

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

С345с

П-542

23/iv-79

11 - 12228

1575 / 2-79

Р.В.Полякова

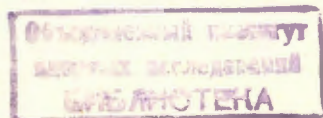
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ОДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ
БЕЗЖЕЛЕЗНОГО СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ДИПОЛЯ
С ПЛОСКОЙ ОБМОТКОЙ

1979

11 - 12228

Р.В.Полякова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ОДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ
БЕЗЖЕЛЕЗНОГО СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ДИПОЛЯ
С ПЛОСКОЙ ОБМОТКОЙ



Полякова Р.В.

11 - 12228

Математическое моделирование однородного магнитного поля безжелезного сверхпроводящего диполя с плоской обмоткой

Описывается численный метод решения обратной задачи формирования однородного магнитного поля (4-5 Т) сверхпроводящего диполя типа "оконная рама" с помощью плоских обмоток. Предлагаемый метод позволяет сравнительно легко преодолеть трудности, связанные с решением плохо обусловленных систем уравнений, к которым обычно сводятся обратные задачи, и рассчитать геометрию плоских обмоток безжелезного сверхпроводящего диполя, обеспечивающую однородность магнитного поля вплоть до 10^{-6} .

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Polyakova R.V.

11 - 12228

Mathematical Modeling of the Uniform Magnetic Field of Ironless Superconducting Dipole with Flat Winding

The numerical method of solving the inverse problem of formation of a uniform magnetic field in a 4-5 T superconducting dipole by means of flat windings is described. The suggested method allows one to overcome easily enough difficulties connected with the solution determined systems of equations, which nonlinear problems are usually reduced to, and to calculate geometry of flat windings of ironless superconducting dipoles which provides the magnetic field uniformity up to 10^{-6} .

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Введение

Применение сверхпроводимости в ускорителях частиц высокой энергии во многих случаях предполагает получение магнитных полей величиной 4-5 Т^{1,2/}. В таких полях железо полностью насыщается, поэтому для сохранения однородности поля во всем динамическом диапазоне его формирование осуществляется геометрией обмотки. Теоретически известны две конфигурации обмотки безжелезного магнита, обеспечивающие требуемую однородность поля: в виде пересекающихся эллипсов или в виде цилиндра с косинусоидальным распределением плотности тока. Оба эти варианта предполагают размещение витков обмотки на поверхности второго порядка, что вызывает значительные технологические трудности при изготовлении обмоток, в особенности если учесть, что положение витков должно обеспечиваться с точностью не хуже 10-20 мкм.

В этой работе предлагается плоская геометрия обмотки (рис.1), витки (количество витков M) которой размещаются по периметру прямоугольной апертуры сверхпроводящего магнита. Такая обмотка представляется более простой технологически и более удобной в реализации. Кроме того, прямоугольную апертуру магнита значительно легче согласовать с требованиями к поперечным размерам камеры ускорителя, т.к. размеры пучка по радиусу, как правило, больше вертикальных размеров.

На основании метода решения некоторого класса обратных задач магнитостатики, описанного в работе^{3/}, разработан численный алгоритм математического моделирования однородного магнитного поля сверхпроводящего диполя предлагаемой геометрии. Выполненные чис-

ленные расчёты показали, что выбором положения витков обмотки можно обеспечить любую однородность магнитного поля вплоть до 10^{-6} .

1. Формирование магнитного поля

Известно, что в цилиндрической системе координат φ -разложение магнитного поля диполя имеет вид ^{4/}

$$H_r = \sum_n c_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos(n+1)\theta, \quad (1)$$

$$H_\varphi = \sum_n c_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \sin(n+1)\theta;$$

где r_0 и r - апертура и текущий радиус, θ - полярный угол, c_n - коэффициенты разложения. В силу симметрии дипольной обмотки $n = 2k$, где k - числа натурального ряда.

В ускорителях на динамику частиц заметное влияние оказывают низшие гармоники поля ($k = 1, 2, 3$). Поэтому формирование однородного поля сводится к отысканию положения витков, при котором c_2, c_4, c_6 равны нулю или минимальны.

2. Математическая постановка задачи

Пусть в некоторой области U (см. рис.1) необходимо создать заданное магнитное поле $H(z), z \in U$ с помощью расположения M проводников прямоугольного сечения в заданной ограниченной области S при условии, что ток I_0 во всех проводниках одинаков. Для такой магнитной системы поле в любой точке $z \in U$ определяется следующим образом:

$$H(z) = I_0 \sum_{i=1}^M G(s_i, z), \quad (2)$$

$s_i \in S$, в декартовой системе координат $s_i = \{x_i, y_i\}$, $z = \{x, y\}$,

$$G(s_i, z) = \frac{y-y_i+B}{2} \ln \frac{(x-x_i+A)^2 + (y-y_i+B)^2}{(x-x_i-A)^2 + (y-y_i+B)^2} +$$

$$+ \frac{y-y_i-B}{2} \ln \frac{(x-x_i-A)^2 + (y-y_i-B)^2}{(x-x_i+A)^2 + (y-y_i-B)^2} + (x-x_i+A) \times$$

$$\times (\operatorname{arctg} \frac{x-x_i+A}{y-y_i-B} - \operatorname{arctg} \frac{x-x_i+A}{y-y_i+B}) + (x-x_i-A) \times$$

$$\times (\operatorname{arctg} \frac{x-x_i-A}{y-y_i+B} - \operatorname{arctg} \frac{x-x_i-A}{y-y_i-B}).$$

A - полуразмер шины вдоль x , B - полуразмер шины вдоль y , $G(s_i, z)$ - функция Грина для прямоугольной шины в декартовой системе координат ^{5/}.

$$M = N_x + N_y.$$

N_x - число витков обмотки вдоль оси x , N_y - число витков обмотки вдоль оси y .

Или

$$M = \sum_{\ell=1}^K N_\ell.$$

K - количество блоков обмотки, N_ℓ - количество витков в ℓ -ом блоке.

$G(s_i, z)$ нелинейна относительно координат проводника s_i , поэтому задача (2), (3) является нелинейной обратной задачей магнито-статики, причём на варьируемые параметры I_0, s_i накладываются ограничения:

1. Область S ограничена; $a \leq x_i \leq b$ вдоль оси x , $c \leq y_i \leq d$ вдоль оси y .

2. $I_0 \leq I_{\text{доп}}$, $I_{\text{доп}}$ - допустимый ток в проводнике.

Известно ^{6/}, что такого типа обратные задачи относятся к классу неустойчивых, основные принципы решения которых были предложены А.Н.Тихоновым. Ограничения на параметры вызывают дополнительные трудности при их решении. Такой класс задач был рассмотрен в работе ^{3/} и рассматривается ниже.

3. Метод решения и результаты численного счёта

Решение задачи (2), (3) было разбито на два этапа.

1. Для определения непрерывного распределения плотности тока в витках в области S ($j(x)$ вдоль оси x , $j(y)$ вдоль оси y) методом регуляризации ^{6,7/} решалась линейная обратная задача

$$A(j(s)) = \int_S j(s)G(s,z)ds = H(z), \quad (4)$$

$j(s)$ - плотность тока.

Регуляризирующий параметр α определялся по невязке^{/6/}

$$\rho_U(Aj^{\alpha}, H_{\delta}) = \delta, \quad (5)$$

где δ - погрешность правой части уравнения (4).

В качестве точного решения бралось единичное магнитное поле $H_T=1$ во всей области U .

При выборе регуляризованного решения $j^{\alpha}(s)$ учитывались следующие условия задачи:

1. Точность вычисления магнитного поля в линейной обратной задаче (4) должна быть не ниже, чем $\epsilon_H = 10^{-5} + 10^{-6}$. При этом низшие гармоники c_2, c_4, c_6 фурье-разложения поля также должны быть не больше, чем ϵ_H (см. таблицу I).

2. Во всей допустимой области S функция $j^{\alpha}(s), s \in S$ должна сохранять знак.

3. $|j^{\alpha}(s)| \leq j_{\text{доп}}, s \in S$, где $j_{\text{доп}}$ - допустимая плотность тока проводника.

Решение $j^{\alpha}(s)$, удовлетворяющее всем этим требованиям, было найдено для $\alpha = 10^{-8}$. Основным критерием качества решения является обеспечение требуемой точности поля ϵ_H в области U , полученного путем решения прямой задачи при найденных плотностях тока. На рис.2 приводятся графики решений $j^{\alpha}(x)$ и $j^{\alpha}(y)$. При $\alpha=0$, т.е. при отсутствии регуляризации, проявлялась явная неустойчивость задачи, выражающаяся в том, что решение $j(s)$ получалось в виде "пилы".

Выборное распределение плотностей токов по виткам для $\alpha = 10^{-8}$ и $M=48$ приведено в таблице 2.

II. На втором этапе решения задачи найденное распределение плотностей токов $j^{\alpha}(x)$ и $j^{\alpha}(y)$ моделировалось с помощью кусочно-постоянных функций-"блоков" при условии постоянства тока в одном витке (рис.3). Выбор количества блоков (причём требовалось, чтобы их было не более шести), количества проводников в каждом блоке и расстановка выбранных блоков в заданной области S делался исходя из условий минимума функционала

$$F = \sum_{n=1,2,4,6} c_n^2, \quad c_n = \int_0^{\pi} H(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (6)$$

и сохранения полного тока в обмотке, который находился интегрированием плотностей токов $\int_x j^{\alpha}(x)dx$ и $\int_y j^{\alpha}(y)dy$.

В качестве варьируемых параметров брались также координаты расположения блоков в заданной области S , причём границы варьирования этих параметров определялись исходя из величины полного тока в данном блоке. Эта задача решалась с использованием программы FUMILI - минимизации квадратичного функционала^{/6/}.

В таблице 3 показаны различные комбинации блоков и витков в них, из которых были выбраны варианты для оптимизации по FUMILI. Результаты последней приводятся в таблице 4. Любой из вариантов, представленных в этой таблице, можно принять к реализации.

Все численные расчёты проводились для конфигурации магнитной системы с квадратной апертурой, $\ell_x = \ell_y$ (см. рис.1). Однако комплекс программ позволяет моделировать магнитные системы подобного типа с прямоугольной апертурой любых размеров, $\ell_x \neq \ell_y$.

4. Влияние округления решения на однородность поля

На практике невозможно выполнить магнитную систему с той точностью, которая достижима при численных расчетах на ЭВМ. Если технические возможности позволяют выполнить установку витков с точностью 10-20 мкм, то возникает вопрос, какое влияние на однородность магнитного поля оказывает округление полученных результатов до трёх знаков. В таблице 5 приводятся результаты вычисления низших гармоник фурье-разложения магнитного поля при изменении параметров установки витков на 0,002 см. Из этой таблицы видно, что наибольшее влияние на однородность магнитного поля имеет точность установки 4-го блока вдоль оси y (см. рис.1б), а наименьшее - I-го блока вдоль оси x .

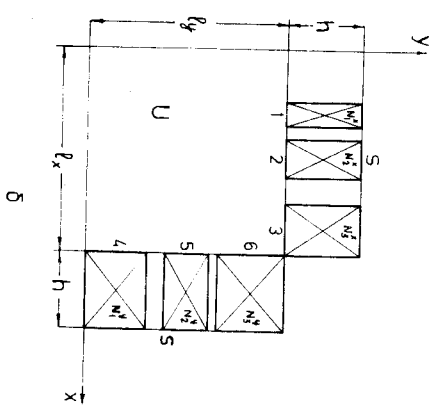
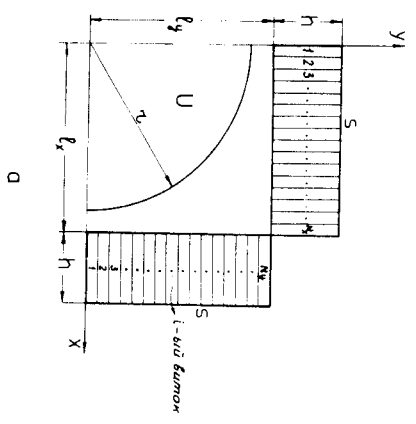


Рис. 1 а, б. Конфигурация сверхпроводящего диполя с плоской обмоткой.

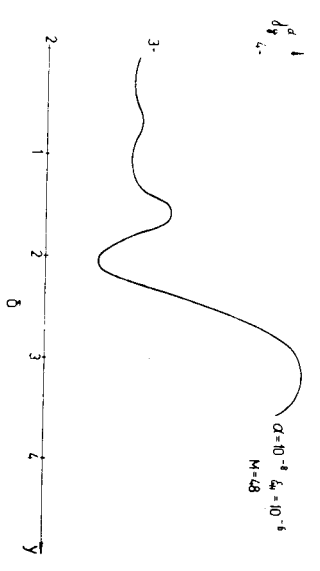
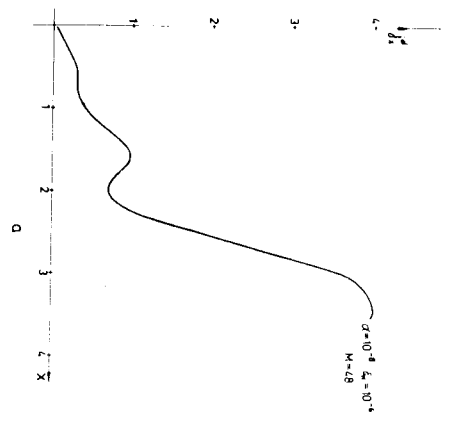


Рис. 2 а, б. Распределение $j^d(s)$ для конфигурации магнитной системы рис. 1а.

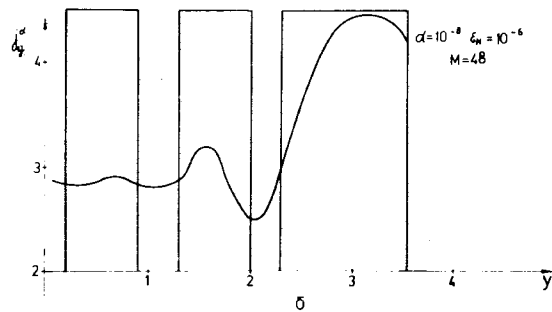
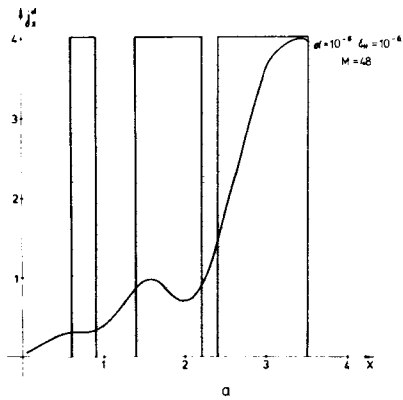


Рис. 3 а, б. Приближение $y^*(x)$ кусочно-постоянными функциями "блоками".

Таблица I
Зависимость средней относительной точности магнитного поля от числа витков и величины регуляризирующего параметра α

M - число витков на четверти окружности	α - регуляризирующий параметр	Средняя относительная точность поля в апертуре от 65% до 80%	Средняя относительная точность низших гармоник. c_2, c_4, c_6
M = 48	10^{-3}	$0,8 \cdot 10^{-2}; 0,8 \cdot 10^{-3}$	$0,3 \cdot 10^{-2}; 0,9 \cdot 10^{-3}$
	10^{-6}	$0,9 \cdot 10^{-4}; 0,99 \cdot 10^{-5}$	$0,34 \cdot 10^{-5}; 0,9 \cdot 10^{-5}$
	10^{-8}	$0,96 \cdot 10^{-4}; 0,8 \cdot 10^{-7}$	$0,4 \cdot 10^{-6}; 0,9 \cdot 10^{-6}$
M = 80	10^{-3}	$10^{-2}; 10^{-3}$	$10^{-2}; 10^{-3}$
	10^{-6}	$10^{-4}; 10^{-5}$	$0,65 \cdot 10^{-5}$
	10^{-8}	$10^{-5}; 10^{-6}$	$0,4 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2

Распределение $J_{x,y}^*$ для $M=48$, $\alpha=10^{-8}$

№ витка	$J_x^* \cdot 10^1, \text{ а/см}^2$	№ витка	$J_y^* \cdot 10^1, \text{ а/см}^2$
I	-0,004689I	25	-0,28662
2	-0,0I40948	26	-0,284038
3	-0,022663	27	-0,284399
4	-0,0283067	28	-0,289062
5	-0,0300457	29	-0,292366
6	-0,0306046	30	-0,28899
7	-0,0358I88	3I	-0,28I754
8	-0,0500380	32	-0,280965
9	-0,07I0906	33	-0,2938I2
IO	-0,090I378	34	-0,3I3369
II	-0,097682	35	-0,32I66
I2	-0,0908793	36	-0,30720I
I3	-0,0764837	37	-0,278483
I4	-0,0678347	38	-0,258640
I5	-0,0779343	39	-0,267384
I6	-0,II2592	40	-0,307554
I7	-0, I67743	4I	-0,36589I
I8	-0,232267	42	-0,423547
I9	-0,293709	43	-0,466I6I
20	-0,343035	44	-0,487830
2I	-0,37637	45	-0,4897I6
22	-0,394I85	46	-0,476652
23	-0,3994I	47	-0,45422I
24	-0,3957I97	48	-0,427I39

Таблица 3

Зависимость средней относительной точности низших гармоник от количества блоков и витков в них

№ варианта	N_y - количество витков по y	N_x - количество витков по x	N_1 - количество витков по блокам	N_2 - количество витков по блокам	Средняя относительная точность низших гармоник c_2, c_4, c_6
I	24	IO	24 - один блок	6 три блока I	$0,2 \cdot 10^{-1}$ $0,4 \cdot 10^{-2}$ $0,8 \cdot 10^{-4}$
2	24	IO	24 - один блок	8 три блока I	$0,17 \cdot 10^{-1}$ $0,5 \cdot 10^{-2}$ $0,14 \cdot 10^{-3}$
3	20	9	9 три блока 4	4 три блока 3	$0,35 \cdot 10^{-2}$ $0,84 \cdot 10^{-3}$ $0,13 \cdot 10^{-2}$
4	20	9	IO три блока 5	6 три блока 2	$0,4 \cdot 10^{-3}$ $0,5 \cdot 10^{-4}$ $0,4 \cdot 10^{-3}$
5	20	9	I2 два блока 8	6 три блока 2	$0,4 \cdot 10^{-2}$ $0,1 \cdot 10^{-3}$ $0,9 \cdot 10^{-3}$
6	20	9	II три блока 4	6 три блока 2	$0,2 \cdot 10^{-2}$ $0,1 \cdot 10^{-2}$ $0,2 \cdot 10^{-2}$
7	20	9	IO три блока 4	6 три блока 2	$0,2 \cdot 10^{-2}$ $0,9 \cdot 10^{-3}$ $0,32 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4. Значение координат центров блоков по x и y , дающих наименьшую относительную точность низших гармоник

N_y	N_{k1} : N_2 N_1	y_1	y_2	y_3	N_x			N_{k2} : N_2 N_1	x_1	x_2	x_3	Средняя относительная точность низших гармоник c_2, c_4, c_6
					$x = \text{const} = 3,8$							
	10											
20	5	0,509	1,5972	2,8528	9	2	6	1,0017	2,2937	3,1406		$0,3 \cdot 10^{-6} + 0,5 \cdot 10^{-6}$
	5					1						
	12				9	2	6	1,6024	2,2465	3,225		$0,9 \cdot 10^{-5} + 0,45 \cdot 10^{-6}$
20	8	0,8421	2,6494									

Таблица 5
Зависимость средней относительной точности низших гармоник от ошибок округления

$$|\Delta x_i| = |\Delta y_i| = 0,002$$

	$x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i$	Средняя относительная точность низших гармоник c_2, c_4, c_6
I	x_1, x_2, x_3, y_1, y_2	$0,9 \cdot 10^{-5} + 0,45 \cdot 10^{-6}$
2	$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 + \Delta y_2$	$0,9 \cdot 10^{-4} + 0,2 \cdot 10^{-5}$
3	$x_1, x_2, x_3, y_1 + \Delta y_1, y_2$	$0,12 \cdot 10^{-3} + 0,7 \cdot 10^{-4}$
4	$x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, y_1, y_2$	$0,45 \cdot 10^{-4} + 0,45 \cdot 10^{-5}$
5	$x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3, y_1, y_2$	$0,3 \cdot 10^{-4} + 0,96 \cdot 10^{-5}$
6	$x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, y_1, y_2$	$0,2 \cdot 10^{-5} + 0,97 \cdot 10^{-5}$
7	$x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, y_1 + \Delta y_1, y_2 + \Delta y_2$	$0,16 \cdot 10^{-3} + 0,7 \cdot 10^{-5}$

Заключение

1. В данной работе рассматривается метод решения некоторого класса нелинейных обратных задач магнитостатики, который явился развитием метода, предложенного в работе /3/. Предлагаемый метод позволяет сравнительно легко преодолеть трудности, связанные с решением системы нелинейных уравнений, к которым обычно сводятся нелинейные обратные задачи.

2. Разработан численный алгоритм решения описанного класса обратных задач магнитостатики, реализованный в виде комплекса программ на ФОРТРАНе, который позволяет моделировать однородное магнитное поле для различных конфигураций диполя типа "оконная рама".

3. С помощью данного комплекса программ проведены численные расчёты диполей с различной конфигурацией апертуры.

Автор приносит большую благодарность Е.П.Жидкову, И.А.Шелаеву и И.П.Юдину за постоянные обсуждения работы и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. ISABELLE, Superconducting Storage Accelerator, (M.Q.Barton).
2. R.R.Wilson, The Tevatron, Physics today, October 1977, P23, BNL 50519, May, 1976.
3. Е.П.Жидков, Л.Л.Зиновьева, Р.В.Полякова, И.А.Шелаев. Решение некоторого класса нелинейных обратных задач магнитостатики. II-10845, Дубна, 1977 .
4. В.И.Котов, В.В.Миллер. Фокусировка и разделение по массам частиц высоких энергий, Атомиздат, 1969 .
5. Г.Брехна. Сверхпроводящие магнитные системы. Мир, М., 1976 .
6. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин. Методы решения некорректных задач. Наука, М., 1974 .
7. Е.П.Жидков, Л.Л.Зиновьева, Н.Б.Рубин. P9-7580, ОИЯИ, 1973 .
8. И.Н.Силин. II-62, Дубна, ОИЯИ, 1967 .

Рукопись поступила в издательский отдел
6 февраля 1979 г.