



**ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

11-2002-153

Б- 869

На правах рукописи  
УДК 519.6, 517.9

**БОЯДЖИЕВ**  
Тодор Любенов

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ  
В НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЛЕВЫХ МОДЕЛЯХ ФИЗИКИ**

Специальность: 05.13.18 — математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Дубна 2002

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий  
Объединенного института ядерных исследований.

Научный консультант:

доктор физ.-мат. наук, проф. Пузынин Игорь Викторович.

Официальные оппоненты:

- доктор физ.-мат. наук, проф. Севастьянов Леонид Антонович
- доктор физ.-мат. наук, проф. Цветков Виктор Павлович;
- доктор физ.-мат. наук, проф. Нестеренко Владимир Витальевич

Ведущая организация: Институт математического моделирования РАН, г. Москва.

Защита диссертации состоится “                      ”                      2002 г. в                      ч. на заседании  
диссертационного совета Д720.001.04 в Объединенном институте ядерных исследова-  
ний (Лаборатория информационных технологий), г. Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядер-  
ных исследований.

Автореферат разослан “                      ”                      2002 г.

Ученый секретарь совета:  
кандидат физико-математических наук



Иваиченко З.М.

# 1 ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

## 1.1 Актуальность работы

Современные модели теоретической физики описываются сложными системами нелинейных уравнений в частных производных, допускающими в ряде случаев солитонные или солитоноподобные решения (локализованные в пространстве частицеподобные состояния с конечной энергией). Моделирование явлений, связанных с образованием, распространением и устойчивостью солитонов, следует считать одной из быстро развивающихся междисциплинарных областей современной вычислительной физики. Физическая причина интереса к такой тематике очевидна — солитоны и солитоноподобные образования являются важными примерами устойчивых состояний в очень широком классе нелинейных неограниченных и однородных моделей физических систем (см., например, работы [1] — [4]).

На практике, однако, реальные физические системы ограничены в пространстве и могут иметь внутренние структурные неоднородности, способствующие порождению новых физических эффектов. Объяснение этих эффектов связано, как правило, с возможностью локализации солитонов на неоднородностях и/или с их взаимодействием с границами. Если в системе отсутствует внешняя подкачка энергии и, кроме того, имеется затухание, связанное с диссипацией энергии, то произвольное начальное солитонное состояние в модели, в конечном счете, переходит в некоторое равновесное (статическое) решение, иногда называемое [4] статическим аттрактором. Широкий класс автомодельных решений нелинейных уравнений, например решения типа бегущих волн в подвижной системе координат, связанной с волной, также формально можно рассматривать как “статические”. Под равновесными решениями в общем случае понимаются, кроме статических, решения, периодические по времени, и квазипериодические решения.

Значительные трудности при исследовании устойчивости равновесных решений относительно малых пространственно-временных возмущений определяются наличием в моделях заданных или неизвестных геометрических и физических параметров — размеры системы и неоднородностей, структура неоднородностей, параметры, определяющие поведение полей на границах, вид и величину нелинейного взаимодействия элементов системы и т.д.

Во многих классических моделях физических систем постепенное изменение некоторого конкретного параметра соответствует единственному и непрерывному решению и линейная теория устойчивости достаточно хорошо описывает состояния системы. Однако, существует большое количество задач, в которых стабильность (устойчивость) и число решений резко изменяются при переходе параметра через некоторые критические значения. Такие явления, называемые обычно **ветвлениями** или **бифуркациями** [5] — [8], описывают качественные изменения в физической системе. Значения параметров, при которых в системе происходит бифуркация (рождение или уничтожение) решений, называются **бифуркационными** или **критическими**. Сам процесс перехода через критические значения параметров часто называется **критическим** или **бифуркационным** режимом системы. Геометрическое место точек в пространстве параметров, соответствующих бифуркациям решений, определяет в общем случае некоторую гиперповерхность, называемую **поверхностью бифуркаций** или **поверхностью катастроф** [8].

Смена характера устойчивости установившихся физических процессов при переходе некоторых параметров через их критические значения является ключом к объяснению большого количества физических эффектов, таких, как возникновение волн в непрерывных средах, зарождение вихрей в атмосфере, вихрей в теории сверхпроводимости и астрофизике и т.д.

В теоретическом аспекте знание бифуркационных зависимостей позволяет определить число равновесных решений и понять их структуру, оценить области изменения параметров, в которых можно ожидать устойчивость или неустойчивость системы и, возможно, описать происходящие при этом физические явления [4].

Для практических целей особо важна возможность экспериментальной проверки бифуркационных зависимостей, являющаяся важным источником информации для уточнения модели. В качестве конкретного примера укажем на методы изучения вихревых солитоноподобных структур магнитного потока в длинных джозефсоновских переходах (ДДП<sup>1</sup>), основанных на измерении (бифуркационной) зависимости критического тока от магнитного поля [9, 10].

К сожалению, аналитические выражения для поверхностей бифуркаций удастся получить преимущественно в достаточно простых моделях. Для большинства содержательных задач современной теоретической физики изучение бифуркационных зависимостей параметров возможно лишь путем применения адекватных численных методов и алгоритмов.

Традиционным инструментом исследования зависимости структурных решений от параметра являются методы продолжения по параметру, которые опираются преимущественно на численные методы решения задачи Коши. Однако, в окрестности поверхностей бифуркации такие методы применять затруднительно, поскольку на этих поверхностях происходит нарушение единственности решений. Поэтому создание численных методов, позволяющих найти и исследовать поведение решений в окрестности бифуркаций и построить поверхности бифуркаций этих решений, а также создание соответствующих комплексов компьютерных программ, реализующих эти методы, представляется весьма актуальной задачей математического моделирования.

## 1.2 Цели работы

Целями настоящей диссертационной работы являются:

- ✓ создание эффективного численного метода моделирования бифуркаций равновесных решений широкого класса уравнений физики при изменении параметров, входящих в уравнения и/или краевые условия, и построение соответствующих бифуркационных зависимостей между этими параметрами;
- ✓ создание на базе единого математического и алгоритмического подхода комплексов программ для численного моделирования бифуркаций равновесных решений и построения бифуркационных зависимостей;
- ✓ применение разработанных комплексов программ для расчета бифуркационных решений и зависимостей между параметрами в задачах:

---

<sup>1</sup>Список используемых сокращений приводится в конце настоящего автореферата.

- ▷ физики джозефсоновских переходов;
- ▷ физики звезд и черных дыр.

### 1.3 Научная новизна работы

Все представленные в настоящей диссертации научные результаты являются новыми.

В частности, в диссертации предложен оригинальный единообразный численный подход к исследованию устойчивости равновесных решений широкого класса задач теоретической физики при варьировании геометрических и физических параметров моделей. **Основная идея заключается в рассмотрении системы, состоящей из краевой задачи для равновесных состояний модели, порожденной линейной задачей на собственные значения с фиксированным собственным значением и подходящего условия нормировки как единой нелинейной спектральной задачи для одного из параметров модели при заданных прочих параметрах.** Объединяющим является использование непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН) и его обобщений [12] — [14] для вывода итерационных схем, а также применение метода коллокации сплайнами<sup>2</sup> для построения вычислительных схем. На этой основе разработан оригинальный, достаточно общий итерационный алгоритм прямого вычисления точек бифуркации равновесных (и, в частности, статических) решений при изменении параметров модели. Предлагаемый метод имеет существенные преимущества перед традиционными методами продолжения по параметру и представляет интерес для развития методов и алгоритмов численного решения нелинейных задач на собственные значения.

Наличие единообразного алгоритма дает возможность построить **пакет программ**, в котором для решения конкретной задачи требуется менять только модули ввода параметров и обработки результатов численного эксперимента.

В совокупности такой подход позволил путем построения и комбинации нескольких основных программных модулей решать весьма разнообразные задачи, имеющие самостоятельный физический интерес:

- ✓ исследование устойчивости и бифуркаций решений уравнения Гинзбурга-Ландау (ГЛ) при варьировании феноменологических коэффициентов и построение зависимостей сверхток-разность фаз для джозефсоновских переходов;
- ✓ изучение устойчивости и бифуркаций статических вихревых структур в неоднородных ДДП при изменении магнитного поля и тока, а также геометрии перехода и неоднородностей;
- ✓ исследование устойчивости солитонных решений нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) специального вида при изменении скорости солитона и параметра среды;
- ✓ изучение устойчивости статических конфигураций бозонных и бозонно-фермионных звезд в рамках скалярно-тензорных теорий гравитации с массивным дилатоном при изменении физических параметров модели, таких, как центральные плот-

<sup>2</sup> В работе [Б09] применялся также метод конечных элементов.

ности бозонной и фермионной материи, уравнений состояния фермионной материи, массы дилатона и т.д.;

- ✓ исследование бифуркаций горизонтов заряженных ЧД с массивным дилатоном в зависимости от величины заряда и массы дилатона.

Отметим, что все конкретные задачи, рассмотренные в настоящей диссертационной работе, имеют самостоятельный физический интерес и входят в список проблем. "... которые занимают особенно важное место в физике и астрофизике на рассматриваемый момент времени" [11].

#### 1.4 Достоверность результатов

Достоверность результатов диссертации обеспечивается проведением для всех рассмотренных физических моделей тестовых расчетов на сгущающихся сетках и расширяющихся интервалах и сравнением численных результатов с теоретическими оценками. Предсказанный нами физический эффект крестообразного перекрытия флюксонной и антифлюксонной ветвей на диаграмме зависимости критического тока от магнитного поля в неоднородном ДДП инициировал экспериментальную проверку и был подтвержден в независимом физическом эксперименте [9]. Путем усовершенствования модели ДДП удалось получить адекватное соответствие между результатами численных расчетов и экспериментом. Отдельные результаты настоящей работы в области физики джозефсоновских переходов и физики черных дыр были недавно воспроизведены независимым образом другими авторами [21, 22].

#### 1.5 Практическая ценность работы

С помощью созданного пакета программ получен ряд результатов, имеющих самостоятельный физический интерес. Разработанный пакет программ использовался для проведения вычислительных экспериментов в области физики джозефсоновских переходов, физики бозонных и бозонно-фермионных звезд, а также физики черных дыр. Модульная структура пакета позволяет использовать его для проведения расчетов бифуркационных зависимостей для уравнений широкого класса моделей физики.

#### 1.6 Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах в ЛИТ (ЛВТА) и ЛТФ ОИЯИ, Дубна, Софийском университете "Св. Кл. Охридский", Институте математики Болгарской АН, Факультете прикладной математики ВМЭИ, София, и следующих международных конференциях:

- + Conference Numerical Methods and Applications, August 1988, 1996, Sofia, Bulgaria;
- + Conference Equadiff - 4, Praha, 1988;
- + IVth International Workshop on Solitons and Applications, Dubna, August 1989;

- + Conference on **Differential Equations and Applications** August 1994, 1996 & 1997, Plovdiv, Bulgaria;
- + Conference on **Numerical Analysis and Applications**, August 1997, 1998, Russe, Bulgaria;
- + Международная школа **Приложения математики в технике и экономике** июль 1998, 1999, 2000, 2001, Созополь, Болгария;
- + 2-nd International Conference **Modern Trends in Computational Physics**, July 24-29, 2000, Dubna, Russia;
- + Seminar on **Algorithms for Scientific Computations**, Bulgarian Acad. Sci., 1999, 2000, Sofia, Bulgaria;
- + 2-nd International Workshop **Cooperative Phenomena in Condensed Matter**, August 2001, Pamporovo, Bulgaria;
- + 1-st First Advanced Research Workshop **Gravity, Astrophysics and Strings**, June 2002, Kiten, Bulgaria.

Исследования проводились в соответствии с тематическими планами ЛИТ ОИЯИ и были поддержаны грантами РФФИ, Министерства образования, науки и технологий Болгарии, Болгарского национального научного фонда и Фонда Софийского университета.

## 1.7 Публикации

По материалам диссертации опубликовано 24 работы, из которых 2 работы в российском научном журнале **Математическое моделирование** и 8 работ в западных научных журналах (**Physics Letters A**, **Physical Review D**, **Journal of Computational Physics**, **Superconducting Science and Technology**, **Modern Physics Letters A** и других).

## 1.8 Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации – 238 страниц машинописного текста, включая 113 рисунков, 5 таблиц и список литературы, содержащий 235 наименований.

## 1.9 Личный вклад автора

Автор диссертации, работая в коллективе соавторов из Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна, РФ, с Факультета математики и информатики и Физического факультета Софийского университета, University of Capetown, South Africa, а также из Технического университета, г. София, Болгария, был инициатором данных исследований и руководил разработкой численных методов. Он непосредственно участвовал в математической постановке, компьютерной реализации алгоритмов, а также в численном решении конкретных физических задач, обработке, анализе и интерпретации результатов численных экспериментов.

## 2 ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** приведен перечень проблем вычислительной физики, решению которых посвящена диссертация, и дан обзор истории их возникновения и развития. Обоснована актуальность диссертационной работы и сформулированы основные цели работы. Коротко изложено содержание различных разделов диссертации.

В **Главе 1, раздел 1.1** дана постановка задачи о вычислении бифуркационных кривых для равновесных решений широкого класса нелинейных уравнений с оператором, зависящим от некоторого множества параметров.

Пусть  $T$  — интервал на вещественной полупрямой  $[0, \infty)$ . Рассмотрим уравнение

$$\dot{u} + G(u, p) = 0. \quad (1)$$

Реальная или комплекснозначная вектор-функция  $u(t)$  (размерности  $M \geq 1$ ) определена на  $T$  со значениями в банаховом пространстве  $B$  с нормой  $\|\cdot\|_B$ . Через  $G$  обозначен нелинейный оператор, который определен на некотором множестве  $D \subset B$  и зависит также от  $K$ -вектора  $p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^K$  физических и геометрических параметров модели.

Многочисленные примеры физических моделей, уравнения которых сводятся к виду (1), можно найти, например, в работах [1] — [4], [7]. В виде (1) могут быть записаны уравнения физических моделей, рассматриваемых в настоящей работе.

Предположим, что в некоторой области  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^K$  изменения параметров уравнение (1) имеет **равновесное решение**  $u_s(p)$ , зависящее гладким образом от параметров и такое, что

$$G(u_s, p) = 0. \quad (2)$$

К равновесным решениям относятся решения статические, обусловленные, например, диссипацией в модели [4], решения широкого класса задач в автомобильных переменных [19, 20], решения задач теории поля с осциллирующей во времени фазой и статической амплитудой [3] и ряд других.

В предположении о существовании равновесных решений, каждому такому решению сопоставляется **линейная задача на собственные значения**

$$A(p) \psi = \kappa \psi, \quad (3)$$

с подходящим **условием нормировки**

$$N[\psi] = 0. \quad (4)$$

Здесь линейный оператор  $A \equiv G'_u$  есть производная Фреше нелинейного оператора  $G(u)$  в точке  $u_s \in D$ , а  $N[\psi]$  — заданный дифференцируемый по Фреше функционал. Будем предполагать, что в некоторой области  $\mathcal{P}$  пространства параметров спектр оператора  $A(p)$  является дискретным. Пусть  $\lambda(p) = \min \operatorname{Re} \kappa_i(p)$ . Тогда условие устойчивости равновесного решения  $u_s(p)$  имеет вид  $\lambda(p) > 0$ . При  $\lambda(p) < 0$  равновесное решение является неустойчивым.

Уравнение

$$\lambda(p) = 0, \quad (5)$$



определяет в пространстве параметров поверхность бифуркаций решения  $u_s$ .

Для вычисления точек бифуркаций система, состоящая из уравнения для равновесных состояний (2), уравнения линейной задачи на собственные значения (3) и условия нормировки (4), рассматривается как единое нелинейное функциональное уравнение для функций  $u(p)$ ,  $\psi(p)$  и одного из  $K$  параметров  $p$ , который будем обозначать через  $\xi$ , выбирая без ограничения общности  $\xi \equiv p_1$ . Остальные  $K - 1$  параметров предполагаются известными. Собственное значение линейной задачи (3) также считается фиксированным (например, равным нулю). Тем самым, указанная система переходит в обратную задачу на собственные значения для параметра  $\xi$ .

В разделе 1.2 для решения указанной нелинейной задачи на собственные значения применяется непрерывный аналог метода Ньютона (НАМН)<sup>3</sup>. На каждом шаге итерационного процесса решаются две пары линейных уравнений для приращений  $(U_1, U_2)$  и  $(\Psi_1, \Psi_2)$  собственных функций

$$\begin{aligned} A(\xi)U_1 &= -G(u, \xi), \\ A(\xi)U_2 &= -G'_u(u, \xi); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} [A(\xi) - \lambda I] \Psi_1 &= -A'_u(\xi)\psi U_1 - [A(\xi) - \lambda I]\psi, \\ [A(\xi) - \lambda I] \Psi_2 &= -A'_u(\xi)\psi U_2 - A'_\xi(\xi). \end{aligned} \quad (7)$$

Поправка  $P$  для собственного значения находится из уравнения

$$P = -(N'[\psi] \Psi_2)^{-1} (N[\psi] + N'[\psi] \Psi_1), \quad (8)$$

вытекающего из условия нормировки (4). Если  $(u^k, \psi^k, \xi^k)$  есть приближенное решение задачи на  $k$ -ой итерации ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), то очередное приближение  $(u^{k+1}, \psi^{k+1}, \xi^{k+1})$  к точному решению вычисляется по формулам

$$u^{k+1} = u^k + \tau_k (U_1^k + P^k U_2^k), \quad (9a)$$

$$\psi^{k+1} = \psi^k + \tau_k (\Psi_1^k + P^k \Psi_2^k), \quad \xi^{k+1} = \xi^k + \tau_k P^k. \quad (9b)$$

На каждой итерации  $k$  оптимальный шаг  $\tau_k$  удобно вычислять по приближенной формуле<sup>4</sup> Ермакова — Калиткина [14].

В специальных случаях, когда удается получить решение задачи (2) в аналитическом виде, вычисление соответствующих этому решению точек бифуркаций сводится к обратной задаче на собственные значения — требуется найти значение параметра  $\xi$ , при котором выполняется условие  $\lambda(\xi) = 0$ . Основные уравнения ньютоновской итерационной схемы для таких задач имеют вид (7), (8) и (9b).

Во многих моделях уравнения (6) и (7) представляют собой краевые задачи для дифференциальных уравнений второго порядка. Для численного решения таких задач в разделе 1.3 предложена сплайн-коллокационная разностная схема повышенного порядка точности. Схема отличается простотой реализации на равномерных и неравномерных сетках и допускает простое обобщение на задачи с разрывами производных. Приведен эффективный экономичный метод решения возникающей алгебраической блочно-диагональной системы уравнений. Возможности схемы демонстрируются на конкретных тестовых примерах.

<sup>3</sup> Список сокращений приводится на стр. 28 настоящего автореферата.

<sup>4</sup> Общая задача определения оптимального шага подробно рассмотрена в обзоре [13].

**Глава 2** посвящена исследованию бифуркаций равновесных решений уравнений для ряда моделей физики конденсированных сред.

В разделе 2.1 при помощи модифицированного уравнения Гинзбурга-Ландау (ГЛ) рассматривается построение зависимостей вида сверхток-разность фаз для джозефсоновских переходов.

Пусть  $z \in (-L, -d) \cup (d, L)$  и  $z \in (-d, d)$ ,  $0 < d \ll L < \infty$  — области, занятые сверхпроводниками и барьерным слоем перехода соответственно. Тогда основная система уравнений в переменных амплитуда  $R(z)$  — фаза  $\varphi(z)$  параметра порядка имеет вид

$$-\frac{1}{m(z)}R'' + a(z)R + b(z)R^3 + \frac{m(z)J^2}{R^3} = 0, \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} R'(-L) &= 0, \quad R'(L) = 0, \\ m_0 R'(-d-0) &= R'(-d+0), \quad R'(d-0) = m_0 R'(d+0); \\ -\frac{1}{m(z)}\psi'' + q(z, p)\psi &= \lambda\psi, \end{aligned} \quad (10b)$$

$$\begin{aligned} \psi'(-L) &= 0, \quad \psi'(L) = 0, \\ m_0 \psi'(-d-0) &= \psi'(-d+0), \quad \psi'(d-0) = m_0 \psi'(d+0), \\ \int_{-L}^L \psi^2(z) dz &= 1, \end{aligned} \quad (10c)$$

где потенциал задачи Штурма-Лиувилля (ЗШЛ) (10b) определяется по формуле

$$q(z, p) = a(z) + 3b(z)R^2(z, p) - 3m(z)J^2/R^4(z, p).$$

Предполагается, что физические свойства отдельных слоев перехода могут существенно различаться, что моделируется заданными кусочно-постоянными функциями  $a(z)$ ,  $b(z)$  и  $m(z)$ .

Если  $R(z)$  — некоторое решение (10a), то соответствующий ему ток  $J$  вычисляется при помощи первого интеграла

$$\frac{1}{m(z)}R^2\varphi' = J.$$

Показано, что при фиксированных значениях параметров задача имеет несколько различных решений с различными энергиями. Построены соответствующие каждому решению кривые вида ток  $J$  — разность фаз  $\Delta\varphi$ . Конкретные примеры кривых вида  $J(\Delta\varphi)$ , полученных численным путем, демонстрируются на рис. 1 (параметры  $g_1$ ,  $g_2$  и  $g_3$  определяются через ГЛ-коэффициенты и введены с целью сравнения с результатами [16]). Показано, что каждая кривая состоит из трех ветвей, соответствующих устойчивому (дуга  $BB$  на рис. 1) и неустойчивому состояниям амплитуды параметра порядка  $R(z)$ . Критический ток в джозефсоновском переходе соответствует точкам  $B$  бифуркации решений (точке склейки ветвей). Построены примеры бифуркационных зависимостей, связывающих критический ток с феноменологическими коэффициентами ГЛ-уравнения.

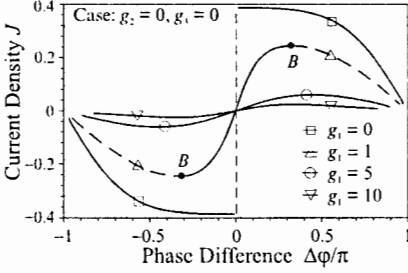


Рис. 1. Кривые  $J(\Delta\varphi)$

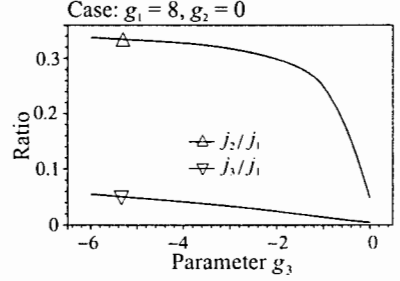


Рис. 2. Влияние параметра  $g_3$

Идеальная джозефсоновская зависимость  $J = j_c \sin \Delta\varphi$ , где  $j_c$  — максимальный (критический) ток Джозефсона, имеет место при  $g_2 = 0$ ,  $g_3 = 0$  и при больших значениях  $g_1$  ( $g_1 > 8$ ) [16]. В общем случае, следуя Лихареву [17], предположим, что  $J(\Delta\varphi)$  является нечетной аналитической функцией и, следовательно, разлагается в ряд по синусам с коэффициентами  $j_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Для изучения влияния ГЛ-коэффициентов на кривые зависимости ток-фаза применяется численное Фурье-разложение. Показано, что в случае неравных эффективных масс носителей в слоях контакта ( $m(z) \neq 1$ ) амплитудой второй гармоники  $j_2$  нельзя пренебрегать по сравнению с основной амплитудой  $j_1$  (см. рис. 2). Физически этот результат указывает область применимости двойного  $\sin$ -Гордон уравнения для описания процессов в ДДП.

Влияние кубического члена в уравнении (10а) на джозефсоновский режим малосущественно.

**Раздел 2.2** посвящен изучению бифуркаций равновесных распределений магнитного потока в неоднородных ДДП.

Рассмотрены (**раздел 2.2.1**) некоторые модели амплитуды джозефсоновского тока для неоднородных ДДП, применяемые в численных экспериментах. Сформулированы краевые задачи и порожденные ЗШТЛ для статических распределений магнитного потока  $\varphi(x)$  в ДДП в зависимости от геометрии перехода. В частности, для перехода с overlap-геометрией система уравнений (2)–(4) принимает следующий вид

$$-\varphi'' + j_D(x) \sin \varphi + \gamma = 0, \quad \varphi'(\pm L) = h_B; \quad (11a)$$

$$-\psi'' + q(x, p)\psi = \lambda\psi, \quad \psi'(\pm L) = 0, \quad (11b)$$

$$\int_{-L}^L \psi^2(x) dx - 1 = 0. \quad (11c)$$

Здесь  $j_D(x)$  есть непрерывная функция, моделирующая распределение амплитуды джозефсоновского тока, а через  $\gamma$  и  $h_B$  обозначены ток смещения и граничное магнитное поле. Потенциал ЗШТЛ (11b) определяется по формуле

$$q(x, p) \equiv j_D(x, \mu, x_0) \cos \varphi(x, p).$$

Приведены схемы расчета бифуркационных кривых вида ток-граничное магнитное поле при заданном токе — **раздел 2.2.2** и при заданном граничном магнитном поле — **раздел 2.2.3**.

Результаты численных экспериментов обсуждаются в **разделе 2.2.4**. Исследована иерархия цепочек вихрей магнитного поля в ДДП. Показано, что в неоднородном ДДП устойчивыми являются только цепочки из четного числа флюксонов  $\Phi$  и/или антифлюксонов  $\bar{\Phi}$  с учетом флюксона/антифлюксона, локализованного на неоднородности (см. рис. 3). В отличие от однородных, в неоднородных ДДП существенно проводить разницу между чистыми и смешанными цепочками вихрей. **Чистой** называем цепочку, которая является результатом нелинейного взаимодействия только флюксонов либо только антифлюксонов. На рис. 3 чистые цепочки вихрей представлены кривыми<sup>5</sup> с печетными номерами: кривая 1 соответствует основному флюксону  $\Phi$  магнитного поля, 3 — цепочке  $\Phi^3$  из трех флюксонов и 5 — цепочке  $\Phi^5$  из пяти флюксонов. **Смешанные цепочки вихрей** представляют собой цепочки образования из флюксонов и антифлюксонов. Примерами смешанных цепочек на рис. 3 представляют кривые с номерами 2 (цепочка  $\Phi^2\bar{\Phi}$ ) и 4 (цепочка  $\Phi^3\bar{\Phi}^2$ ).

Цепочки вихрей в ДДП характеризуются функционалом

$$H[\varphi](p) = \frac{1}{2L\pi} \int_{-L}^L \varphi(x, p) dx, \quad (12)$$

определенным на множестве решений задачи (11а). Геометрически величина (12) представляет собой площадь вихря, отнесенную к его длине, т.е. является **высотой центра вихря**. Нормировка на  $\pi$  введена для удобства. Для “бесконечного” ДДП выражение (12) следует понимать в смысле предельного перехода при  $L \rightarrow \infty$ .

**Квантование вихрей** в ДДП характеризуется следующими утверждениями:

1. Значение функционала  $H[\varphi]$  для чистого решения  $\varphi(x, p)$  равно:

$$H[\varphi] = N_f, \quad (13)$$

где  $N_f$  — число вихрей в цепочке. При  $\gamma = 0$  вакуумному состоянию соответствует  $N_f = 0$ , для основного флюксона/антифлюксона число  $N_f = 1$ . Если  $\gamma \neq 0$ , то число  $N_f$  не является целым за счет сдвига током центра вихря от центра неоднородности;

2. Пусть  $\varphi(x, p)$  и  $\bar{\varphi}(x, p)$  — пара смешанных состояний, соответствующих заданному  $h_B$  и  $\gamma = 0$ . Тогда

$$H[\varphi] + H[\bar{\varphi}] = 2N_f.$$

3. Каждая критическая кривая  $\gamma = \gamma_c(h_B)$  имеет ровно два нуля  $h_l < h_r$ .
4. Нулям  $h_l$  и  $h_r$  критической кривой  $\gamma_c(h_B)$  соответствуют либо единственное чистое состояние магнитного потока (на рис. 3 такими являются решения 1, 3 и 5), либо пара смешанных состояний (на рис. 3 это решения 2 и 4).

<sup>5</sup> Для визуального удобства показаны солитонные цепочки из производных  $\varphi'(x)$ .

5. Пусть  $\varphi_{\pm}(x, p)$  — решение, соответствующее правому  $h_+$  или левому  $h_-$  нулю одной и той же критической кривой. Тогда значения  $H[\varphi_-]$  и  $H[\varphi_+]$  функционала (12) для чистых решений  $\varphi_{\pm}(x, p)$ , соответствующих левому/правому нулю критической кривой, связаны условием:

$$H[\varphi_+] = H[\varphi_-] + 2.$$

6. Пусть  $\varphi_{\pm}^{(1)}(x, p)$  и  $\varphi_{\pm}^{(2)}(x, p)$  — пары смешанных состояний, соответствующих правому/левому нулю критической кривой. Тогда

$$H[\varphi_-^{(1)}] + H[\varphi_-^{(2)}] = 2N_f,$$

$$H[\varphi_+^{(1)}] + H[\varphi_+^{(2)}] = H[\varphi_-^{(1)}] + H[\varphi_-^{(2)}] + 2.$$

В таблице приведены результаты численного эксперимента, подтверждающие выводы по пунктам 1 ÷ 6. Эксперимент проводился для ДДП с перекрывающейся геометрией и геометрическими параметрами  $2L = 6.3$  и  $\mu = 0.8$  при токе смещения  $\gamma = 0$ . Значения в первом столбце соответствуют номерам на рис. 3, номер “-1” формально присвоен антифлюксону  $\bar{\Phi}$ . Во втором столбце показан вид вихря. Остальные столбцы содержат последовательно:  $h_B$  — бифуркационные значения магнитного поля (собственные значения нелинейной задачи (11));  $\Delta\varphi = \varphi(L) - \varphi(-L)$  — значения полного магнитного потока, вычисленные для соответствующих собственных функций  $\varphi(x)$  и  $H[\varphi]$  — высоты центров собственных функций  $\varphi(x)$ .

Number	Vortex	$h_B$	$\Delta\varphi$	$H[\varphi]$
7	$\bar{\Phi}^7$	6,27	6,114	7
6	$\bar{\Phi}^3\bar{\Phi}^2$	4,689	4,687	6,5936
6	$\bar{\Phi}^2\bar{\Phi}^3$	4,689	4,687	5,4064
3	$\bar{\Phi}^3$	4,652	4,824	3
5	$\bar{\Phi}^5$	4,377	4,163	5
4	$\bar{\Phi}^3\bar{\Phi}^2$	4,32	4,299	5,3767
4	$\bar{\Phi}^2\bar{\Phi}^3$	4,32	4,299	4,6233
2	$\bar{\Phi}^2\bar{\Phi}$	2,796	2,695	4,552
2	$\bar{\Phi}\bar{\Phi}^2$	2,796	2,695	3,448
1	$\bar{\Phi}$	2,566	2,094	1
3	$\bar{\Phi}^3$	2,532	2,836	3
2	$\bar{\Phi}^2\bar{\Phi}$	2,252	2,237	2,6147
2	$\bar{\Phi}\bar{\Phi}^2$	2,252	2,237	3,3853
0	$M$	2,025	0,982	0
-1	$\bar{\Phi}$	1,013	-0,464	1

На рис. 4 показаны типичные критические зависимости  $\lambda_{min}(h_B)$  минимального собственного значения задачи Штурма-Лиувилля от граничного магнитного поля для некоторых устойчивых распределений магнитного потока в ДДП. Ввиду симметрии относительно вертикальной оси, демонстрируется только часть  $h_B \geq 0$  полной картины. Точки пересечения кривых с горизонтальной осью соответствуют точкам бифуркации решений. В частности, точка  $B_0$  есть точка бифуркации Мейсснеровского (вакуумного)

решения, а через  $B_1$  обозначены точки бифуркации флюксона  $\Phi$  и антифлюксона  $\bar{\Phi}$ . Точки  $B_3$  и  $B_5$  на рис. 4 соответствуют чистым цепочкам из трех ( $\Phi^3$ ) и пяти ( $\Phi^5$ ) флюксонов в ДДП, а точки  $B_2$  — смешанным флюксон-антифлюксонным состояниям вида  $\Phi\bar{\Phi}^2$  и  $\Phi^2\bar{\Phi}$ . Аналогично, точки  $B_4$  соответствуют бифуркациям смешанных вихрей  $\Phi^3\bar{\Phi}^2$  и  $\bar{\Phi}^2\Phi^3$ .

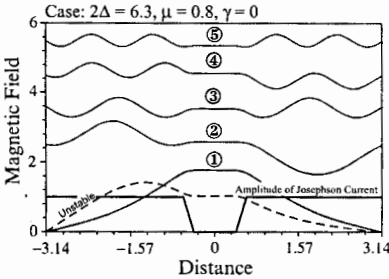


Рис. 3. Цепочки флюксонов в неоднородном ДДП

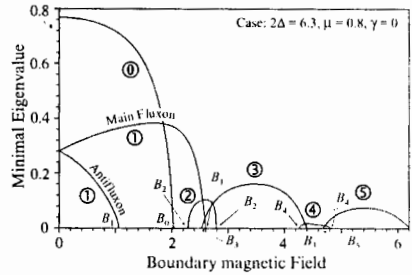


Рис. 4. Зависимость  $\lambda_{min}(h_B)$

Построены бифуркационные кривые для основных вихрей магнитного потока в ДДП (см. рис. 5). Численным путем в диссертации **предсказан новый физический эффект**, обусловленный наличием неоднородности: в нулевом магнитном поле (т.е. при  $h_B = 0$ ) кривые зависимости  $\gamma_c(h_B)$ , соответствующие основному флюксону  $\Phi$  и антифлюксону  $\bar{\Phi}$  в ДДП, пересекаются, образуя **флюксон-антифлюксонный крест** (точка  $C_O$  на рис. 5). Для сравнения на этом же рисунке штрих-пунктирными линиями изображены критические кривые для основного флюксона  $\Phi$  и антифлюксона  $\bar{\Phi}$  в однородном ДДП. Этот эффект был экспериментально подтвержден в работе [9].

Наклон  $\gamma'_c(h_B)$  критических кривых в точках пересечения существенно определяется геометрическими параметрами перехода — с увеличением длины ДДП наклон быстро падает, а точка пересечения  $C_O$  поднимается вверх. Этот эффект демонстрируется на рис. 5 расчетной критической кривой для основного флюксона  $\Phi$ , обозначенной через  $E$ , которая соответствует длине  $2L = 15$  образца в эксперименте [9].

Критическая кривая для ДДП при заданных геометрических параметрах строится как огибающая бифуркационных кривых для отдельных устойчивых решений. На рис. 6 демонстрируются результаты численного эксперимента<sup>6</sup> для конкретного примера ДДП с overlap-геометрией, длиной  $2L = 6.3$  с одной микронеоднородностью размером  $\mu = 0.8$  в центре.

Отметим, что все существенные качественные особенности экспериментальных кривых [9, 10] четко прослеживаются на рис. 6. При не слишком больших  $h_B$  пики  $M$  критического тока для цепочки из  $N_f$  однопятных вихрей выше, чем для смешанной цепочки — на рис. 6 пики критических токов для смешанных цепочек 2 ( $\Phi\bar{\Phi}^2, \Phi^2\bar{\Phi}$ ) и 4 ( $\bar{\Phi}^2\Phi^3, \Phi^3\bar{\Phi}^2$ ) ниже пиков критических токов для соседних вихрей 1 ( $\Phi$ ), 3 ( $\Phi^3$ )

<sup>6</sup> С целью сравнения на вставке показана экспериментальная кривая [10] для ДДП с решеткой неоднородностей.

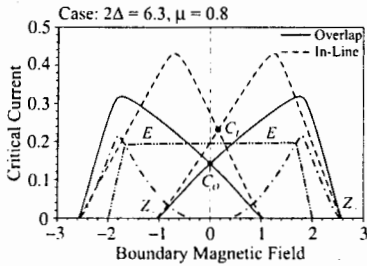


Рис. 5. Кресты критических кривых для однофлюксонных состояний

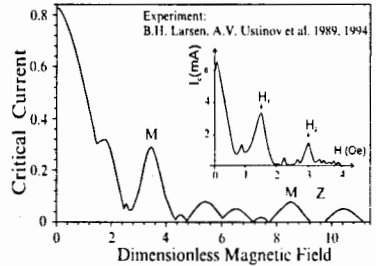


Рис. 6. Критическая кривая для ДДП с overlap-геометрией

и 5 ( $\Phi^5$ ). В тоже время, пики критических токов для состояний 6 ( $\bar{\Phi}^3\Phi^1, \Phi^1\bar{\Phi}^3$ ) и 8 ( $\bar{\Phi}^1\Phi^5, \Phi^5\bar{\Phi}^1$ ) существенно выше соответствующего пика для состояния 7 ( $\Phi^7$ ).

На участках, обозначенных на рис. 6 буквой Z, критический ток в ДДП равен нулю. В этом случае собственная функция  $\varphi(x)$  нелинейной задачи (11) является неустойчивым распределением магнитного потока в ДДП для каждого  $h_B$  из интервала Z. Такой эффект для ДДП, содержащих решетку неоднородностей, был экспериментально обнаружен в работе [10], где Z-участки названы зонами затухания. Результаты проведенного численного эксперимента показывают, что в рамках модели этот эффект следует ожидать и в ДДП с одной микронеоднородностью.

В разделе 2.3 впервые рассмотрена задача о бифуркациях связанных состояний магнитного поля в простой модели двухслойного джозефсоновского перехода с неоднородностью резистивного типа в одном из барьерных слоев. Такая система моделируется скалярными функциями  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ , пропорциональными распределением магнитного потока вдоль перехода. Величины  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  удовлетворяют уравнениям

$$-\varphi_1'' - \alpha\varphi_2'' + j_D(x) \sin \varphi_1 + \gamma = 0, \quad (14a)$$

$$-\alpha\varphi_1'' - \varphi_2'' + \sin \varphi_2 + \gamma = 0, \quad (14b)$$

$$\varphi_1'(\pm L) - h_B = 0, \quad \varphi_2'(\pm L) - h_B = 0. \quad (14c)$$

Здесь  $0 \leq \alpha < 1$  — константа связи между слоями, непрерывная функция  $j_D(x)$  моделирует амплитуду джозефсоновского тока в первом переходе (для второго перехода  $j_D(x) \equiv 1$ ).

Устойчивость или неустойчивость решения  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  системы (14a) определяется знаком минимального собственного значения ЗШТЛ

$$-\psi_1'' - \alpha\psi_2'' + q_1(x)\psi_1 = \lambda\psi_1, \quad (15a)$$

$$-\alpha\psi_1'' - \psi_2'' + q_2(x)\psi_2 = \lambda\psi_2, \quad (15b)$$

$$\psi_1'(\pm L) = 0, \quad \psi_2'(\pm L) = 0, \quad (15c)$$

где  $q_1(x) = j_D(x) \cos \varphi_1(x)$  и  $q_2(x) = \cos \varphi_2(x)$ .

Численная схема на основе НАМН расчета бифуркационных кривых для двухслойных ДДП изложена в разделе 2.3.1.

Численный эксперимент (раздел 2.3.2) показывает наличие в таком ДДП стабильных решений двух основных типов. В первом случае магнитный поток локализован на неоднородности в барьерном слое, а в однородном переходе имеется аналогичное распределение потока, смещенное от центра, причем знак обоих распределений совпадает. Во втором случае первый вихрь снова локализован на неоднородности, а второй вихрь имеет полный магнитный поток противоположного знака и локализован в центре ДДП.

Методом, изложенным в разделе 1.2, вычислены бифуркационные кривые для указанных решений. Проведен подробный анализ влияния константы связи между слоями перехода на бифуркационные кривые.

В разделе 2.4 изучаются статические распределения магнитного поля в джозефсоновских решетках — ДДП, барьерный слой которых содержит цепочку периодически расположенных неоднородностей.

Постановка соответствующей краевой задачи с периодическими граничными условиями для джозефсоновской решетки описана в разделе 2.4.1.

Исследовано поведение устойчивых состояний при изменении расстояния между центрами неоднородностей и их шириной  $\mu$ . Изучена зависимость размера области изменения внешнего тока, в которой существуют устойчивые решения, от параметра  $\mu$ . При некотором соотношении между шириной неоднородностей и расстоянием между их центрами состояния магнитного потока в контакте имеют наибольший интервал допустимого изменения внешнего тока.

Численные результаты показывают, что бифуркационным кривым вида ток-магнитное поле для ДДП с решеткой неоднородностей качественно присущи все основные эффекты, имеющие место для ДДП с одной неоднородностью — раздел 2.4.2.

В разделе 2.5 решена задача о вычислении минимальной длины ДДП, обеспечивающей устойчивость заданного распределения магнитного потока. Такая постановка позволяет рассматривать как длинный такой переход, в котором есть нетривиальное устойчивое состояние магнитного потока при фиксированных значениях прочих геометрических и физических параметров. Джозефсоновский переход, в котором устойчивым является лишь вакуумное состояние или есть только неустойчивые состояния, рассматривается как короткий.

Исходная задача с неизвестными границами сводится (раздел 2.5.1) к нелинейной задаче на собственные значения

$$-\varphi'' + L^2[j_D(\xi) \sin \varphi + \gamma] = 0, \quad (16a)$$

$$\varphi'(\pm 1) - L h_B = 0, \quad (16b)$$

$$-\psi'' + L^2[j_D(\xi) \cos \varphi - \lambda] \psi = 0, \quad (16c)$$

$$\psi'(\pm 1) = 0, \quad (16d)$$

$$L \int_{-1}^1 \psi^2(\xi) d\xi - 1 = 0, \quad (16e)$$

спектральным параметром в которой является полудлина перехода  $L$ .

Метод решения задачи (16), основанный на НАМН, изложен в разделе 2.5.2.

В разделе 2.5.3 численным путем показано, что каждому устойчивому или неустойчивому состоянию магнитного потока соответствует минимальная длина ДДП, для

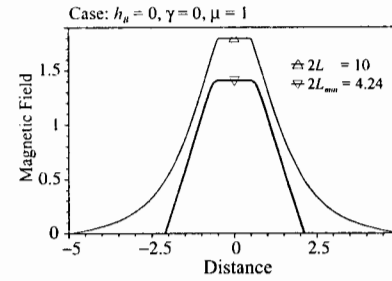


Рис. 7. Флюксон  $\Phi$  минимальной длины (кривая  $\nabla$ )

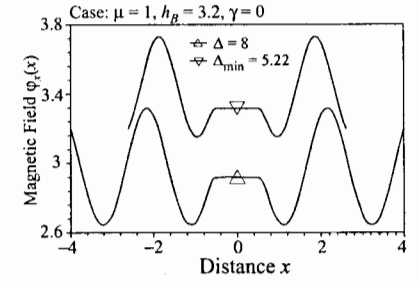


Рис. 8. Цепочка  $\Phi^3$  минимальной длины (кривая  $\nabla$ )

которой это состояние сохраняет свою устойчивость/неустойчивость. В частности, показано, что при нулевом токе и нулевом граничном магнитном поле минимальная длина неоднородного ДДП для основного флюксона есть  $2L \simeq 4.24$ , что полностью соответствует замечанию в работе [15].

Примеры численных решений минимальной длины показаны на рис. 7 и рис. 8.

Подробно исследовано влияние остальных геометрических и физических параметров на минимальную длину ДДП.

В разделе 2.6 изучается обратная спектральная задача, порожденная семейством аналитических решений уравнения Шредингера с кубической нелинейностью (НУШ), названных “пузырьковыми солитонами” [20]. Конкретное решение из этого семейства определяется двумя параметрами  $A$  и  $v$ . Первый параметр  $A$  характеризует среду, в которой движется солитон, а второй  $v$  есть скорость солитона. Солитон устойчив, если его скорость больше некоторой критической скорости, зависящей от среды.

Математическая формулировка задачи, приведенная в разделе 2.6.1, сводится к определению значения скорости солитона, при которой собственное значение порожденной семейством решений НУШ линейной задачи на собственные значения обращается в ноль.

В разделе 2.6.2 описан метод решения соответствующей нелинейной задачи на собственные значения, в которой скорость  $v$  является спектральным параметром.

Анализ результатов численного эксперимента приведен в разделе 2.6.3. Показано, что критическая скорость солитона монотонно возрастает с ростом параметра среды.

Глава 3 посвящена моделированию критических режимов в астрофизике. Объектом изучения являются модели скалярно-тензорных теорий гравитации с массивным дилатоном, которые оцениваются как наиболее естественные и многообещающие обобщения общей теории относительности (ОТО). В этих теориях гравитация описывается не только тензорным полем метрики пространства-времени, а также и скалярным дилатонным полем.

В разделе 3.1 изучается влияние дилатона ненулевой массы на устойчивость равновесных конфигураций бозонной звезды. Математическая модель представляет собой



нелинейную задачу на собственные значения, в которой спектральным параметром является частота  $\Omega$  бозонного поля (раздел 3.1.1)

$$\nu'' = -\frac{1}{r}\nu' + \left\{ -\frac{1}{r}\nu' + T_0^0 - T_1^1 + 2T_2^2 - \gamma^2 V(\varphi) + \frac{r}{2}\nu' [T_0^0 + T_1^1 + \gamma^2 V(\varphi)] \right\} e^\lambda, \quad (17a)$$

$$\varphi'' = -\frac{1}{r}\varphi' + \left\{ -\frac{1}{r}\varphi' + \frac{\alpha}{2}T + \frac{1}{4}\gamma^2 \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} + \frac{r}{2}\varphi' [T_0^0 + T_1^1 + \gamma^2 V(\varphi)] \right\} e^\lambda, \quad (17b)$$

$$\sigma'' = -\frac{1}{r}\sigma' - 2\alpha\varphi'\sigma' + \left\{ -\frac{1}{r}\sigma' + 2A^2(\varphi) \frac{dW(\sigma^2)}{d\sigma^2} \sigma - \Omega^2 e^{-\nu}\sigma + \frac{r}{2}\sigma' [T_0^0 + T_1^1 + \gamma^2 V(\varphi)] \right\} e^\lambda. \quad (17c)$$

Здесь  $\nu(r)$  — метрическая функция,  $\varphi(r)$  — дилатонное поле,  $V(\varphi)$  — задаваемый потенциал дилатонного поля,  $\gamma$  — масса дилатона,  $\sigma(r)$  — бозонное поле,  $\Omega$  — частота бозонного поля,  $W(\sigma^2)$  — заданная функция (потенциал бозонного поля),  $\alpha$  — параметр. Компоненты тензора энергии-импульса  $T_\mu^\mu$ , его след  $T$ , а также величины  $e^\lambda$ , сложным образом зависят от координаты  $r \in (0, \infty)$ , от неизвестных функций  $\nu(r)$ ,  $\varphi(r)$ ,  $\sigma(r)$ , неизвестного параметра  $\Omega$  и заданных потенциалов и параметров. На неизвестные функции накладываются следующие граничные условия

$$\nu(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \sigma'(0) = 0, \quad (18a)$$

$$\nu(\infty) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0, \quad \sigma(\infty) = 0. \quad (18b)$$

Для замыкания задачи задается дополнительное условие “нормировки”

$$\sigma(0) = \sigma_c, \quad (19)$$

где параметр  $\sigma_c$  — плотность бозонной материи в центре звезды.

В разделе 3.1.2 изложен метод решения, основанный на НАМН. Порожденные линейные задачи вида (6), (7) решаются при помощи сплайн-коллокационной схемы (раздел 1.3).

Обсуждение результатов численных экспериментов дано в разделе 3.1.3. Показано, что бозонные звезды с массивным дилатоном могут существовать в очень широком диапазоне изменения массы дилатона  $\gamma$ . Однако, при достаточно больших значениях  $\gamma$  восстанавливается конфигурация звезды из ОТО. Масса дилатонной звезды всегда меньше массы в ОТО. Продемонстрирован пример бифуркации решений при изменении массы покоя звезды (см. рис. 10).

В разделе 3.2 численно изучаются модели статических бозонно-фермионных сферически-симметричных звезд, базирующихся на скалярно-тензорных теориях гравитации с учетом массивного дилатона.

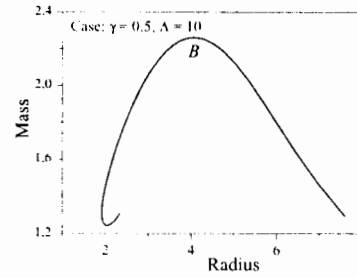


Рис. 9. Зависимость массы звезды от радиуса

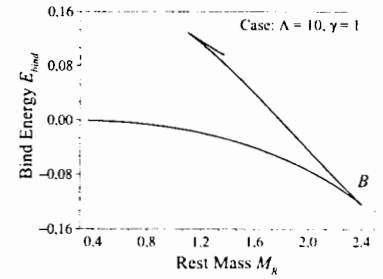


Рис. 10. Энергия связи  $E_{bind}(E_R)$

Математическая постановка приведена в разделе 3.2.1. Основные переменные модели — метрические функции  $\lambda(r)$  и  $\nu(r)$ , дилатонное поле  $\varphi(r)$ , плотности бозонной  $\sigma(r)$  и фермионной  $\mu(r)$  материи, удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\lambda}{dr} = F_1 \equiv \frac{1 - \exp(\lambda)}{r} + r \left\{ \exp(\lambda) \left[ T_0^0 + T_1^1 + \frac{1}{2}\gamma^2 V(\varphi) \right] + \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \right\}. \quad (20a)$$

$$\frac{d\nu}{dr} = F_2 \equiv -\frac{1 - \exp(\lambda)}{r} - r \left\{ \exp(\lambda) \left[ T_1^1 + T_2^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 V(\varphi) \right] - \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \right\}. \quad (20b)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = F_3 \equiv -\frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{2} (F_1 - F_2) \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{2} \exp(\lambda) \left[ \alpha(\varphi) \left( \frac{F}{T} + \frac{B}{T} \right) + \frac{1}{2}\gamma^2 V'(\varphi) \right]. \quad (20c)$$

$$\frac{d^2\sigma}{dr^2} = F_4 \equiv -\frac{2}{r} \frac{d\sigma}{dr} + \left[ \frac{1}{2} (F_1 - F_2) - 2\alpha(\varphi) \frac{d\varphi}{dr} \right] \frac{d\sigma}{dr} - \sigma \exp(\lambda) \left[ \Omega^2 \exp(-\nu) + 4\sigma A^2(\varphi) W'(\sigma) \right]. \quad (20d)$$

$$\frac{d\mu}{dr} = F_5 \equiv -\frac{g(\mu) + f(\mu)}{f'(\mu)} \left[ \frac{1}{2} F_2 + \alpha(\varphi) \frac{d\varphi}{dr} \right]. \quad (20e)$$

Независимая переменная  $r \in [0, R_s] \cup [R_s, \infty)$ , где  $R_s$  — неизвестный радиус фермионной части звезды. Параметр  $\Omega$  — неизвестная частота осцилляций бозонной материи. Величины  $T_n^F$ ,  $T_n^B$ ,  $n = 0, 1$  являются диагональными компонентами тензоров энергии-импульса, а  $T$ ,  $T$  — соответствующие следы. Величины  $\alpha(\varphi)$ ,  $A(\varphi)$ ,  $V(\varphi)$ ,  $W(\sigma)$ ,  $f(\mu)$  и  $g(\mu)$  являются заданными функциями, а  $\gamma$  — масса дилатона.

Краевые условия задаются в виде

$$\lambda(0) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dr}(0) = 0, \quad \frac{d\sigma}{dr}(0) = 0, \quad \sigma(0) = \sigma_c, \quad \mu(0) = \mu_c. \quad (21a)$$

$$\mu(R_s) = 0. \quad (21b)$$

$$\nu(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad \varphi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad \sigma(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad (21c)$$

Здесь  $\sigma_c$  и  $\mu_c$  — центральные плотности бозонной и фермионной материи.

Так как фермионная материя  $\mu(r)$  распределена только внутри звезды (при  $r < R_s$ ), то система (20) состоит из различного числа уравнений при  $r < R_s$  и  $r > R_s$ .

Для решения задачи предложены и реализованы два метода. В первом из них путем замены переменных  $x = r/R_s$ ,  $x \in [0, \infty)$ , параметр  $R_s$  входит явным образом в уравнения (20) и условия (21), а положение неизвестной границы фермионной части звезды фиксируется в точке  $x = 1$ . Поставленная таким образом задача является двухпараметрической нелинейной задачей на собственные значения относительно величины  $R_s$  и  $\Omega$ . Дальнейшее ее решение аналогично описанному в разделе 1.1 диссертационной работы.

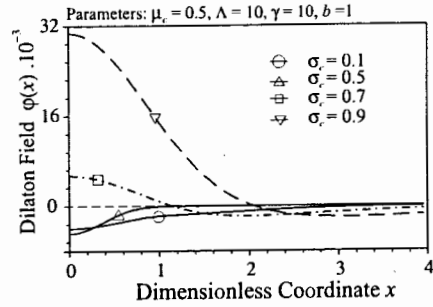


Рис. 11. Зависимость дилатонного потенциала  $\varphi(x)$  от бозонной плотности  $\sigma_c$

Второй метод решения изложен в разделе 3.2.4. Этот метод основан на выполнении условий непрерывности для искоемых функций в точке  $x = 1$ . Последовательно решаются две краевые задачи для уравнений (20) во внутренней и внешней области звезды, причем для замыкания задачи при  $x \in (0, 1)$  задается дополнительное параметрическое условие для одной из неизвестных функций (в настоящей работе используется условие  $\varphi(1) = \varphi_s$ ). Во внешней области решение находится при помощи трех условий непрерывности с имеющимся уже внутренним решением. Остальные три условия непрерывности образуют нелинейную алгебраическую систему для неизвестных параметров  $R_s$ ,  $\Omega$  и  $\varphi_s$ .

В разделе 3.2.3 демонстрируются результаты численного эксперимента с применением первого метода решения. Используя метод Рунге на системе сгущающихся равномерных сеток показано, что сплайн-разностная схема имеет точность  $O(h^4)$ .

В рамках конкретной модели рассмотрено также влияние физических параметров на устойчивость звезды. В частности, на рис. 11 показана зависимость дилатонного поля  $\varphi(x)$  от расстояния для четырех значений центральной плотности бозонной материи  $\sigma_c$ . При возрастании  $\sigma_c$  дилатонное поле в окрестности центра звезды уменьшается. После некоторого критического значения  $\sigma_c^*$ , зависящего от прочих параметров модели, функция  $\varphi(x)$  начинает расти вместе с  $\sigma_c$ . Причина такого поведения — в наличии члена  $\frac{B}{T}$  в правой части уравнения (20c). Для достаточно малых значений плотности член  $\frac{B}{T} < 0$  и его вклад преобладает над вкладом  $\frac{F}{T}$ . При больших  $\sigma_c$  ( $\sigma_c \geq \sigma_c^*$ )

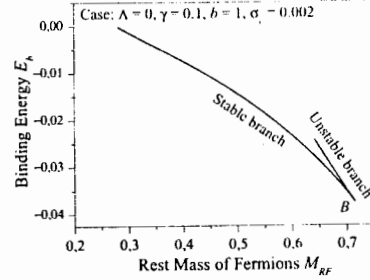


Рис. 12. Бифуркация при изменении массы покоя

слагаемое  $\frac{B}{T}$  меняет знак и усиливает вклад  $\frac{F}{T}$ , что ведет к росту  $\varphi(x)$ . Звезда устойчива только при  $0 < \sigma_c < \sigma_c^*$ . Для значений параметров, соответствующих рис. 11, критическое значение  $\sigma_c^* \approx 0.55$ .

В разделе 3.2.5 обсуждаются численные результаты, полученные вторым методом. Показано, что при некотором критическом значении фермионной массы покоя звезда теряет устойчивость. Это утверждение демонстрируется на графике (см. рис. 12) зависимости безразмерной массы звезды

$$M = \int_0^\infty \left[ T_0^B + T_0^F + \exp(-\lambda) \varphi'^2 + \gamma^2 V(\varphi)/2 \right] r^2 dr,$$

от фермионной массы покоя

$$M_{RF} = b \int_0^\infty A^3(\varphi) e^{\lambda/2} n(\mu) r^2 dr,$$

где заданная непрерывная функция  $n(\mu)$  моделирует плотность фермионов.

В разделе 3.3 рассматривается сферически-симметричная модель черной дыры (ЧД) с массивным дилатоном. Физическая модель описывается (раздел 3.3.1) многоточечной краевой задачей для системы третьего порядка для метрической функции  $f(r)$  и дилатонного поля  $\varphi(r)$

$$-f' + F(r, f, \varphi, \varphi') = 0, \quad (22a)$$

$$-f \left( \varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' \right) + \Phi(r, f, \varphi, \varphi') = 0. \quad (22b)$$

Здесь  $f(r)$  — метрическая функция, радиальная координата  $r \in [R_t, \infty)$ , постоянная  $R_t > 0$ . В уравнения (22) входят два физических параметра — заряд  $q$  ЧД и масса дилатона  $\gamma$ . Правые части  $F$  и  $\Phi$  задаются при помощи выражений

$$F \equiv \frac{1-f}{r} + 2e^{2\alpha\varphi} \frac{r^2 - \sqrt{r^4 + q^2}}{r} - r\gamma^2 V(\varphi) - rf\varphi'^2,$$

$$\Phi \equiv \left[ r\gamma^2 V(\varphi) - \frac{1}{r} - 2e^{2\alpha\varphi} \frac{r^2 - \sqrt{r^4 + q^2}}{r} \right] \varphi' + \frac{\gamma^2}{2} V'(\varphi) - 2\alpha e^{2\alpha\varphi} \frac{r^2 - \sqrt{r^4 + q^2}}{r^2}.$$

Здесь заданная непрерывная функция  $V(\varphi)$  есть потенциал дилатона, а коэффициент связи  $\alpha = \pm 1$ .

Математическая постановка задачи для системы дифференциальных уравнений зависит от числа горизонтов. В частности, в простейшем случае единственного регулярного горизонта  $R_h$  граничные условия задаются в виде

$$f(R_h) = 0, \quad \Phi(R_h, 0, \varphi_h, \varphi'_h) = 0, \quad \varphi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{\alpha q^2}{\gamma^2 r^4}, \quad (23)$$

Точкой  $R_h$  отрезок  $[R_t, \infty)$  разбивается на внутреннюю  $D_{int} \equiv (R_t, R_h)$  и внешнюю  $D_{ext} \equiv (R_h, \infty)$  области ЧД, причем  $R_h$  есть точка вырождения для (22b). Граничная

задача для уравнений (22) решается в  $D_{ext}$ . Если горизонт найден, то при  $\gamma > 0$  масса  $M_\infty$  ЧД находится из асимптотики метрической функции

$$f(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 - \frac{2M_\infty}{r} + \frac{q^2}{r^2} - \frac{1}{5} \left( \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2 q^4}{\gamma^2 r^6} \right).$$

Для последующего решения задачи в области  $D_{ext}$  необходимо задаться дополнительным условием на левой границе  $R_l > 0$ .

Отметим, что широко распространенная в литературе постановка, когда масса ЧД считается заданной (см., например, [22]), приводит к существенно более трудоемкой краевой задаче с неизвестной левой границей в области  $D_{int}$ .

В разделе 3.3.2 приведена постановка задачи в случае экстремальных горизонтов, в которых производная метрической функции  $f'(R_h) = 0$ . Показано, что значение дилатонного поля  $\varphi_e$  в горизонте удовлетворяет некоторому нелинейному алгебраическому уравнению, которое при выборе дилатонного потенциала в виде  $V(\varphi) = \varphi^2$  и параметра  $\alpha = -1$  имеет вид

$$C(\varphi, q, \gamma) \equiv C_1(\varphi, \gamma) - C_2(\varphi, q, \gamma) = 0, \quad (24)$$

где функции  $C_1 \equiv 1 + \gamma^2 \varphi e^{2\varphi/4}$ ,  $C_2 \equiv q^2 \gamma^2 e^{-2\varphi} \varphi (1 + \varphi)^2$ .

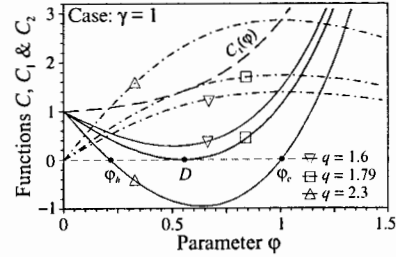


Рис. 13.  $C, C_1, C_2$

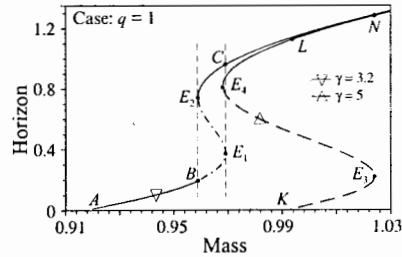


Рис. 14. Рождение горизонтов

При фиксированных  $q$  и  $\gamma$  уравнение (24) имеет на интервале  $(0, \infty)$  не более двух действительных корней (см. рис. 13). Случай (обозначенный на рис. 13 символом  $\nabla$ ), когда уравнение не имеет корней, соответствует единственному регулярному горизонту ЧД.

При некотором соотношении между зарядом  $q_d$  и массой дилатона  $\gamma_d$  уравнение (24) имеет единственный корень  $0 < \varphi_d(\gamma) < 1$ , которому соответствует трижды вырожденное решение функции  $f(r)$  — в нуль обращается также и вторая производная метрической функции:  $f''(R_d) = 0$ . Краевая задача для уравнений (22) в случае есть задача с известной левой границей  $R_d$ .

При достаточно больших значениях  $q > q_d(\gamma)$  (либо  $\gamma > \gamma_d(q)$ ) алгебраическое уравнение (24) имеет два различных корня  $\varphi_h < \varphi_e$  (случай  $\Delta$ ), которые негрудно найти численным способом. В этом случае модель определяет пару ЧД с экстремальными горизонтами, вычисляемыми по формуле

$$R_e = \frac{1}{\gamma \sqrt{\varphi_e^2 + \varphi_e}}. \quad (25)$$

Меньший корень  $\varphi_h < 1$  соответствует ЧД с внешним экстремальным горизонтом  $R_h$ , а больший  $\varphi_e(q, \gamma)$  — ЧД с внутренним экстремальным горизонтом  $R_e$ .

Решая краевые задачи для уравнений (22) с известными экстремальными горизонтами, можно найти соответствующие массы  $M_e > M_h$  ЧД. По этим данным легко построить эрмитов полином

$$2t^3 - 3t^2 + \mu = 0, \quad (26)$$

где коэффициент

$$\mu = \frac{M_e - M_\infty}{M_e - M_h},$$

а  $t = (R - R_e)/(R_h - R_e)$  есть локальная переменная. Несложно проверить, что при  $0 \leq \mu \leq 1$  уравнение имеет три реальных корня, расположенных на интервале  $[-1/2, 3/2]$ .

Построение полинома (26) существенно упрощает аналитическое и численное исследование задачи. В частности, динамика изменения числа горизонтов при значениях массы дилатона  $\gamma > \gamma_d$  зависит существенно от отношения

$$\rho(q, \gamma) = \frac{R_h(q, \gamma)}{R_e(q, \gamma)}. \quad (27)$$

Если частное  $\rho \in [1, 3)$ , то (см. кривую на Рис. 14, отмеченную через  $\nabla$ ) левее вертикальной прямой  $BE_2$  (при  $M_\infty < M_{E_2}$ ) ЧД имеет единственный регулярный горизонт  $R_h$ , а на прямой  $BE_2$  — два горизонта, причем горизонт в точке  $E_2$  является внешним экстремальным, а горизонт в точке  $B$  — внутренним регулярным. Далее, на участке между вертикальными прямыми  $BE_2$  и  $E_1C$ , т.е. при  $M_\infty \in (M_{E_2}, M_C)$ , ЧД имеет для заданной  $M_\infty$  три регулярных горизонта (см. примеры на Рис. 16), на прямой  $E_1C$  — два, причем ордината  $R_e$  точки  $E_1$  является внутренним экстремальным горизонтом, а ордината  $R_C$  точки  $C$  — внешним регулярным горизонтом. Наконец, правее точки  $C$  при  $M_\infty > M_C$  ЧД имеет опять только один регулярный горизонт.

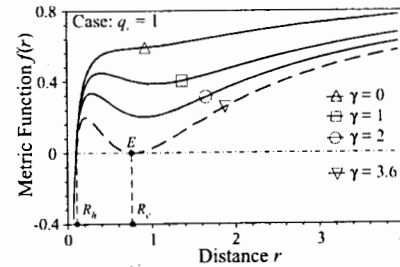


Рис. 15. Решение с внешним экстремальным горизонтом

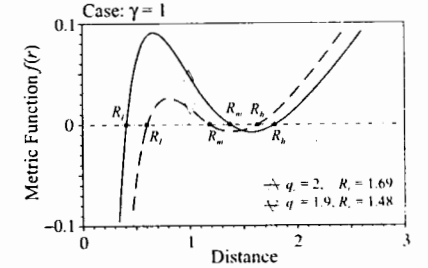


Рис. 16. Решения с тремя горизонтами

При граничном значении  $\rho(q, \gamma) = 3$  точка  $A$  лежит на одной вертикальной прямой с  $E_2$ , а ЧД имеет единственный экстремальный горизонт. Если отношение  $\rho > 3$  (см. кривую  $\Delta$  на рис. 14), ЧД имеет последовательно 2 горизонта в интервале

$M_\infty \in (M_{E_1}, M_K]$  между вертикальными прямыми, проходящими через  $E_1$  и  $KL$ , и 3 горизонта в открытом интервале  $M_\infty \in (M_K, M_{E_3})$  между прямыми  $KL$  и  $E_3N$ . Далее, при значении массы  $M_\infty = M_{E_3}$  ЧД имеет 2 горизонта, внутренний из которых экстремален, а внешний вычисляется по формуле

$$R_c = \frac{1}{2}(3R_h - R_c).$$

Если выполнено неравенство  $M_\infty > M_{E_3}$ , то ЧД имеет единственный регулярный горизонт.

Метод численного решения задачи о ЧД при заданном регулярном горизонте изложен в разделе 3.3.3. Использовался НАМН, а возникающие линейные краевые задачи с особенностью на левой границе решаются при помощи сплайн-коллокационной схемы, рассмотренной в разделе 1.3.

В разделе 3.3.4 приведен метод решения задачи со свободной границей для ЧД, также основанный на НАМН.

В разделе 3.3.5 обсуждаются результаты численного эксперимента для различных значений параметров  $q$  и  $\gamma$ . Приведены примеры решений с одним и с двумя регулярными горизонтами, а также с экстремальными горизонтами (см. рис. 15 и рис. 16). Дано подробное описание динамики изменения числа и вида горизонтов в зависимости от значений физических параметров.

### 3 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

Как итог проведенных исследований, на защиту выносятся следующие результаты:

1. Построена эффективная численная схема моделирования бифуркационных зависимостей равновесных решений широкого класса уравнений физических моделей. Для этой цели система из уравнений для равновесных решений, уравнений порожденной линейной задачи на собственные значения при фиксированном собственном значении, характеризующем бифуркацию, вместе с краевыми условиями, возможными условиями в точках разрыва производных и  $m \geq 1$  дополнительными "условиями нормировки", рассматривается как обратная спектральная задача для  $m$  параметров модели.

Тем самым построен и изучается новый класс нелинейных спектральных задач, для решения которых на основе развития НАМН строится эффективная вычислительная схема.

2. Разработан комплекс программ, реализующих основные этапы предлагаемой численной схемы. Единобразие алгоритма позволяет организовать пакет таким образом, что для решения каждой конкретной задачи меняются только модули ввода начального приближения, параметров модели и обработки численных результатов.

3. Проведено подробное исследование бифуркаций амплитуды параметра порядка в модифицированном уравнении Гинзбурга-Ландау для джозефсоновского перехода. Показано, что критический джозефсоновский ток соответствует бифуркации амплитуды параметра порядка. Построены кривые зависимости ток-фаза и численно исследована зависимость соответствующих коэффициентов Фурье-разложения кривых от параметров ДДП. Тем самым указана область применимости высших  $\sin$ -Гордон уравнений для описания процессов в ДДП.

4. В рамках модели неоднородного джозефсоновского перехода, основанной на возмущенном уравнении  $\sin$ -Гордон, при помощи разработанного алгоритма впервые проведено численное моделирование бифуркаций статических вихревых состояний магнитного потока в ДДП с одной неоднородностью и с решеткой неоднородностей в барьерном слое.

▷ Введен новый критерий рождения и уничтожения (квантования) вихрей магнитного потока в джозефсоновских переходах при изменении физических и геометрических параметров.

▷ Численным путем предсказан новый физический эффект, связанный с поведением бифуркационной кривой вида "ток-магнитное поле" для единичного флюксона в длинных неоднородных джозефсоновских переходах при его захвате неоднородностью. Этот эффект подтвержден физическим экспериментом.

▷ Впервые построены критические кривые для основных состояний магнитного потока в двухслойных джозефсоновских переходах.

▷ Впервые найдена минимальная длина джозефсоновского перехода, при которой распределения магнитного потока сохраняют устойчивость.

5. Впервые численно исследована устойчивость семейства пузырьковых солитонных аналитических решений нелинейного уравнения Шредингера с кубической нелинейностью. Показано, что существует минимальная скорость распространения волны, зависящая от параметра среды, ниже которой солитон становится неустойчивым.

6. Впервые проведено численное изучение класса моделей статических бозонных и бозонно-фермионных сферически-симметричных звезд, базирующихся на скалярно-тензорных теориях гравитации с массивным дилатоном.

▷ Разработан эффективный численный алгоритм для решения возникающих нелинейных спектральных задач с внутренней неизвестной границей.

▷ Показано, что устойчивость равновесных конфигураций звезд в таких моделях существенно зависит от центральных плотностей бозонной и фермионной материи, а также от массы дилатона.

7. Рассмотрен класс сферически-симметричных моделей электрически заряженных черных дыр с массивным дилатоном.

▷ Проведено аналитическое исследование структуры горизонтов ЧД. Показана возможность существования в зависимости от значения массы дилатона и заряда ЧД регулярных, экстремальных и трижды вырожденных горизонтов. Приведен критерий существования двух и трехгоризонтных состояний ЧД.

▷ Предложен эффективный численный алгоритм для многоточечной краевой задачи с неизвестными границами, описывающей модель ЧД. Численным путем получены решения с двумя регулярными, одним регулярным и одним экстремальным, а также с тремя регулярными горизонтами.

## Содержание диссертации отражено в следующих публикациях:

- [B01] **T.L. Boyadjiev** and Z.D. Genchev. Study of the Modified Ginzburg-Landau Type Equation for a Josephson Junction // Journal of Physical Studies, vol. 5, No 3 (2001), pp. 1 – 7.
- [B02] **T.L. Boyadjiev**. Bifurcations of the solutions of Modified Ginzburg-Landau Equation for Josephson Junctions: Сообщение ОИЯИ E11-2001-248, Дубна, 2001.
- [B03] **Т.Л. Бояджиев**, Ю.С. Гальперн, И.В. Пузынин, А.Т. Филиппов. Бифуркации связанных состояний флюксонов в неоднородном джозефсоновском переходе конечной длины: Сообщение ОИЯИ P11-85-807, Дубна, 1985.
- [B04] **Т.Л. Бояджиев**, Ю.С. Гальперн, И.В. Пузынин, А.Т. Филиппов. Связанные состояния флюксонов в неоднородном джозефсоновском переходе с током во внешнем магнитном поле: Сообщение ОИЯИ P17-86-506, Дубна, 1986.
- [B05] А.Т. Filippov, Yu.S. Gal'pern, **T.L. Boyadjiev** and I.V. Puzynin. Critical currents in Josephson junctions with micro inhomogeneities attracting solitons // Phys. Lett. A, v. 120, № 1, 1987, p. 47.
- [B06] **Т.Л. Бояджиев**, Д.В. Павлов, И.В. Пузынин. Ньютоновский алгоритм вычисления критических параметров в одномерном неоднородном джозефсоновском переходе: Сообщение ОИЯИ P11-88-409, Дубна, 1988.
- [B07] А.Т. Filippov, **T. Boyadjiev**, Yu.S. Gal'pern and I.V. Puzynin. Localization of solitons on small inhomogeneities in Josephson Junctions: Comm. JINR E17-89-106, Дубна, 1989.
- [B08] **Т.Л. Бояджиев**, Д.В. Павлов, И.В. Пузынин. Применение непрерывного аналога метода Ньютона для вычисления бифуркационных кривых в джозефсоновских переходах, In: Numerical Methods and Applications. Proc. of the int. conf. on num. math. and appl., Sofia, August 22-27, 1988. Editors: Bl. Sendov, R. Lazarov, I. Dimov.
- [B09] **Т.Л. Бояджиев**, С.Н. Димова. Numerical analysis of the steady states in long Josephson junctions by the finite element method // Математическое моделирование, v. 6, No 6, 1996, pp. 37 – 47.
- [B10] **Т.Л. Бояджиев**, Д.В. Павлов, И.В. Пузынин. Вычисление бифуркаций устойчивых состояний в двухслойных неоднородных джозефсоновских переходах: Сообщение ОИЯИ P5-89-173, Дубна, 1989.
- [B11] N. Alexeeva and **T. Boyadjiev**. Periodic bound states of the magnetic flux in Josephson lattices of resistive inhomogeneities // Bulgarian Journal of Physics, 1997, v. 24, No 1 – 2.

- [B12] **Т.Л. Бояджиев**, Н. Алексеева. "Оптимальные" джозефсоновские решетки из резистивных неоднородностей, Сообщение ОИЯИ P17-97-28, Дубна, 1997.
- [B13] **Т. Boyadjiev** and M. Todorov. Numerical Investigation of a Bifurcation Problem with free Boundaries Arising from the Physics of Josephson Junctions // Математическое моделирование, v. 12, No 4, 2000, pp. 61 - 72.
- [B14] **Т. Boyadjiev**, M. Todorov. Minimal Length of Josephson Junctions with Stable Fluxon Bound States // Superconducting Science and Technology, **14** (2002), pp. 1 - 7.
- [B15] I.V. Barashenkov, **T.L. Boyadjiev**, I.V. Puzynin and T. Zhanlav. Stability of the moving bubbles in the system of interacting bosons, Phys. Lett. A, v. **135** (2), 1989, pp. 125 - 128.
- [B16] I.V. Barashenkov, I.V. Puzynin and T. Zhanlav and **T.L. Boyadjiev**. Stability of the moving bubbles in the Bose condensate, In: IVth International Workshop on Solitons and Applications, Dubna, August 1989, Editors V.G. Makhankov, V.K. Fedyanin, O.K. Pashaev, World Scientific, 1990.
- [B17] **Т.Л. Бояджиев**, Т. Жаплав, И.В. Пузынин. Численное исследование одной задачи на собственные значения, возникающей в теории устойчивости солитонов // Сообщение ОИЯИ P5-89-423, Дубна, 1989.
- [B18] P. Fiziev, S. Yazadjiev, **T. Boyadjiev** and M. Todorov. Boson stars in massive dilatonic gravity // Physical Review D, **61**, 124018 (2000).
- [B19] S. Yazadjiev, **T. Boyadjiev**, M. Todorov and P. Fiziev. A Free Boundary Problem in the Theory of Stars. Bulgarian Journal of Physics, v. **27**, No 3 (2000), pp. 66 - 69.
- [B20] **T. Boyadjiev**, M. Todorov, P. Fiziev and S. Yazadjiev. Mathematical Modeling of Boson-Fermion Stars in the Generalized Scalar-Tensor Theories of Gravity // Journal of Comp. Phys., v. **166**, No 2, January 2001, p. 253.
- [B21] **T. Boyadjiev**, M. Todorov, P. Fiziev and S. Yazadjiev, New Numerical Algorithm for Modeling of Boson-Fermion Stars in Dilatonic Gravity // Journal of Computational and Applied Mathematics, v. **145** /1, pp. 113 - 131.
- [B22] S.S. Yazadjiev, P.P. Fiziev, **T.L. Boyadjiev** and M.D. Todorov. Electrically Charged Einstein-Born-Infeld Black Holes with Massive Dilaton // Mod. Phys. Lett. A, v. **16**, No 33 (2001), pp. 2143 - 2149.
- [B23] **Т.Л. Бояджиев**, П.П. Физиев. Численное моделирование черных дыр с массивным дилатоном, Сообщение ОИЯИ P2-2002-1, Дубна, 2002.
- [B24] **Т.Л. Бояджиев** Сплайн-коллокационная схема повышенного порядка точности, Сообщение ОИЯИ P2-2002-101, Дубна, 2002.

## Список литературы

- [1] А. Ньюэлл, Солитоны в математике и физике. М.: Мир. 1989.
- [2] I.D. Iliev, E.Kh. Khristov, and K.P. Kirchev. Spectral methods in soliton equations, Longman Sci. & Techn.: Wiley. 1994.
- [3] Т.И. Белова, А.Е. Кудрявцев. Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля, УФН. **40** (4), 1997, pp. 359 - 386.
- [4] Ю.С. Гальперн, А.Т. Филиппов. Связанные состояния солитонов в неоднородных джозефсоновских переходах. ЖЭТФ, т. **86**, вып. 4 (1984), стр. 1527.
- [5] М.А. Красносельский. Некоторые задачи нелинейного анализа. УМН, т. **IX**, вып. 3(61), 1954, стр. 57-114.
- [6] М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
- [7] Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Ред. Дж.Б. Келлер и С. Антман, М.: Мир, 1974.
- [8] В.И. Арнольд, Особенности бифуркации и катастрофы, УФН, 1983, т. **141**, с. 569.
- [9] А.Н. Выставкин, Ю.Ф. Драчевский, В.П. Кошелец, И.Л. Сердюченко. Обнаружение статических связанных состояний флюксонов в распределенных джозефсоновских переходах с неоднородностью. Физика низких температур, т. **14**, No 6 (1988), стр. 646.
- [10] А.В. Устинов. Джозефсоновские вихри в распределенных сверхпроводящих структурах, Дисс. на соиск. уч. ст. д.ф.м.н., Черногоровка, 1994.
- [11] В.Л. Гинзбург, О некоторых успехах физики и астрономии за последние три года, УФН, т. **172**, No 2, 2002, стр. 213 - 219.
- [12] Е.П. Жидков, Г.И. Макаренко, И.В. Пузынин, Непрерывный аналог метода Ньютона для нелинейных задач физики, ЭЧАЯ, т. 4, No.1, 1973, стр. 127.
- [13] И.В. Пузынин, И.В. Амирханов, Е.В. Земляная, В.Н. Первушин, Т.П. Пузынина, Т.А. Стриж, В.Д. Лахно. Обобщенный непрерывный аналог метода Ньютона для численного исследования некоторых нелинейных квантово-полевых моделей. ЭЧАЯ, т. **30**, No. 1, 1999, стр. 210 - 265.
- [14] В.В. Ермаков, Н.Н. Калиткин, Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона, ЖВМиМФ, **21**, No 2, 1981, стр. 491.

- [15] Jhy-Jiun Chang, C.H. Ho, Nonlocal response to a focused laser beam in one-dimensional Josephson tunnel junctions, *Appl. Phys. Lett.* **45** (2) 1984. p. 192 — 184.
- [16] F. Sols and J. Ferrer, Crossover from the Josephson effect to bulk superconducting flow, *Phys. Rev. B* **49** (1994), 15913.
- [17] K.K. Licharev, Superconducting weak links, *Rev. Mod. Phys.* 1979,**51**, p. 101.
- [18] П.Н. Вабищевич, Численные методы решения задач со свободной границей, Изд-во МГУ, М., 1987.
- [19] А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов, Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических систем, М., Наука, ГРФМЛ, 1987.
- [20] I.V. Barashenkov, V.G. Makhankov, *Phys. Lett. A*, **128** (1-2), 1988.
- [21] N. Stefanakis and N. Flytzanis. Critical currents in Josephson junctions with macroscopic defects, *Supercond. Sci. Technol.*, **14** (2001), pp. 16 — 29.
- [22] T. Tamaki, Thermodynamic properties of massive dilaton black holes II, **e-print: gr-qc/0205048**.

#### Список принятых сокращений

ДДП	— длинный джозефсоновский переход;
НУШ	— нелинейное уравнение Шредингера;
ЧД	— черная дыра;
ЗШТЛ	— задача Штурма-Лиувилля;
НАМН	— непрерывный аналог метода Ньютона;
ОТО	— общая теория относительности.

Получено 2 июля 2002 г.