\,j}=X_{k+1\,k}\hat{\xi}_j,\\ \text{если } 1\le j\le k-1.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}B_{i\,k}=\hat{f}_iX_{kk};\\ B_{i\,k+1}=\hat{f}_iX_{k\,k+1},\\ \text{если } 1\le i\le k-1.\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}B_{k\,j}=X_{k\,k+1}\hat{\tau}_j;\\ B_{k+1\,j}=X_{k+1\,k}\hat{\tau}_j,\\ \text{если } k+2\le j\le m.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}B_{i\,k}=z_iX_{k+1\,k};\\ B_{i\,k+1}=z_iX_{k+1\,k+1},\\ \text{если } k+2\le i\le m.\end{array}\right.\end{array}\right. \tag{14}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[B_{i\,j}(G)\right]_{12}=f_iX_{k\,k+1}\,\hat{\tau}_j,\\ \text{если } 1\le i\le k-1;\\ k+2\le j\le m;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\left[B_{i\,j}(G)\right]_{21}=\hat{z}_iX_{k+1\,k}\,\hat{\xi}_j,\\ \text{если } \ k+2\le i\le m;\\ 1\le j\le k-1,\end{array}\right. \tag{15}$$

где

$$\left\{\begin{array}{l}\{\hat{\xi}_j=-p_k\prod_{\xi=j+1}^{k-2}c_\xi\tilde{B}_{jj}(G)\}_{j=1}^{k-1}, \quad \{\tau_j=\prod_{\xi=k+2}^{j}\hat{\beta}_\xi\}_{j=k+2}^{m},\\ \{\hat{f}_i=-\tilde{B}_{ii}(G)\prod_{\xi=i+1}^{k-1}\hat{\beta}_\xi r_k\}_{i=1}^{k-1}, \quad \{\hat{z}_i=\prod_{\xi=k+2}^{i}\hat{c}_\xi\}_{i=k+1}^{m}.\end{array}\right. \tag{16}$$

Здесь (в соответствии с [3]) $\tilde{B}_{ij}(G)$ – элементы - блоки усеченных обратных подматриц $\tilde{B}_1^{k-1}=[C_1^{k-1}(G)]^{-1}$ и $\tilde{B}_{k+2}^{m}=[C_{k+2}^{m}(G)]^{-1}$ соответственно могут быть представлены в виде

$$\tilde{B}_{ij}(G)=\left\{\begin{array}{l}\tilde{B}_{ij}(G)=\tilde{B}_{i\,j-1}(G)\hat{\beta}_j,\\ \text{если } 1\le i<j\le k-1; k+2\le i<j\le m,\\ \tilde{B}_{ii}(G)=G_{i-1}^{-1}+\hat{c}_i\tilde{B}_{i-1\,i-1}(G)\hat{\beta}_i,\\ \text{если } 1\le(i=j)\le k-1;\ \ k+2\le(i=j)\le m,\\ \tilde{B}_{ij}(G)=\hat{c}_i\tilde{B}_{i-1\,j}(G),\\ \text{если } 1\le j<i\le k-1; k+2\le j<i\le m.\end{array}\right. \tag{17}$$

Представления 1.3 (при условии III)

$$\left[B_{ij}(\Lambda,G)\right]_{11}=\left\{\begin{array}{l}\tilde{B}_{ij}(\Lambda,G)+\hat{f}_iX_{kk}z_j,\\ \text{если } 1\le i<j\le k-1,\\ \tilde{B}_{ij}(\Lambda,G)+\hat{f}_iX_{kk}z_i,\\ \text{если } 1\le(i=j)\le k-1,\\ \tilde{B}_{ij}(\Lambda,G)+\hat{f}_iX_{kk}z_j,\\ \text{если } 1\le j<i\le k-1;\end{array}\right. \tag{17'}$$

$$\left[B_{ij}(\Lambda,G)\right]_{22}=\left\{\begin{array}{l}\tilde{B}_{ij}(\Lambda,G)+\hat{z}_iX_{k+1\,k+1}f_j,\\ \text{если } k+2\le i<j\le m,\\ \tilde{B}_{ii}(\Lambda,G)+\hat{z}_iX_{k+1\,k+1}f_i,\\ \text{если } k+2\le(i=j)\le m,\\ \tilde{B}_{ij}(\Lambda,G)+\hat{z}_iX_{k+1\,k+1}f_j,\\ \text{если } k+2\le j<i\le m;\end{array}\right. \tag{18}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}B_{k\,j}=X_{kk}z_j;\\ B_{k+1\,j}=X_{k+1\,k}z_j,\\ \text{если } 1\le j\le k-1.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}B_{i\,k}=\hat{f}_iX_{kk};\\ B_{i\,k+1}=\hat{f}_iX_{k\,k+1},\\ \text{если } 1\le i\le k-1.\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}B_{k\,j}=X_{k\,k+1}f_i;\\ B_{k+1\,j}=X_{k+1\,k+1}f_j,\\ \text{если } k+2\le j\le m.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}B_{i\,k}=\hat{z}_iX_{k+1\,k};\\ B_{i\,k+1}=\hat{z}_iX_{k+1\,k+1},\\ \text{если } k+2\le i\le m.\end{array}\right.\end{array}\right. \tag{19}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[B_{i\,j}(\Lambda,G)\right]_{12}=\hat{f}_iX_{k\,k+1}\ f_j,\\ \text{если } 1\le i\le k-1;\\ k+2\le j\le m;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\left[B_{i\,j}(\Lambda,G)\right]_{21}=\hat{z}_iX_{k+1\,k}\ z_j,\\ \text{если } \ k+2\le i\le m;\\ 1\le j\le k-1,\end{array}\right. \tag{20}$$

где

$$\left\{\begin{array}{l}\{\hat{f}_i=-\tilde{B}_{ii}(\Lambda,G)\prod_{\xi=i+1}^{k-1}\hat{\beta}_\xi r_k\}_{i=1}^{k-1},\\ \{\hat{z}_i=\prod_{\xi=k+2}^{i}\hat{c}_\xi\}_{i=k+2}^{m},\\ \{z_j=\prod_{\xi=j+1}^{k}\beta_\xi\}_{j=1}^{k-1},\\ \{f_j=-r_{k+2}\prod_{\xi=k+3}^{j}c_\xi\tilde{B}_{jj}(\Lambda,G)\}_{j=k+2}^{m}.\end{array}\right. \tag{21}$$

Здесь (в соответствии с [3]) $\tilde{B}_{ij}(\Lambda,G)$ – элементы - блоки усеченных обратных подматриц $\tilde{B}_1^{k-1}=[C_1^{k-1}(\Lambda,G)]^{-1}$ и $\tilde{B}_{k+2}^{m}=[C_{k+2}^{m}(\Lambda,G)]^{-1}$ соответственно могут быть представлены в виде

$$\tilde{B}_{ij}(\Lambda,G)=\left\{\begin{array}{l}\prod_{\xi=i+1}^{j}c_\xi\tilde{B}_{jj}(\Lambda,G),\\ \text{если } 1\le i<j\le k-1;\ \ k+2\le i<j\le m,\\ \tilde{B}_{ii}(\Lambda,G)\prod_{\xi=j+1}^{i}\beta_\xi,\\ \text{если } 1\le j<i\le k-1;\ \ k+2\le j<i\le m;\end{array}\right. \tag{21'}$$

$$\tilde{B}_{ij}(\Lambda,G)=\left\{\begin{array}{l}\tilde{B}_{ii}(\Lambda,G)\prod_{\xi=i+1}^{j}\hat{\beta}_\xi,\\ \text{если } 1\le i<j\le k-1;\ \ k+2\le i<j\le m,\\ \prod_{\xi=j+1}^{i}\hat{c}_\xi\tilde{B}_{jj}(\Lambda,G),\\ \text{если } 1\le j\le i\le k-1;\ \ k+2\le j\le i\le m;\end{array}\right. \tag{22}$$

$$
\tilde{B}_{ij}(\Lambda,G)=\begin{cases}\prod_{\xi=i+1}^{j} c_\xi \tilde{B}_{jj}(\Lambda,G),\\ \text{если } 1\le i\le j\le k-1;\ k+2\le i\le j\le m,\\ \prod_{\xi=j+1}^{i} \hat{c}_\xi \tilde{B}_{jj}(\Lambda,G),\\ \text{если } 1\le j\le i\le k-1;\ k+2\le j<i\le m;\end{cases} \qquad (22')
$$

$$
\tilde{B}_{ij}(\Lambda,G)=\begin{cases}\tilde{B}_{ii}(\Lambda,G)\prod_{\xi=i+1}^{j} \hat{\beta}_\xi,\\ \text{если } 1\le i\le j\le k-1;\ k+2\le i\le j\le m,\\ \tilde{B}_{ii}(\Lambda,G)\prod_{\xi=j+1}^{i} \beta_\xi,\\ \text{если } 1\le j\le i\le k-1;\ k+2\le j\le i\le m,\end{cases} \qquad (23)
$$

где, в (8') $\div$ (23),

$$
\begin{cases}\beta_{\xi+1}=-(p_{\xi+1}\Lambda_{\xi+1}^{-1}),\quad c_{\xi+1}=-(\Lambda_{\xi+1}^{-1}r_{\xi+1}),\\ 1\leqslant\xi\leqslant k-1;\quad k+2\leqslant\xi\leqslant m-1;\\ \hat{\beta}_{\xi+1}=-(r_{\xi+1}G_\xi^{-1}),\quad \hat{c}_{\xi+1}=-(G_\xi^{-1}p_{\xi+1}),\\ 1\leqslant\xi\leqslant k-2;\quad k+1\leqslant\xi\leqslant m-1;\\ \tilde{B}_{\xi\xi}=(\Lambda_{\xi+1}+G_{\xi-1}-q_\xi)^{-1},\quad 1\leqslant\xi\leqslant k-1;\ k+2\leqslant\xi\leqslant m,\\ \text{а последовательности матриц } \{\Lambda\} \text{ и } \{G\} \text{ определены в}\\ \text{соответствии с } (6)\div(7).\end{cases} \qquad (24)
$$

А также представления 1.4 (при условии III) (см. раздел 1 главы 1).

При этом неизвестные $\{[X_{kk}(\Lambda), X_{kk+1}(\Lambda), X_{k+1k}(\Lambda), X_{k+1k+1}(\Lambda)]$, $[X_{kk}(G), X_{kk+1}(G), X_{k+1k}(G), X_{k+1k+1}(G)]$, $[X_{kk}(\Lambda,G), X_{kk+1}(\Lambda,G)$, $X_{k+1k}(\Lambda,G), X_{k+1k+1}(\Lambda,G)]\}$ – элементы - блоки B(8), при соответствующих условиях, могут быть найдены из матричных уравнений, указанных в разделе 1 главы 1.

В разделе 2 главы 1 ставится и *решается задача построения генераторов* матрично - факторизованных *представлений* разных типов для C и $B=C^{-1}$ *и их систематизации* при наличии всевозможных комбинаций у $C(1)$ нулевых ведущих блочно - угловых миноров. На основе матричных процессов $\{\Lambda\}(6)$ и $\{G\}(7)$ были рассмотрены следующие (учитывающие информацию о нулевых ведущих блочно - угловых минорах $C(1)$) условия:

I. $\begin{cases}\text{Если } \{[\Delta_1^{k-1}=0] \text{ \textit{либо} } [\Delta_k^m=0]\} \text{ - равны нулю только}\\ \text{по одному минору каждого типа, то } \{[\det(\Lambda_k)=0\\ \text{для любого } k \text{ из } (3\le k\le m-1),\\ \text{но } \{\det(\Lambda_\xi)\ne 0\}_{\xi=2}^{k-1},\ \{\det(\Lambda_\xi)\ne 0\}_{\xi=k+2}^{m+1}]\\ \text{\textit{либо} } [\det(G_{k-1})=0 \text{ для любого } k \text{ из } (3\le k\le m-1),\\ \text{но } \{\det(G_\xi)\ne 0\}_{\xi=k}^{m-1},\ \{\det(G_\xi)\ne 0\}_{\xi=0}^{k-3}]\},\end{cases}$

II. $\begin{cases}\text{Если } \{[\Delta_1^{k-1}=0] \text{ \textit{и} } [\Delta_k^m=0]\} \text{ — равны нулю}\\ \text{одновременно только по одному минору обоих типов, то}\\ \{[\det(\Lambda_k)=0 \text{ для любого } k \text{ из } (3\le k\le m-1), \text{ но}\\ \{\det(\Lambda_\xi)\ne 0\}_{\xi=2}^{k-1},\ \{\det(\Lambda_\xi)\ne 0\}_{\xi=k+2}^{m+1}] \text{ \textit{и} } [\det(G_{k-1})=0\\ \text{для того же } k, \text{но } \{\det(G_\xi)\ne 0\}_{\xi=k}^{m-1},\ \{\det(G_\xi)\ne 0\}_{\xi=0}^{k-2}]\}.\end{cases}$

В разделе 1 главы 1 получен явный вид множества различных матрично - факторизованных представлений блочно - трехдиагональных матриц вида $C(1)$ при наличии у них лишь по одному разного типа (или обоих типов) нулевому блочно - угловому минору. Это параметрические по сути представления, параметрами в которых служат матрицы из матричных последовательностей $\{\Lambda\}(6)$ и $\{G\}(7)$. Если же число ведущих нулевых блочно - угловых миноров у $C(1)$ оказывается два и более, то решение проблемы представлений $C(1)$ и их систематизации при указанной выше параметризации становится практически затруднительным.

Поэтому *становится очевидной необходимость* введения более общей (*структурно - инвариантной**)) *параметризации* факторизованных представлений $C(1)$, которая позволила бы более просто справиться с решением указанной проблемы.

В параграфе 1 раздела 2, если для $\{\Delta_1^\xi\}$, $\{\Delta_\xi^m\}$ – ведущих блочно - угловых миноров $C(1)$ выполняется одно из условий $\mathrm{I}_{1)}$, $\mathrm{I}_{2)}$, II, получено (теорема 1.1) следующее единственное структурно - инвариантное матрично - факторизованное представление

*)Здесь и далее под структурной инвариантностью представлений мы понимаем, во- первых, формальное совпадение структуры матричных сомножителей представления 1.1 и представлений 1.0.3–1.0.4 (см. раздел 1 главы 1). Во- вторых, представление 1.1 может служить генератором всевозможных (в том числе и 1.0.3–1.0.4) представлений C (1.0.1) при условиях $\mathrm{I}_{1)}$; $\mathrm{I}_{2)}$; II, поскольку в отличие от представлений 1.0.3–1.0.4 оно построено (как на параметрах) на элементах последней строки и последнего столбца матрицы $\tilde{B}_1^{k-2}=[C_1^{k-2}]^{-1}$ и первой строки и первого столбца матрицы $\tilde{B}_{k+1}^m=[C_{k+1}^m]^{-1}$ без указания способов их вычисления (представления).

Представление 1.1 (при условиях I, II)

$$C=\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & -- & \\ & & & E_{k-2}\end{bmatrix} & & \\ p_{k-1}\tilde B_{k-2\,1}\ldots p_{k-1}\tilde B_{k-2\,k-2} & \begin{bmatrix}E_{k-1}&\\&E_k\end{bmatrix} & r_{k+1}\tilde B_{k+1\,k+1}\ldots r_{k+1}\tilde B_{k+1\,m} \\ & & \begin{bmatrix}E_{k+1}&&\\&--&\\&&E_m\end{bmatrix}\end{bmatrix}}_{C_0}\times$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & \\ & -- & - & \\ & & p_{k-2} & q_{k-2}\end{bmatrix}=C_1^{k-2} & & \\ & \begin{bmatrix}(q_{k-1}-p_{k-1}\tilde B_{k-2\,k-2}r_{k-1}) & (r_k)\\ (p_k) & (q_k-r_{k+1}\tilde B_{k+1\,k+1}p_{k+1})\end{bmatrix}=\omega_k & \\ & & C_{k+1}^m=\begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2} & \\ p_{k+2} & q_{k+2} & r_{k+3} \\ & --- & \\ & p_m & q_m\end{bmatrix}\end{bmatrix}}_{\Omega_k}\times$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & -- & \\ & & & E_{k-2}\end{bmatrix} & \begin{matrix}\tilde B_{1\,k-2}r_{k-1}\\ \tilde B_{2\,k-2}r_{k-1}\\ --\\ \tilde B_{k-2\,k-2}r_{k-1}\end{matrix} & \\ & \begin{bmatrix}E_{k-1}&\\&E_k\end{bmatrix} & \\ & \begin{matrix}\tilde B_{k+1\,k+1}p_{k+1}\\ \tilde B_{k+2\,k+1}p_{k+1}\\ --\\ \tilde B_{m\,k+1}p_{k+1}\end{matrix} & \begin{bmatrix}E_{k+1}&&&\\&E_{k+2}&&\\&&--&\\&&&E_m\end{bmatrix}\end{bmatrix}}_{C_1}. \qquad (25)$$

При этом для C_1^{k-2} и C_{k+1}^m — ведущих усеченных блочно - трехдиагональных подматриц имеют место (при соответствующих условиях) одно из представлений $C_1^{k-2}(\Lambda), C_{k+1}^m(\Lambda)$; $C_1^{k-2}(G), C_{k+1}^m(G)$; $C_1^{k-2}(\Lambda,G), C_{k+1}^m(\Lambda,G)$ вида (1.0.17)–(1.0.18), (1.0.14)–(1.0.16), (1.0.10)–(1.0.11) (см. раздел 1 главы 1). А для $\{\tilde B_{k-2j}\}_{j=1}^{k-2}$ – $(k-2)$ — строки, $\{\tilde B_{ik-2}\}_{i=1}^{k-2}$ – $(k-2)$ — столбца обратной матрицы $\tilde B_1^{k-2}=[C_1^{k-2}]^{-1}$ и $\{\tilde B_{ik+1}\}_{i=k+1}^{m}$ – $(k+1)$ — столбца, $\{\tilde B_{k+1j}\}_{j=k+1}^{m}$ – $(k+1)$ — строки обратной матрицы $\tilde B_{k+1}^m=[C_{k+1}^m]^{-1}$ имеют место представления (1.1.2) - (1.1.4) (см. раздел 1 главы 1).

Далее получено (см. представление 1.2 теоремы 1.2) представление типа 1.1 для $C(1)$ при следующих комбинациях однотипных (или обоих типов) нулевых ведущих блочно - угловых миноров:

III. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{l-1}=0]$ *либо* $[\Delta_k^m=0$ и $\Delta_l^m=0]\}$ – равны нулю только по два отдаленных минора каждого типа;

IV. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{k+2}=0]$ *либо* $[\Delta_k^m=0$ и $\Delta_{k+3}^m=0]\}$ – равны нулю только по два соседних минора каждого типа;

V. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0=\Delta_1^{l-1}]$ *и* $[\Delta_k^m=0=\Delta_l^m]\}$ – равны нулю одновременно только по два отдаленных минора обоих типов;

VI. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0=\Delta_1^{k+2}]$ *и* $[\Delta_k^m=0=\Delta_{k+3}^m]\}$ – равны нулю только по два соседних минора обоих типов.

Далее получены (теорема 1.3) матрично - факторизованные представления типа 1.1 для $C(1)$ при следующих комбинациях однотипных (или обоих типов) нулевых ведущих блочно - угловых миноров:

VII. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{l_{i-1}-1}=0]$ *либо* $[\Delta_k^m=0$ и $\Delta_{l_{i-1}-1}^m=0]\}$- равны нулю любое конечное число отдаленных миноров каждого типа;

VIII. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{l_{i-1}-1}=0]$ *либо* $[\Delta_k^m=0$ и $\Delta_{l_{i-1}-1}^m=0]\}$ - равны нулю любое конечное число отдаленных миноров каждого типа;

IX. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0=\Delta_1^{l_{i-1}-1}=0]$ *и* $[\Delta_k^m=0=\Delta_{l_{i-1}-1}^m=0]\}$ - равны нулю одновременно любое конечное число отдаленных миноров обоих типов;

X. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0=\Delta_1^{l_{i-1}-1}=0]$ *и* $[\Delta_k^m=0=\Delta_{l_{i-1}-1}^m=0]\}$ - равны нулю одновременно любое конечное число соседних миноров обоих типов.

Представление 1.3 (при условиях VII, VIII, IX, X)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}E_1&&\\&--&\\&&E_{k-2}\end{bmatrix} & & & & & \\ p\tilde B_1\ldots p\tilde B_{k-2} & \begin{bmatrix}E_{k-1}&\\&E_k\end{bmatrix} & r\hat B_{k+1}\ldots r\hat B_{k'-2} & & & \\ & & \begin{bmatrix}E_{k+1}&&\\&--&\\&&E_{k'-2}\end{bmatrix} & & & \\ & & p\tilde B_{k+1}\ldots p\tilde B_{k'-2} & \begin{bmatrix}E_{k'-1}&\\&E_{k'}\end{bmatrix} & r\hat B_{k'+1}\ldots r\hat B_{k''-2} & \\ & & & & \begin{bmatrix}E_{k'+1}&&\\&--&\\&&E_{k''-2}\end{bmatrix} & \\ & & & & p\tilde B_{k'+1}\ldots p\tilde B_{k''-2} \quad \begin{bmatrix}E_{k''-1}&\\&E_{k''}\end{bmatrix} & r\hat B_{k''+1}\ldots r\hat B_m \\ & & & & & \begin{bmatrix}E_{k''+1}&&\\&--&\\&&E_m\end{bmatrix}\end{bmatrix}}_{C_0}\times$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
\left[C_1^{k-2}\right] & & & & \\
& \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}(q_{k-1}-p\tilde{B}r)(r_k)\\(p_k)(q_k-r\hat{B}p)\end{bmatrix} & O & \begin{bmatrix} O & O\\ (-r\tilde{B}_{k+1}r) & O\end{bmatrix} & & & \\
O & \left[C_{k+1}^{k'-2}\right] & O & & & \\
\begin{bmatrix}O & (-p\hat{B}_{k'-2}p)\\ O & O\end{bmatrix} & O & \begin{bmatrix}(q_{k'-1}-p\tilde{B}r)(r_{k'})\\(p_{k'})(q_{k'}-r\hat{B}p)\end{bmatrix} & O & \begin{bmatrix} O & O\\ (-r\tilde{B}_{k'+1}r) & O\end{bmatrix} \\
& & O & \left[C_{k'+1}^{k''-2}\right] & O \\
& & \begin{bmatrix}O & (-p\hat{B}_{k''-2}p)\\ O & O\end{bmatrix} & O & \begin{bmatrix}(q_{k''-1}-p\tilde{B}r)(r_{k''})\\(p_{k''})(q_{k''}-r\hat{B}p)\end{bmatrix}
\end{bmatrix} = \omega_{k,k',k''} & & & \\
& & & & \left[C_{k''+1}^{m}\right]
\end{bmatrix}}_{\Omega_{k,k',k''}} \times
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}E_1 & & \\ & -- & \\ & & E_{k-2}\end{bmatrix} & \begin{matrix}\tilde{B}_1 r\\ --\\ \tilde{B}_{k-2}r\end{matrix} & & & & & & \\
& \begin{bmatrix}E_{k-1} & \\ & E_k\end{bmatrix} & & & & & & \\
& \begin{matrix}\hat{B}_{k+1}p\\ --\\ \hat{B}_{k'-2}p\end{matrix} & \begin{bmatrix}E_{k+1} & & \\ & -- & \\ & & E_{k'-2}\end{bmatrix} & \begin{matrix}\tilde{B}_{k+1}r\\ --\\ \tilde{B}_{k'-2}r\end{matrix} & & & & \\
& & & \begin{bmatrix}E_{k'-1} & \\ & E_{k'}\end{bmatrix} & & & & \\
& & & \begin{matrix}\hat{B}_{k'+1}p\\ --\\ \hat{B}_{k''-2}p\end{matrix} & \begin{bmatrix}E_{k'+1} & & \\ & -- & \\ & & E_{k''-1}\end{bmatrix} & & & \\
& & & & & \begin{matrix}\hat{B}_{k''+1}p\\ --\\ \hat{B}_{m}p\end{matrix} & \begin{bmatrix}E_{k''+1} & & \\ & -- & \\ & & E_{m}\end{bmatrix} &
\end{bmatrix}}_{C_1} = C,
$$

где

$$
\begin{cases}
p\tilde{B}_j = p_{\rho-1}\tilde{B}_{\rho-2\ j}, \quad \hat{B}_i p = \tilde{B}_{i\ \rho+1}p_{\rho+1},\\
\tilde{B}_i r = \tilde{B}_{i\ \rho-2}r_{\rho-1}; \quad r\hat{B}_j = r_{\rho+1}\hat{B}_{\rho+1\ j};\\
p\tilde{B}r = p_{\rho-1}\tilde{B}_{\rho-2\ \rho-2}r_{\rho-1},\\
r\hat{B}p = r_{\rho+1}\tilde{B}_{\rho+1\ \rho+1}p_{\rho+1}, \qquad \rho:\ k;\ k';\ k''.
\end{cases}
$$

При этом для $C_1^{k-2}, C_{k+2}^{k'-2}, C_{k'+2}^{k''-2}, C_{k+1}^{m}$ – ведущих усеченных блочно - трехдиагональных подматриц общего вида (1) при соответствующих условиях $\text{VII}_{1)}$, $\text{VII}_{2)}$, IX имеет место одно из представлений вида (1.0.17)-(1.0.18), (1.0.10)-(1.0.1),(1.0.14)-(1.0.15) (см. раздел 1 главы 1). Здесь также $\tilde{B}_{\xi\mu}$- столбцы (строки) соответствующих обратных подматриц $\tilde{B}_\xi^\mu = [C_\xi^\mu]^{-1}$ при условиях $\text{VII}_{1)}$, $\text{VII}_{2)}$, IX могут быть представлены в виде (1.1.6)-(1.1.8) (см. раздел 1 главы 1).

В параграфе 2 раздела 2, подобная задача как и параграфе 1, решается для $B = C^{-1}$ при тех же условиях на миноры. При этом из соображений дальнейшего практического использования полученных в этом

параграфе теоретических результатов для решения систем уравнений $CX = Y$ *построены* новые *представления* для $B = C^{-1}$ *аддитивно - мультипликативного типа и найдены их генераторы* (см. представление 2.1 теоремы 2.1 и представление 2.3 теоремы 2.3).

Представление 2.2 (типа $B = \tilde{B} + \Delta B$, при условиях III, IV, V, VI)

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & \\ & - & - & \\ & & p_{k-2} & q_{k-2}\end{bmatrix}^{-1} = \tilde{B}_1^{k-2} & & & & \\
& \begin{bmatrix}O_{k-1} & \\ & O_k\end{bmatrix} & & & \\
& & \tilde{B}_{k+1}^{l-2} = \begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2} & & \\ p_{k+2} & q_{k+2} & r_{k+3} & \\ & - & - & \\ & & p_{l-2} & q_{l-2}\end{bmatrix}^{-1} & & \\
& & & \begin{bmatrix}O_{l-1} & \\ & O_l\end{bmatrix} & \\
& & & & \tilde{B}_{l+1}^{m} = \begin{bmatrix} q_{l+1} & r_{l+2} & & \\ p_{l+2} & q_{l+2} & r_{l+3} & \\ & - & - & \\ & & p_m & q_m\end{bmatrix}^{-1}
\end{bmatrix} +
$$

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}O_1 & & & \\ & O_2 & & \\ & - & - & \\ & & & O_{k-2}\end{bmatrix} & \begin{matrix}(-\tilde{B}_{1k-2}r_{k-1})\\ --\\ (-\tilde{B}_{k-2k-2}r_{k-1})\end{matrix} & & & & \\
& \begin{bmatrix}E_{k-1} & \\ & E_k\end{bmatrix} & & & & \\
& \begin{matrix}(-\tilde{B}_{k+1k+1}p_{k+1})\\ --\\ (-\tilde{B}_{l-2k+1}p_{k+1})\end{matrix} & \begin{bmatrix}O_{k+1} & & \\ & O_{k+2} & \\ & - & - \\ & & O_{l-2}\end{bmatrix} & \begin{matrix}(-\tilde{B}_{k+1l-2}r_{l-1})\\ --\\ (-\tilde{B}_{l-2l-2}r_{l-1})\end{matrix} & & \\
& & & \begin{bmatrix}E_{l-1} & \\ & E_l\end{bmatrix} & & \\
& & & \begin{matrix}(-\tilde{B}_{l+1l+1}p_{l+1})\\ --\\ (-\tilde{B}_{ml+1}p_{l+1})\end{matrix} & \begin{bmatrix}O_{l+1} & \\ - & - \\ & O_m\end{bmatrix} &
\end{bmatrix} \times
$$

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}E_1 & & \\ & E_2 & \\ & - & - \\ & & E_{k-2}\end{bmatrix} & & \\
& \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}(q_{k-1}-p_{k-1}\tilde{B}_{k-2k-2}r_{k-1})(r_k)\\ (p_k)(q_k-r_{k+1}\tilde{B}_{k+1k+1}p_{k+1})\end{bmatrix} & O & \begin{bmatrix}O & O\\ (-r_{k+1}\tilde{B}_{k+1l-2}r_{l-1}) & O\end{bmatrix}\\
O & \begin{bmatrix}E_{k+1} & & \\ & E_{k+2} & \\ & - & - \\ & & E_{l-2}\end{bmatrix} & O\\
\begin{bmatrix}O & (-p_{l-1}\tilde{B}_{l-2k+1}p_{k+1})\\ O & O\end{bmatrix} & O & \begin{bmatrix}(q_{l-1}-p_{l-1}\tilde{B}_{l-2l-2}r_{l-1})(r_l)\\ (p_l)(q_l-r_{l+1}\tilde{B}_{l+1l+1}p_{l+1})\end{bmatrix}
\end{bmatrix}^{-1} = \tilde{\omega}_{k,l}^{-1} & \\
& & \begin{bmatrix}E_{l+1} & & \\ & E_{l+2} & \\ & & -- \\ & & & E_m\end{bmatrix}
\end{bmatrix} \times
$$

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} O_1 & & \\ & O_2 & \\ & - & - \\ & & O_{k-2}\end{bmatrix} \\
(-p_{k-1}\tilde{B}_{k-2\,1})\cdot(-p_{k-1}\tilde{B}_{k-2\,k-2}) \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k \end{bmatrix} (-r_{k+1}\tilde{B}_{k+1\,k+1})\cdot(-r_{k+1}\tilde{B}_{k+1\,l-2}) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{bmatrix} O_{k+1} & & \\ & O_{k+2} & \\ & - & - \\ & & O_{l-2}\end{bmatrix} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (-p_{l-1}\tilde{B}_{l-2\,k+1})\cdot(-p_{l-1}\tilde{B}_{l-2\,l-2}) \begin{bmatrix} E_{l-1} & \\ & E_l\end{bmatrix} \ldots (-r_{l+1}\tilde{B}_{l+1\,m}) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{bmatrix} O_{l+1} & & \\ & O_{l+2} & \\ & - & - \\ & & O_m\end{bmatrix}
\end{array}\right]$$

$$= B.$$

При этом для $[\tilde{B}_1^{k-2}]_{ij}$, $[\tilde{B}_{k+1}^{l-2}]_{ij}$, $[\tilde{B}_{l+1}^{m}]_{ij}$ – элементов - блоков обратных ведущих усеченных подматриц $\tilde{B}_1^{k-2} = [C_1^{k-2}]^{-1}$, $\tilde{B}_{k+1}^{l-2} = [C_{k+1}^{l-2}]^{-1}$, $\tilde{B}_{l+1}^{m} = [C_{l+1}^{m}]^{-1}$ справедливы (при соответствующих условиях $III_{1)}, III_{2)}, V$) любые из полученных нами в ([12, 14], см., также, раздел 1 главы 1) различных прямых факторизованных представлений. Здесь неизвестные $\{[\tilde{B}_{k-1k-1}, \tilde{B}_{k-1k}, \tilde{B}_{kk-1}, \tilde{B}_{kk}, \tilde{B}_{k-1l-1}, \tilde{B}_{k-1l}, \tilde{B}_{kl-1}, \tilde{B}_{kl}$; $\tilde{B}_{l-1k-1}, \tilde{B}_{l-1k}, \tilde{B}_{lk-1}, \tilde{B}_{lk}]$ – функции от $\{\Lambda\}$ при условии $III_{1)}$; функции от $\{G\}$ при условии $III_{2)}$ или как функции от $\{\Lambda, G\}$ при условии $V\}$ – элементы - блоки матриц $\tilde{\omega}_{k,l}^{-1}$ могут быть найдены любым методом с учетом основных матричных уравнений (2.2.4) (см. раздел 2 главы 1).

В разделе 3 главы 1 решаются вопросы *эффективного практического выделения* при расчетах на ЭВМ *декомпозиционных областей и построения единственных операторов* перехода между выделенными подпространствами.

В параграфе 1 раздела 3 показано, что представления полученных в разделе 2 этой главы *существуют (и вид их не изменяется) также, если условие вырожденности заменить условиями плохой обусловленности* соответствующих усеченных подматриц.

В параграфе 2 раздела 3 *построены* (при указанных выше условиях I – VI) на основе результатов первого параграфа, по сути посвященного методам практической декомпозиции на ЭВМ блочно - трехдиагональных матриц общего вида $C(1)$, *различные методы (не итерационного типа) решения* на ЭВМ *систем линейных уравнений* с матрицами указанного вида (см. представление 2.2 теоремы 2.2 и представление 2.3 теоремы 2.3 раздела 3 главы 1).

Представление 2.1 (типа $X = \overset{\circ}{X} + (\tilde{B}_1 \Delta X =< \tilde{B}_1 >< \Delta X >)$, при условиях I, II)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ -- \\ X_{k-2} \\ \begin{bmatrix} X_{k-1} \\ X_k \end{bmatrix} \\ X_{k+1} \\ X_{k+2} \\ -- \\ X_m \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & \\ & --- & & \\ & p_{k-2} & q_{k-2} & \end{bmatrix}^{-1} & \times & \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ -- \\ Y_{k-2} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} O_{k-1} \\ O_k \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2} & \\ p_{k+2} & q_{k+2} & r_{k+3} \\ & --- & \\ & p_m & q_m \end{bmatrix}^{-1} & \times & \begin{bmatrix} Y_{k+1} \\ Y_{k+2} \\ -- \\ Y_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\overset{\circ}{X}} +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\left[\begin{array}{lll} \begin{bmatrix} O_1 & & \\ & O_2 & \\ & -- & O_{k-2} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (-\tilde{B}_{1k-2} r_{k-1}) \\ (-\tilde{B}_{2k-2} r_{k-1}) \\ -- \\ (-\tilde{B}_{k-2\,k-2} r_{k-1}) \end{array} & \\ & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k \end{bmatrix} & \\ & \begin{array}{c} (-\tilde{B}_{k+1\,k+1} p_{k+1}) \\ (-\tilde{B}_{k+2\,k+1} p_{k+1}) \\ -- \\ (-\tilde{B}_{mk+1} p_{k+1}) \end{array} & \begin{bmatrix} O_{k+1} & & \\ & O_{k+2} & \\ & -- & O_m \end{bmatrix} \end{array}\right]}_{\tilde{B}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} O_1 \\ O_2 \\ -- \\ O_{k-2} \\ \begin{bmatrix} X_{k-1} \\ X_k \end{bmatrix} \\ O_{k+1} \\ O_{k+2} \\ -- \\ O_m \end{bmatrix}}_{\Delta X} \\ \equiv \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (-\tilde{B}_{1k-2} r_{k-1}) & O_1 \\ (-\tilde{B}_{2k-2} r_{k-1}) & O_2 \\ -- & -- \\ (-\tilde{B}_{k-2\,k-2} r_{k-1}) & O_{k-2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} O_{k+1} & (-\tilde{B}_{k+1\,k+1} p_{k+1}) \\ O_{k+2} & (-\tilde{B}_{k+2\,k+1} p_{k+1}) \\ -- & -- \\ O_m & (-\tilde{B}_{mk+1} p_{k+1}) \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{<\tilde{B}_1>} \times \underbrace{\begin{bmatrix} X_{k-1} \\ X_k \end{bmatrix}}_{<\Delta X>} \end{array} \right\}. \qquad (26)$$

При этом, если выделение *исчерпывающих* (см. параграф 1 раздела 3) подматриц C_1^{k-2} и C_{k+1}^{m} было осуществлено с использованием обобщенных матричных процессов $\{\Lambda\}$ (6) и $\{G\}$ (7), то для $\tilde{B}_{ij}$-элементов - блоков обратных подматриц $\tilde{B}_1^{k-2} = [C_1^{k-2}]^{-1}$ и $\tilde{B}_{k+1}^{m} = [C_{k+1}^{m}]^{-1}$ имеет место одно из прямых факторизованных представлений вида (1.1.5), (1.1.10) или вида (1.1.15), (1.1.16) (см. раздел 1 главы 1), если соответствующие матрицы $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ хорошо обусловлены*).

*) Если подматрицы C_1^{k-2} и C_{k+1}^{m} известны априори или выделены каким- либо отличным от указанного в разделе 2 главы 1 способом, либо у матриц C_1^{k-2}, C_{k+1}^{m} среди соответствующих матриц $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ имеются плохо обусловленные, то подвектор X и элементы- блоки $\{\tilde{B}_{ik-2}\}_{i=1}^{k-2}$, $\{\tilde{B}_{ik+1}\}_{i=k+1}^{m}$, $\{\tilde{B}_{k-2j}\}_{j=1}^{k-2}$ и $\{\tilde{B}_{k+1j}\}_{j=k+1}^{m}$ могут быть найдены любым другим из известных методов, обладающих хорошими вычислительными свойствами.

Здесь $[X_{k-1}, X_k]^T$ — компоненты решения X, в свою очередь, являются решением следующей индуцированной совместной системы уравнений:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (q_{k-1}-p_{k-1}\tilde{B}_{k-2\,k-2}r_{k-1})(r_k) \\ \\ (p_k)(q_k-r_{k+1}\tilde{B}_{k+1\,k+1}p_{k+1}) \end{bmatrix}}_{\omega_k} \underbrace{\begin{bmatrix} X_{k-1} \\ \\ X_k \end{bmatrix}}_{<\Delta X>} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{k-1}-p_{k-1}(\sum\limits_{j=1}^{k-2}\tilde{B}_{k-2j}Y_j) \\ Y_k-r_{k+1}(\sum\limits_{j=k+1}^{m}\tilde{B}_{k+1j}Y_j) \end{bmatrix}}_{<\Delta Y>}, \qquad (27)$$

где в (26) и (27) для $\{\tilde{B}_{k-2j}\}_{j=1}^{k-2}$ — последней строки, $\{\tilde{B}_{ik-2}\}_{i=1}^{k-2}$ — последнего столбца подматрицы $\tilde{B}_1^{k-2} = [C_1^{k-2}]^{-1}$ и $\{\tilde{B}_{k+1j}\}_{j=k+1}^{m}$ — первой строки, $\{\tilde{B}_{ik+1}\}_{i=k+1}^{m}$— первого столбца подматрицы $\tilde{B}_{k+1}^{m} = [C_{k+1}^{m}]^{-1}$ при использовании $\{\Lambda\}$ (6) и $\{G\}$ (7) имеет место одно из представлений вида (2.1.2) – (2.1.4) (см. раздел 2 главы 1).

В разделе 4 главы 1 нами *введены квазиобобщенные**) *матричные процессы и изучены на их основе представления* блочно - трехдиагональных матриц общего вида $C(1)$ при различных комбинациях их нулевых ведущих блочно - угловых миноров.

В параграфе 1 раздела 4 *получены* (с целью полноты исследования) и *другие* (типа (6), (7)) *матричные процессы* $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ *и представления* для $C(1)$ при различных комбинациях нулевых ведущих блочно - угловых миноров у $C(1)$.

Квазиобобщенные матричные (процессы) – последовательности имеют вид:

$$\begin{cases} \text{Если } \det(\Lambda_\xi) \neq 0, \text{ для всех } 2 \leq \xi \leq m+1, \\ \text{то } \Lambda_{\xi+1} = q_\xi - p_\xi \Lambda_\xi^{-1} r_\xi, \Lambda_2 = q_1, \ \det(q_1) \neq 0, \ \xi = 2, \ldots, m. \\ \text{Если } \det(\Lambda_\mu) = 0, \text{ для любого } \mu \text{ из } (3 \leq \mu \leq m-1), \\ \text{то } \Lambda_{\xi+1} = q_\xi - p_\xi \Lambda_\xi^{-1} r_\xi, \Lambda_2 = q_1, \ \xi = 2, 3, \ldots, \mu - 1; \\ \bar{\Lambda}_{\mu+1} = \begin{bmatrix} \Lambda_\mu & r_\mu \\ p_\mu & q_\mu \end{bmatrix}, \bar{\Lambda}_\mu + 2 = q_{\mu+1} - \bar{p}_{\mu+1} \bar{\Lambda}_{\mu+1}^{-1} \bar{r}_{\mu+1}, \\ \text{где}^{*)} \ \bar{p}_{\mu+1} = [o_{\mu+1\mu-1}, p_{\mu+1}], \ \bar{r}_{\mu+1} = [o_{\mu-1\mu+1}, r_{\mu+1}]^T, \\ \det(\bar{\Lambda}_{\mu+1}) \neq 0 \text{ и } \bar{\Lambda}_{\xi+1} = q_\xi - p_\xi \bar{\Lambda}_\xi^{-1} r_\xi, \ \xi = \mu+2, \mu+3, \ldots, m; \end{cases} \qquad (28)$$

*) Под квазиобобщенными матричными процессами мы понимаем процессы вида (28), (29), которые структурно совпадают с обобщенными матричными процессами вида (6), (7), но являются непрерывными в отличии от последних.

$$\begin{cases} \text{Если } \det(G_\xi) \neq 0, \text{ для всех } 0 \leq \xi \leq m-1, \\ \text{то } G_{\xi-1} = q_\xi - r_\xi G_\xi^{-1} p_{\xi+1}, \ G_{m-1} = q_m \\ \det(q_m) \neq 0, \ \xi = m, \ldots, 1. \\ \text{Если } \det(G_\mu) = 0, \text{ для любого } \mu \text{ из } (2 \leq \mu \leq m-2), \\ \text{то } G_{\xi-1} = q_\xi - r_{\xi+1} G_\xi^{-1} p_{\xi+1}, \ \xi = m, m-1, \ldots, \mu+1; \\ \bar{G}_{\mu-1} = \begin{bmatrix} q_\mu & r_{\mu+1} \\ p_{\mu+1} & G_\mu \end{bmatrix}, \ \bar{G}_{\mu-2} = q_{\mu-1} - \bar{r}_\mu \bar{G}_{\mu-1}^{-1} \bar{p}_\mu, \\ \text{где } \bar{r}_\mu = [r_\mu, o_{\mu-1\mu+1}], \bar{p}_\mu = [p_\mu, o_{\mu+1\mu-1}]^T, \ \det(\bar{G}_{\mu-1}) \neq 0 \\ \text{и } \bar{G}_{\xi-1} = q_\xi - r_{\xi+1} \bar{G}_\xi^{-1} p_{\xi+1}, \xi = \mu-2, \mu-3, \ldots, 1. \end{cases} \qquad (29)$$

В соответствии с введенным определением $\{\Lambda, \bar{\Lambda}\}$ (28) и $\{G, \bar{G}\}$ (29) имеют, очевидно, место следующие утверждения:

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \text{Если}\{[\Delta_1^{k-1} = 0 \text{ \textit{либо} } \Delta_{k+1}^{m} = 0]\} \text{ – равны нулю только} \\ \text{по одному минору каждого типа,} \\ \text{то}\{[\det(\Lambda_k) = 0 \text{ для любого } k \text{ из } (3 \leq k \leq m-1), \\ \ \text{но } \{\det(\Lambda_\xi) \neq 0\}_{\xi=2}^{k-1}, \{\det(\bar{\Lambda}_\xi) \neq 0\}_{\xi=k+1}^{m+1}], \\ \ \text{\textit{либо} } [\det(G_k) = 0 \text{ для любого } k \text{ из } (2 \leq k \leq m-2), \\ \ \text{но } \{\det(G_\xi) \neq 0\}_{\xi=k-1}^{m-1}, \{\det(\bar{G}_\xi) \neq 0\}_{\xi=0}^{k+1}]\}. \end{cases}$$

Если для последовательностей матриц $\{\Lambda, \bar{\Lambda}\}$ (28) либо $\{G, \bar{G}\}$ (29) выполняется одно из условий I, то для C (1) имеют место (теорема 1.1) следующие единственные матрично - факторизованные представления:

Представление 1.1 (при условии $I_{1)}$)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & & \\ (-\beta_2) & E_2 & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & (-\beta_{k-2}) & E_{k-2} & & & & & \\ & & & (-\beta_{k-1}) & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ O_{kk-1} & E_k \end{bmatrix} & & & & \\ & & & & [-\bar{\beta}_{k+1}] & E_{k+1} & & & \\ & & & & & (-\bar{\beta}_{k+2}) & E_{k+2} & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & (-\bar{\beta}_m) & E_m \end{bmatrix} \times$$

*) Здесь и всюду далее O_{ij}- тождественные нулевые прямоугольные матрицы, размерности которых определяются размерностями соответствующих квадратных матриц $\{q_i, q_j\}$; T- знак транспонирования.

$$
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 &&&&&&& \\
& \Lambda_3 &&&&&& \\
&& \ddots &&&&& \\
&&& \Lambda_{k-1} &&&& \\
&&&& \begin{bmatrix} \Lambda_k & r_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix} &&& \\
&&&&& \bar\Lambda_{k+2} && \\
&&&&&& \bar\Lambda_{k+3} & \\
&&&&&&& \ddots \\
&&&&&&& \bar\Lambda_{m+1}
\end{bmatrix} \times
$$

$$
\begin{bmatrix}
E_1(-c_2) &&&&& \\
\ddots &&&&& \\
& E_{k-2}(-c_{k-1}) &&&& \\
&& \begin{bmatrix} E_{k-1} & O_{k-1k} \\ & E_k \end{bmatrix} [-\bar c_{k+1}] &&& \\
&&& E_{k+1}(-\bar c_{k+2}) && \\
&&&& \ddots & \\
&&&&& E_{m-1}(-\bar c_m) \\
&&&&& E_m
\end{bmatrix} = C(\Lambda, \bar\Lambda),
$$

где

$$
\begin{cases}
\{\beta_{\xi+1} = -(p_{\xi+1}\Lambda_{\xi+1}^{-1}), c_{\xi+1} = -(\Lambda_{\xi+1}^{-1} r_{\xi+1})\}_{\xi=1}^{k-2}, \\
\{\bar\beta_{\xi+1} = -(p_{\xi+1}\bar\Lambda_{\xi+1}^{-1}), \bar c_{\xi+1} = -(\bar\Lambda_{\xi+1}^{-1} r_{\xi+1})\}_{\xi=k+1}^{m-1}, \\
[\bar\beta_{k+1}] = -[O_{k+1\ k-1},\ p_{k+1}] \begin{bmatrix} \Lambda_k & r_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix}^{-1}, \\
[\bar c_{k+1}] = -\begin{bmatrix} \Lambda_k & r_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O_{k-1k+1} \\ r_{k+1} \end{bmatrix}. \\
\text{При этом } \det\left(\begin{bmatrix} \Lambda_k & r_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix}\right) \neq 0.
\end{cases}
$$

Представление 1.2 (при условии $I_{2)}$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1(-\hat{\bar\beta}_2) &&&&&& \\
\ddots &&&&&& \\
& E_{k-2}(-\hat{\bar\beta}_{k-1}) &&&&& \\
&& E_{k-1}[-\hat{\bar\beta}_k] &&&& \\
&&& \begin{bmatrix} E_k & O_{kk+1} \\ & E_{k+1} \end{bmatrix} (-\hat\beta_{k+2}) &&& \\
&&&& E_{k+2}(-\hat\beta_{k+3}) && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& E_{m-1}(-\hat\beta_m) \\
&&&&&& E_m
\end{bmatrix} \times
$$

$$
\begin{bmatrix}
\bar G_0 &&&&&&& \\
\ddots &&&&&&& \\
& \bar G_{k-3} &&&&&& \\
&& \bar G_{k-2} &&&&& \\
&&& \begin{bmatrix} q_k & r_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix} &&&& \\
&&&& G_{k+1} &&& \\
&&&&& \ddots && \\
&&&&&& G_{m-2} & \\
&&&&&&& G_{m-1}
\end{bmatrix} \times
$$

$$
\begin{bmatrix}
E_1 &&&&& \\
(-\hat{\bar c}_2)E_2 &&&&& \\
\ddots &&&&& \\
& (-\hat{\bar c}_{k-1})E_{k-1} &&&& \\
&& [-\hat{\bar c}_k]\begin{bmatrix} E_k & \\ O_{k+1k} & E_{k+1} \end{bmatrix} &&& \\
&&& (-\hat c_{k+2})E_{k+2} && \\
&&&& (-\hat c_{k+3})E_{k+3} & \\
&&&&& \ddots \\
&&&&& (-\hat c_m)E_m
\end{bmatrix} = C(G, \bar G),
$$

где

$$
\begin{cases}
\{\hat c_{\xi+1} = -(G_\xi^{-1} p_{\xi+1}),\ \hat\beta_{\xi+1} = -(r_{\xi+1} G_\xi^{-1})\}_{\xi=m-1}^{k+1}, \\
\{\hat{\bar c}_{\xi+1} = -(\bar G_\xi^{-1} p_{\xi+1}),\ \hat{\bar\beta}_{\xi+1} = -(r_{\xi+1} \bar G_\xi^{-1})\}_{\xi=k-2}^{1}, \\
[\hat{\bar\beta}_k] = -[r_k,\ O_{k-1\ k+1}] \begin{bmatrix} q_k & r_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix}^{-1}, \\
[\hat{\bar c}_k] = -\begin{bmatrix} q_k & r_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_k \\ O_{k+1\ k-1} \end{bmatrix}. \\
\text{При этом } det\left(\begin{bmatrix} q_k & r_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix}\right) \neq 0.
\end{cases}
$$

Далее получены представления (типа 1.1 и 1.2) для $C(1)$ (см. представления 1.3 – 1.6 теоремы 1.2; представления 1.7 – 1.10 теоремы 1.3) при следующих комбинациях, в соответствии с введенным определением $\{\Lambda, \bar\Lambda\}$(28) и $\{G, \bar G\}$(29) матричных последовательностей, нулевых ведущих блочно - угловых миноров:

II. $\{[\Delta_1^{k-1} = 0$ и $\Delta_1^{l-1} = 0]$ *либо* $[\Delta_{k+1}^m = 0$ и $\Delta_{l+1}^m = 0]\}$ – равны нулю только по два отдаленных минора каждого типа;

III. $\{[\Delta_1^{k-1} = 0$ и $\Delta_1^{k-2} = 0]$ *либо* $[\Delta_{k+1}^m = 0$ и $\Delta_{k+2}^m = 0]\}$ – равны нулю только по два соседних минора каждого типа;

IV. $\{[\Delta_1^{k-1} = 0$ и $\Delta_1^{l_i-1} = 0]$ *либо* $[\Delta_{k+1}^m = 0$ и $\Delta_{l_j+1}^m = 0]\}$ – равны нулю любое конечное число отдаленных миноров каждого типа;

V. $\{[\Delta_1^{k-1} = 0$ и $\Delta_1^{l_i-1} = 0]$ *либо* $[\Delta_{k+1}^{m} = 0$ и $\Delta_{l_j+1}^{m} = 0]\}$ – равны нулю любое конечное число соседних миноров каждого типа.

В параграфе 2 раздела 4 *построены* новые *матрично - факторизованные представления* C (1) (и изучены их свойства) *при различных комбинациях нулевых* ведущих блочно - угловых *миноров обоих типов* (верхних и нижних), т.е. при следующих условиях:

VI. $\{[\Delta_1^{k-1} = 0$ *и* $\Delta_k^{m} = 0]\}$ – равны нулю одновременно только по одному минору обоих типов;

VII. $\{[\Delta_1^{k-1} = 0 = \Delta_1^{l-1}$ *и* $\Delta_k^{m} = 0 = \Delta_l^{m}]\}$ – равны нулю одновременно только по два отдаленных минора обоих типов;

VIII. $\{[\Delta_1^{k-1} = 0 = \Delta_1^{k+2}$ *и* $\Delta_k^{m} = 0 = \Delta_{k+1}^{m}]\}$ – равны нулю одновременно только по два соседних минора обоих типов;

IX. $\{[\Delta_1^{k-1} = 0$ и $\Delta_1^{l_i-1} = 0]$ *и* $[\Delta_k^{m} = 0$ *и* $\Delta_{l_i-1}^{m} = 0]\}$ – равны нулю одновременно любое конечное число отдаленных миноров обоих типов;

X. $\{[\Delta_1^{k-1} = 0$ и $\Delta_1^{l_{i-1}-1} = 0]$ *и* $[\Delta_k^{m} = 0$ и $\Delta_{l_{i-1}}^{m} = 0]\}$ – равны нулю одновременно любое конечное число соседних миноров обоих типов.

Если равны нулю одновременно только по одному ведущему блочно - угловому минору обоих типов у C (1), т.е. для последовательностей матриц $\{\Lambda, \bar{\Lambda}\}$(28) либо $\{G, \tilde{G}\}$(29) выполняется одно из условий VI, то для C(1) имеют место (теорема 2.1) следующие единственные матрично - факторизованные представления (см. представления 2.3 – 2.4 теоремы 2.1; представления 2.2' – 2.4' следствия 2.1; представления 2.5 – 2.16 теоремы 2.2; представления 2.7' – 2.8' следствия 2.2; представления 2.17 - 2.22 теоремы 2.3):

Представление 2.1 (при условии VI)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & & & \\
(-\beta_2)E_2 & & & & & & & \\
- & - & & & & & & \\
& (-\beta_{k-2})E_{k-2} & & & & & & \\
& & (-\beta_{k-1}) & \begin{bmatrix} E_{k-1} & O_{k-1k} \\ O_{kk-1} & E_k \end{bmatrix} & (-\hat{\beta}_{k+1}) & & & \\
& & & & E_{k+1} & (-\hat{\beta}_{k+2}) & & \\
& & & & & - & - & \\
& & & & & & E_{m-1} & (-\hat{\beta}_m) \\
& & & & & & & E_m
\end{bmatrix} \times
$$

$$
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 & & & & & & & \\
& \Lambda_3 & & & & & & \\
& & - \; - & & & & & \\
& & & \Lambda_{k-1} & & & & \\
& & & & \begin{bmatrix} \Lambda_k & r_k \\ p_k & G_{k-1} \end{bmatrix} & & & \\
& & & & & G_k & & \\
& & & & & & - \; - & \\
& & & & & & G_{m-2} & \\
& & & & & & & G_{m-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1(-c_2) & & & & & & & \\
- & - & & & & & & \\
& E_{k-3}(-c_{k-2}) & & & & & & \\
& & E_{k-2}(-c_{k-1}) & & & & & \\
& & & \begin{bmatrix} E_{k-1} & O_{k-1k} \\ O_{kk-1} & E_k \end{bmatrix} & & & & \\
& & & & (-\hat{c}_{k+1})E_{k+1} & & & \\
& & & & & (-\hat{c}_{k+2})E_{k+2} & & \\
& & & & & & — & \\
& & & & & & & (-\hat{c}_m)E_m
\end{bmatrix}
$$

$$
= C(\Lambda, G) = C,
$$

где

$$
\begin{cases}
\{\beta_{\xi+1} = -(p_{\xi+1}\Lambda_{\xi+1}^{-1}), c_{\xi+1} = -(\Lambda_{\xi+1}^{-1} r_{\xi+1})\}_{\xi=1}^{k-2}, \\
\Lambda_{\xi+1} = q_\xi - p_\xi \Lambda_\xi^{-1} r_\xi, \Lambda_2 = q_1, \ \xi = 1, \ 2, \ \dots, \ k-2, \\
\{\hat{\beta}_{\xi+1} = -(r_{\xi+1} G_\xi^{-1}), \hat{c}_{\xi+1} = -(G_\xi^{-1} p_{\xi+1})\}_{\xi=k}^{m-1}, \\
G_{\xi-1} = q_\xi - r_{\xi+1} G_\xi^{-1} p_{\xi+1}, G_{m-1} = q_m, \ \xi = m-1, \ \dots, \ k+1.
\end{cases}
$$

В главе 2, с использованием результатов главы 1: *изучены* свойства представлений *трехдиагональных* и им обратных матриц в случае обращения в нуль ведущих угловых миноров; *разработаны* новые эффективные численные методы обращения *трехдиагональных* матриц общего вида и решения систем линейных алгебраических уравнений с *трех(двух)диагональными* матрицами; *обоснованы* эффективности численного метода критических компонент вырожденных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений.

В разделе 1 главы 2 *получены* матрично - факторизованные *представления* невырожденных трехдиагональных и им обратных *матриц в случае обращения в нуль ведущих угловых миноров.*

В параграфе 1 и 2 *изучены свойства индуцированных матриц* к $C_3(5)$ в случае обращения в нуль ведущих угловых миноров и получены аддитивно - мультипликативное представление матриц $B = C_3^{-1}$.

В разделе 2 главы 2 *предложены* новые *численные методы обращения* трехдиагональных матриц общего вида и *решения систем уравнений* с такими матрицами.

В параграфе 1 раздела 2, с использованием результатов главы 1 и раздела 1 главы 2, получены представления мультипликативного типа (теорема 1.1). В них установлено, что для внедиагональных элементов

B_{ij} обратной матрицы $B = C_3^{-1}$, где C_3 — невырожденная трехдиагональная матрица вида (5), некоторые ведущие угловые миноры которой обращаются в нуль (т.е. $\Delta_1^i = 0$ и/или $\Delta_j^m = 0$, для любых i из $1 \le i < m$, и j из $1 < j \le m$), имеют место следующие представления:

Представление 1.11 (мультипликативного типа)

$$B_{ij} = \begin{cases} \omega_i \prod\limits_{\xi=j+1}^{i} \beta_\xi, \text{ если } 1 \le j < i, 1 \le i \le m, \\ 0 \text{ для всех } i \text{ из } j < i \le m, \text{ если } \Lambda_j = 0, \\ 0 \text{ для всех } j \text{ из } 1 \le j < i, \text{ если } G_i = 0, \\ \omega_i \prod\limits_{\xi=i+1}^{j} \hat{\beta}_\xi, \text{ если } 1 \le i < j \le m, \\ 0 \text{ для всех } i \text{ из } 1 \le i < j, \text{ если } G_j = 0, \\ 0 \text{ для всех } j \text{ из } i < j \le m, \text{ если } \Lambda_i = 0; \end{cases} \qquad (30)$$

Представление 1.12 (мультипликативного типа)

$$B_{ij} = \begin{cases} \prod\limits_{\xi=j+1}^{i} \hat{c}_\xi \omega_j, \text{ если } 1 \le j < i \le m, \\ 0 \text{ для всех } j \text{ из } 1 \le j < i, \text{ если } G_i = 0, \\ 0 \text{ для всех } i \text{ из } j < i \le m, \text{ если } \Lambda_j = 0, \\ \prod\limits_{\xi=i+1}^{j} c_\xi \omega_j, \text{ если } 1 \le i < j \le m, \\ 0 \text{ для всех } j \text{ из } i < j \le m, \text{ если } \Lambda_i = 0, \\ 0 \text{ для всех } i \text{ из } 1 \le i < j, \text{ если } G_j = 0. \end{cases} \qquad (31)$$

Диагональные же элементы B_{ii} матрицы B, а также величины ω_i в (30) $\div$ (31) представимы в виде:

$$\begin{cases} B_{11} = \begin{cases} G_0^{-1}, \text{ если } G_1 \ne 0 \text{ и при этом } \omega_1 = B_{11}, \\ 0, \text{ если } G_1 = 0 \text{ и при этом } \omega_1 = (-r_2 p_2)^{-1}; \end{cases} \\ B_{ii} = \begin{cases} (\Lambda_{i+1} + G_{i-1} - q_i)^{-1}, \text{ если } \Lambda_i \ne 0 \ne G_i \\ \quad \text{и при этом } \omega_i = B_{ii}, \\ 0, \text{ если } \Lambda_i = 0 \quad \text{ и при этом} \\ \quad B_{i-1i-1} = G_{i-1}\omega_i, B_{i+1i+1} = G_i^{-1}, \omega_i = (-p_i r_i)^{-1}, \\ 0, \text{ если } G_i = 0 \quad \text{ и при этом} \\ \quad B_{i-1i-1} = \Lambda_i^{-1}, B_{i+1i+1} = \Lambda_{i+1}\omega_i, \\ \omega_i = (-r_{i+1}p_{i+1})^{-1}, \quad i = 2, 3, ..., m-1; \end{cases} \\ B_{mm} = \begin{cases} \Lambda_{m+1}^{-1}, \text{ если } \Lambda_m \ne 0 \text{ и при этом } \omega_m = B_{mm}, \\ 0, \text{ если } \Lambda_m = 0 \text{ и при этом } \omega_m = (-p_m r_m)^{-1}. \end{cases} \end{cases} \qquad (32)$$

В (30) $\div$ (31) элементы Λ_i и G_i определяются [19$\div$23] как

$$\begin{cases} \Lambda_{i+1} = q_i - p_i \Lambda_i^{-1} r_i, \ \Lambda_2 = q_1, \ i = 2, ..., m, \quad \text{если } \Lambda_i \ne 0 \\ \text{для всех } 2 \le i \le m. \\ \text{Если } \Lambda_i = 0 \text{ для любого } i \text{ из } (2 \le i \le m), \text{ то} \\ \Lambda_{i+1} \text{— неопределено, но } \Lambda_{i+2} = q_{i+1}, \Lambda_i \Lambda_{i+1} = -p_i r_i; \end{cases} \qquad (33)$$

$$\begin{cases} G_{i-1} = q_i - r_{i+1} G_i^{-1} p_{i+1}, \ G_{m-1} = q_m, \ i = m-1, ..., 1, \\ \text{если } G_i \ne 0 \text{ для всех } 1 \le i \le m-1. \\ \text{Если } G_i = 0 \text{ для любого } i \text{ из } (1 \le i \le m-1), \text{ то} \\ G_{i-1} \text{— неопределено, но } G_{i-2} = q_{i-1}, G_i G_{i-1} = -r_{i+1} p_{i+1}. \end{cases} \qquad (34)$$

При этом в (30) $\div$ (31) структурные элементы $\beta, \hat{\beta}, c, \hat{c}$ и произведения $\prod \beta_\xi, \prod \hat{\beta}_\xi, \prod c_\xi, \prod \hat{c}_\xi$ имеют вид:

$$\beta_i = \begin{cases} -p_i \Lambda_i^{-1}, \text{ если } \Lambda_i \ne 0, \\ -p_i, \text{ если } \Lambda_i = 0, \text{ при} \\ \text{ этом } \beta_{i+1} = -p_{i+1}\omega_i; \end{cases} \quad c_i = \begin{cases} -\Lambda_i^{-1} r_i, \text{ если } \Lambda_i \ne 0, \\ -r_i, \text{ если } \Lambda_i = 0, \text{ при} \\ \text{ этом } c_{i+1} = -\omega_i r_{i+1}; \end{cases}$$

$$\hat{c}_{i+1} = \begin{cases} -G_i^{-1} p_{i+1}, \text{ если } G_i \ne 0, \\ -p_{i+1}, \text{ если } G_i = 0, \\ \text{при этом } \hat{c}_i = -\omega_i p_i; \end{cases} \quad \hat{\beta}_{i+1} = \begin{cases} -r_{i+1} G_i^{-1}, \text{ если } G_i \ne 0, \\ -r_{i+1}, \text{ если } G_i = 0, \\ \text{при этом } \hat{\beta}_i = -r_i \omega_i; \end{cases}$$

$$\prod_{\xi=j+1}^{i} \beta_\xi = \begin{cases} \beta_i \cdots \beta_{j+1}, \text{ если } j < i, \\ 1, \quad \text{ если } j \ge i; \end{cases} \quad \prod_{\xi=i+1}^{j} c_\xi = \begin{cases} c_{i+1} \cdots c_j, \text{ если } i < j, \\ 1, \quad \text{ если } i \ge j; \end{cases}$$

$$\prod_{\xi=i+1}^{j} \hat{\beta}_\xi = \begin{cases} \hat{\beta}_{i+1} \cdots \hat{\beta}_j, \text{ если } i < j, \\ 1, \quad \text{ если } i \ge j; \end{cases} \quad \prod_{\xi=j+1}^{i} \hat{c}_\xi = \begin{cases} \hat{c}_i \cdots \hat{c}_{j+1}, \text{ если } j < i, \\ 1, \quad \text{ если } j \ge i. \end{cases}$$

В параграфе 2 раздела 2, с использованием приведенных выше представлений 1.11 и 1.12 и результатов главы 1, получены матрично - факторизованные представления для C_3 и представления аддитивно - мультипликативного типа для $B = C_3^{-1}$ (см. представления 2.1, 2.2 леммы 2.1 и представления 2.3, 2.4 теоремы 2.1).

Далее, с использованием представлений 2.3 и 2.4, предложены и обоснованы методы критических компонент решения системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей общего вида (см. представления 2.5 и 2.6 теоремы 2.2).

В параграфе 3 раздела 2, на основе метода критических компонент решения системы уравнений $C_3 X = Y$, *получен численный метод* решения системы с двухдиагональной матрицей $C_2(5)$.

В разделе 3 главы 2 изложены результаты исследований, связанных с обоснованием эффективности предложенного в [1,4–6] прямого метода критических компонент для решения *плохо обусловленных* систем линейных алгебраических уравнений (2). Показано, что для систем типа (2) устойчивый к погрешностям $(h, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_0)$ метод критических компонент позволяет численно находить единственное приближенное нормальное минимальное по норме решение, обеспечивающее минимум нормы невязки

$$(Z^+ = A^+F): \ ||AZ^+ - F|| = \inf_{Z \in Z_A} ||AZ - F||, ||Z^+|| = \inf_{Z \in Z_A} ||Z||,$$

где Z_A — совокупность всех решений системы (2), а также единственную матрицу A^+, удовлетворяющую условиям

$$||A^+A - E|| = \inf_{\overset{\circ}{A}^{-1} \in \Omega_A} || \overset{\circ}{A}^{-1}A - E||, ||A^+|| = \inf_{\overset{\circ}{A}^{-1} \in \Omega_A} || \overset{\circ}{A}^{-1}||, A^+A = AA^+,$$

где E — единичная матрица и Ω_A — совокупность всех $\overset{\circ}{A}^{-1}$, "псевдообратных" к A. При этом даже в случае существенно плохой обусловленности задачи (1) Z^+ и A^+ устойчивы к малым изменениям входных данных (A, F).

Приведенная в параграфе теорема 1.3 обосновывает [23] получение численно методом критических компонент минимального по норме ($||X^+|| = \min$), единственного приближенного решения X системы $C_3X = Y$, удовлетворяющего условию минимума нормы невязки ($||\tilde{C}_3X^+ - \tilde{Y}|| = \min$), устойчивого к погрешностям $(\varepsilon_1, \varepsilon_0)$ вычислений и к малым изменениям (h, δ) входных данных (C_3, Y).

Ниже приводится *алгоритм* метода критических компонент, следующий из теоремы 1.3.

Начало вычислений:

$k = 1, i = m;$

$(1)^0$ $l_k = i;$

$(2)^0$ $\overset{[k]}{x}_i = \sum_{\xi=1}^{l_k} \overset{[k]}{B}_{i\xi}\, y_\xi,\ \overset{[k]}{\varphi}_i = \begin{cases} 0, \text{ если } k = 1, \\ -\overset{[k]}{B}_{il_k}\, r_{l_k+1} x^+_{l_k+1}, \text{ если } k > 1; \end{cases}$

если $i = l_k$, то $(5)^0$, иначе $(3)^0$;

$(3)^0$ если $|\overset{[k]}{\varphi}_i| < 1/\varepsilon_1$, то $(4)^0$, иначе $k = k + 1$ и $(1)^0$;

$(4)^0$ $j = i + 1, \overset{[k]}{x}_{l_k+1} = 0;$

$$\Phi_j = \begin{cases} |y_j| - |p_j \overset{[k]}{x}_{j-1} + q_j \overset{[k]}{x}_j + r_{j+1} \overset{[k]}{x}_{j+1}|, \text{ при } |y_j| \le 1, \\ 1 - |p_j \overset{[k]}{x}_{j-1} + q_j \overset{[k]}{x}_j + r_{j+1} \overset{[k]}{x}_{j+1}|/|y_j|, \text{ при } |y_j| > 1; \end{cases}$$

если $|\Phi_j| \le 2\varepsilon_1$, то $(5)^0$, иначе $k = k + 1$ и $(1)^0$;

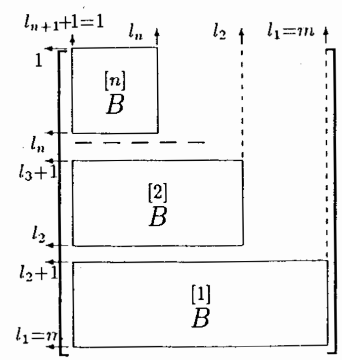
$(5)^0$ $x_i^+ = \overset{[k]}{x}_i + \overset{[k]}{\varphi}_i;$

если $i = 1$, то конец вычислений, иначе $i = i - 1$ и $(2)^0$;

Конец вычислений.

Здесь: $\overset{[k]}{B}_{ij}$ $(l_{k+1} \le i \le l_k,\ 1 \le j \le l_k$ и $k = 1, 2, ..., n)$ - элементы подматриц $\overset{[k]}{B}$ матрицы $\overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{C}{}_3^{-1}$, обратной к хорошо обусловленной матрице $\overset{\circ}{C}_3$ вида:

$$\overset{\circ}{C}_3 = \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & \\ & \cdots & & \\ & & p_{l_n} & q_{l_n} \end{bmatrix} = \overset{[n]}{C}{}^{(l_{n+1}+1=1)}_{l_n} \quad 0 \\ ----- \\ p_{l_3+1} \begin{bmatrix} \tilde{q}_{l_3+1} r_{l_3+2} & & \\ p_{l_3+2} q_{l_3+2} r_{l_3+3} & & \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ & p_{l_2} & q_{l_2} \end{bmatrix} = \overset{[2]}{C}{}^{l_3+1}_{l_2} \quad 0 \\ p_{l_2+1} \quad \overset{[1]}{C}{}^{l_2+1}_{(l_1=m)} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{l_2+1} r_{l_2+2} & & \\ p_{l_2+2} q_{l_2+2} r_{l_2+3} & & \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ & p_m & q_m \end{bmatrix} \end{matrix} \right] \Rightarrow$$



$= \overset{\circ}{B},$

где

$$\tilde{q}_{l_k+1} = q_{l_k+1} - p_{l_k+1}\overset{[k]}{B}_{l_k l_k} r_{l_k+1}, k = 2, 3, .., n$$

и $\overset{[k]}{B}_{l_k l_k}$ — последние диагональные элементы подматриц $\overset{[k]}{B}$, которые совпадают с последними диагональными элементами подматриц, обратных к хорошо обусловленным подматрицам $\overset{[k]}{C}{}_{l_k}^{l_{k+1}+1}$, выделяемых методом, n — число выделяемых подпространств. Элементы $\overset{[k]}{B}_{ij}$ вычисляются [23] по формулам (30) или (31).

В главе 3 (приложение): *разработаны алгоритмы* (см. параграфы 1 и 2 раздела 1) для численного обращения матриц и решения систем линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленными и "слабо" вырожденными матрицами на основе метода критических компонент; *приведены блок - схемы* (см. параграфы 1 и 2 раздела 1) программ; *проведены численные эксперименты* (см. параграф 3 раздела 1) по вычислению основных характеристик решения системы линейных алгебраических уравнений; *приведены результаты* численных экспериментов в сравнении с результатами наиболее известных программ из пакетов:

`CERNLIB` — библиотека программ CERN;
`NAG` — пакет математических программ (Numerical Algorithms Group, Oxford);
`LIBJINR` — библиотека программ ОИЯИ;
`LINA` — пакет программ;

выполнен также *краткий анализ* (см. параграф 3 раздела 1) полученных численных результатов, из которого следует, что метод критических компонент является лучшим по своим качественным показателям из наиболее известных методов решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений; *показана* [26] высокая *эффективность* (см., также, параграф 3 раздела 1) программ пакета `JINRLINPACK` при численном решении плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений в задаче рассеяния с вариационным функционалом Швингера.

3. *Основные результаты и выводы*

– *Изучена* структура прямых представлений (блочно)трехдиагональных и им обратных матриц на основе обобщенных и квазиобобщенных матричных процессов. *Построены* их генераторы.

– *Построены* генераторы прямых методов декомпозиционного типа и *разработаны* эффективные численные методы критических компонент для решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений.

– *Обоснована* эффективность метода критических компонент и *разработаны* его численные алгоритмы. *Создан*, на их основе, новый пакет `JINRLINPACK` [24, 25].

– *Проведены* численные эксперименты по вычислению основных численных характеристик решения систем линейных алгебраических уравнений. *Выполнен* краткий анализ полученных численных результатов, из которого следует, что метод критических компонент является лучшим по свои качественным показателям из наиболее известных методов решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений. *Показана* [26] высокая эффективность программ пакета `JINRLINPACK` при численном решении плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений в задаче рассеяния с вариационным функционалом Швингера.

4. *Публикации по теме диссертации*

[1] Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Свойства матриц, обратных к квазитрехдиагональным. ОИЯИ, Р11-86-504, Дубна, 1986 (РЖМ, 1987, 3А385).

[2] Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Факторизации и свойства квазитрехдиагональных (им обратных) матриц с квадратными блоками. ОИЯИ, Р11-87-524, Дубна, 1987 (РЖМ, 1988, 2А353).

[3] Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Свойства квазитрехвекторных

факторизаций квазитрехдиагональных (и им обратных) матриц с прямоугольными блоками. ОИЯИ, Р11-87-533, Дубна, 1987 (РЖМ, 1988, 2А354).

[4] Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. О множествах представлений (их свойствах) квазитрехдиагональных (им обратных) матриц. ОИЯИ, Р11-87-623, Дубна, 1987 (РЖМ, 1988, 3А466).

[5] Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. О множестве факторизованных представлений квазитрехдиагональных матриц со всеми отличными от нуля (а также некоторыми обращающимися в нуль) главными блочными угловыми минорами. ОИЯИ, Р11-88-598, Дубна, 1988 (РЖМ, 1989, 3Г6).

[6] Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. О факторизациях квазитрехдиагональных матриц с одновременным учетом информации о верхних и нижних главных блочных угловых минорах. ОИЯИ, Р11-88-599, Дубна, 1988 (РЖМ, 1989, 4Г10).

[7] Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. О естественно - элементарных факторизациях квазитрехдиагональных матриц с обращающимися в нуль главными блочными угловыми минорами. ОИЯИ, Р11-88-786, Дубна, 1988 (РЖМ, 1989, 5А279).

[8] Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Факторизация квазитрехдиагональных матриц при одновременном обращении в нуль некоторых из их ведущих верхних и нижних блочных угловых минорах. ОИЯИ, Р11-88-922, Дубна, 1988 (РЖМ, 1989, 7А289).

[9] Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. О полной факторизации невырожденных квазитрехдиагональных (и им обратных) матриц в случае обращения в нуль одного или (одновременно) двух главных блочных угловых миноров. ОИЯИ, Р11-89-203, Дубна, 1989.

[10] Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. О полных естественных факторизациях произвольных (блочно)трехдиагональных матриц и методах вычисления ведущих (блочно)угловых миноров (без ограничения на их поведение) и определителя таких матриц, а также (блочно)факторизованных матриц из некоторого класса. ОИЯИ, Р11-89-340, Дубна, 1989.

[11] Емельяненко Г.А., Одинцов В.Г., Рахмонов Т.Т. Использование факторизованных представлений блочно - трехдиагональных и им обратных матриц при создании математического обеспечения для анализа информации, регистрируемой спектрометрами частиц высоких энергий. ОИЯИ, Р10-89-682, Дубна, 1989 (AMS, MR Lookup, MR 1 038 030).

[12] Рахмонов Т.Т. О свойствах блочно - трехдиагональных (и им обратных) матриц и их роли в решении некоторых задач линейной алгебры и обработки экспериментальных данных в физике высоких энергий. Автореферат кандидатской диссертации. ИВМ АН ГССР. Тбилиси, 1990.

[13] Одинцов В.Г., Рахмонов Т.Т., Эм Рен Зин. Изучение свойств блочно - диагональных и блочно - трехдиагональных окаймленных матриц. ОИЯИ, Р10-92-135, Дубна, 1992 (AMS, MR Lookup, MR 1 176 099).

[14] Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. О структуре прямых представлений матриц, обратных к блочно - трехдиагональным, с обращающимися в нуль ведущими блочными угловыми минорами. ОИЯИ, Р11-93-248, Дубна, 1993 (РЖМ, 1994, 6Г1).

[15] Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Квазиобобщенные матричные процессы и представления блочно - трехдиагональных матриц общего вида. ОИЯИ, Р11-93-249, Дубна, 1993 (AMS, MR Lookup, MR 94h:65027).

[16] Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Естественно - элементарные факторизации блочно - трехдиагональных матриц общего вида при наличии нулевых миноров обоих типов. ОИЯИ, Р11-93-250, Дубна, 1993 (AMS, MR Lookup, MR 94h:65028).

[17] Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Генераторы матрично - факторизованных представлений блочно - трехдиагональных и им обратных матриц. ОИЯИ, Р11-93-265, Дубна, 1993.

[18] Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Декомпозиция области и генераторы прямых методов решения систем линейных уравнений с блочно - трехдиагональными матрицами общего вида. ОИЯИ, Р11-93-266, Дубна, 1993.

[19] Emel'yanenko G.A., Rakhmonov T.T. Direct decomposition numerical methods of the solution of the linear equations system with general block-tridiagonal matrices. Prog. and Math. Tech. in Phys. World Scientific. Sing. New Jersey London H.Kong. 1994, 247-250.

[20] Emel'yanenko G.A., Rakhmonov T.T., Dushanov E.B. Critical - component method for solving systems of linear equations with a tridiagonal matrix of the general form. JINR , E11-96-105, Dubna, 1996.

[21] Emel'yanenko G.A., Rakhmonov T.T., Dushanov E.B. Algoriths and programs of the critical - component method of inversion tridiagonal matrices and solution of systems of linear equations. JINR , E11-96-106, Dubna, 1996.

[22] Emel'yanenko G.A., Rakhmonov T.T., Dushanov E.B. Critical - component method solutions of linear algebraic equations. JINR , E11-96-107, Dubna, 1996.

[23] Emel'yanenko G.A., Emelianenko M.G., Rakhmonov T.T., Dushanov E.B., Konovalova G.Yu. On efficiency of critical - component method for solving degenerate and ill - posed systems of linear algebraic equations. JINR , E11-98-302, Dubna, 1998.

[24] Емельяненко Г.А., Душанов Э.Б., Емельяненко М.Г., Рахмонов Т.Т., Сапожников А.П. Машинно - независимый пакет программ JINRLINPACK для решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений ОИЯИ, Р11-2000-287, Дубна, 2000.

. . . .

[25] Душанов Э.Б. Алгоритмы и машинно - независимый пакет программ JINRLINPACK решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений. Автореферат кандидатской диссертации (Научные руководители: д.ф.-м.н., проф. Емельяненко Г.А., к.ф.-м.н., с.н.с. Рахмонов Т.Т.), ОИЯИ 11-2001-114. Дубна 2001.

[26] Виницкий С.И., Пузынин И.В., Чулуунбаатар О. Ньютоновская итерационная схема с вариационным функционалом Швингера для решения задачи рассеяния. ОИЯИ, Р11-2001-61, Дубна, 2001.

Соискатель

Получено 18 марта 2002 г.