ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

11 - 11921

Ю.С.Дерендяев, В.И.Кочкин, Г.А.Ососков

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ТСУДЫ-КИОНО-КЛЕЙЗЫ К РАСЧЕТУ ПАРАМЕТРОВ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ

1978

11 - 11921

Ю.С.Дерендяев, В.И.Кочкин, Г.А.Ососков

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ТСУДЫ-КИОНО-КЛЕЙЗЫ К РАСЧЕТУ ПАРАМЕТРОВ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ

Направлено на VI Всесоюзное совещание по методам Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике, Новосибирск, 1979.

Дерендяев Ю.С., Кочкин В.И., Ососков Г.А.

11 - 11921

О применении метода Тсуды-Кионо-Клейзы к расчету параметров магнитных систем

По названной методике на языке ФОРТРАН составлено несколько стандартных программ для решения методом Монте-Карло систем нелинейных уравнений любого конечного порядка. Проведены расчеты ряда конкретных систем уравнений различного порядка, а также несколько практических задач анализа и синтеза магнитных систем с небольшим числом параметров. Данная методика позволила проводить на ЭВМ приближенную (10-20%) локализацию решений для нелинейных систем невысокого порядка.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Derendyaev Yu.S., Kochkin V.I., Ososkov G.A.

11 - 11921

On Application of the Tsuda-Kiyono-Kleiza Method to Calculating Magnetic System Parameters

Several subroutines were written in FORTRAN language for solving the nonlinear system of equations of the finite order by means of Monte-Carlo method. Solving of the system of different order were performed. These subroutines were used for the analysis and synthesis of magnetic systems of the low order. The used method allowed to find approximate estimates (10-20%) of the solution of the nonlinear system of the low order.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

I. Введение. Практическое вычисление одного или всех корней, являющихся решением данной системы нелинейных алгебраических уравнений, - трудная, хотя и очень актуальная проблема. Известно несколько методов её решения (см., /1/), например, итеративные методы, гарантирующие сходимость вычислительного процесса при условии близости начальных значений к искомым. Однако в случае, когда область решений известна грубо, они оказываются безуспешными.

В 1963 году Т.Тсуда и Т.Кионо /1/ предложили схему Монте-Карло для приближённой локализации корней, которая призвана обеспечить хорошие начальные значения для более точных методов их вычисления. Позднее (1973г.) их схема была развита В.Клейзой в его работах /2,3/, но эти работы носили теоретический характер, и область их применений ограничивалась модельными задачами. В настоящем сообщении даются описания основной схемы методов, реализованных в программах, разработанных в ОИЯИ, а также некоторые результаты их применения как к расчёту известных модельных задач, так и конкретных магнитных систем ускорителей заряженных частиц.

2. Схема численного метода

Пусть задана система нелинейных алгебраических уравнений:

$$F_i(x_1,\dots,x_n) = 0\ ; \qquad i=1,\dots,n; \tag{I}$$

(n – натуральное число).

В нашей работе рассматривается численное решение системы (I) или приближения к её решению двумя методами. В /I/ изложена методика решения системы (I) (первый метод) моделированием случайного блуждания частиц (см., например, /9/) в потенциальном поле U, порождаемом уравнениями (I):

$$U(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i^2(x_1,\dots,x_n)\ ; \quad \alpha_i = \text{constants}; \tag{2}$$

Тогда искомые решения описываются выражениями

$$\langle x_i \rangle = \frac{\int\dots\int x_i e^{-U/\beta}\, dx_1\dots dx_n}{\int\dots\int e^{-U/\beta}\, dx_1\dots dx_n}\ , \qquad (i=1,\dots,n)\ . \tag{3}$$

Здесь β есть константа, эквивалентная кинетической температуре.

В /2,3/ система (I) решается методом приближённого интегрирования по схеме Монте-Карло (второй метод), причём решения находятся по формулам (4).

$$X_i = \frac{\sum_{K=1}^{N} \eta_{iK}^{(\alpha_i)}}{\sum_{K=1}^{N} \eta_K^{(\alpha_i)}}\ , \tag{4}$$

где

$$\eta_K^{(\alpha_i)} = e^{-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i^2 \left[a_1+(b_1-a_1)\gamma_k;\dots,a_n+(b_n-a_n)\gamma_{n(k-1)}\right]} \tag{5}$$

$$\eta_{ik}^{(\alpha_i)} = \left[a_i+(b_i-a_i)\,\gamma_{i(k-1)}\right]\cdot \eta_K^{(\alpha_i)}\ . \tag{6}$$

В формулах (4)+(6) (см. /3/) N – число испытаний, $K = 1,\dots,N$;

γ_i – случайное равномерно распределённое в (0,I) число; a_i, b_i – начало и конец интервала, в котором ищется x_i ; α_i – масштабные множители, как и в (2).

Алгоритмы, описанные в /I,3/, реализованы нами в программах TSUDA2 и KLEIZA (см. лит. /4/) на языке фортран в мониторной системе "Дубна" /8/.

Программа TSUDA2 реализует в точности алгоритм, описанный в /I/, применительно к случаю произвольного числа уравнений системы (I) с полуавтоматическим выбором следующих параметров:

I) AL – длина свободного пробега в зависимости от размеров области;

2) D – дисперсия частных решений;

3) N1,N2 – число испытаний, после которого осуществляется выдача промежуточных результатов или выход на окончание текущего счёта;

4) TM – параметр; брался нами равным maxU при граничных значениях неизвестных x_i .

Добавим, что α_i полагались равными I, IO, IOO, а дальнейшее их варьирование на порядок от IOO до IOOOO не оказывало заметного влияния на решение в рассмотренных нами задачах и не улучшало его.

С целью проверки программ, указанных выше, были решены, в частности, система №I (из /I/)

$$\begin{cases} xy - 3/16 = 0 \\ x^2 + y^2 - 5/8 = 0 \end{cases}$$

и

система №2 (из /7/)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4Z = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0\ . \end{cases}$$

В мониторной системе "Дубна" (ЭВМ БЭСМ-6) оба решения системы №I ((0,25; 0,75) и (0,75; 0,25)) были найдены после 50 тыс. испытаний за I мин.22 с., а положительное решение системы №2 (0,7852; 0,4966; 0,3699) - за 2мин.07с. по программе TSUDA2. Примерно за такое же время и с той же точностью эти решения были получены и по программе KLEIZA за 50 тыс. испытаний.

3. Расчёт параметров магнитной системы

Оба метода были использованы для решения конкретной задачи вычисления параметров магнитной системы (координаты катушек r', z'), обеспечивающих заданное магнитное поле в определённой области V. Искомые параметры связаны между собой нелинейными алгебраическими уравнениями.

Явный вид нелинейной связи параметров в этих уравнениях виден из выражения для B_z составляющей магнитной индукции от n круговых витков с током I_i и координатами r_i', z_i'.

$$B_z(r,z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu}{2\pi}I_i\frac{1}{\sqrt{(r+r_i')^2+(z-z_i')^2}}\left[K+\frac{r_i'^2-r^2-(z-z_i')^2}{(r-r_i')^2+(z-z_i')^2}E\right], \tag{7}$$

где E,K - эллиптические интегралы I и II рода, зависящие от r_i' и z_i', $n=14$.

Разобьём заданную область V равномерно на $2n$ точек. В каждой точке запишем уравнение (7), тогда получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров r_i', z_i'. Полученные решения далее можно использовать, как начальные данные, для более точного нахождения корней итерационным методом. Такая задача, например, поставлена в /5/ и решена в частном случае с помощью программы FUMILI из библиотеки СП для мониторной системы "Дубна" БЭСМ-6, которая требует "хорошего" начального приближения.

4. Расчёт траектории электронного кольца в заданных электромагнитных полях

Пусть требуется вычислить $R(t)$, $Z(t)$, т.е. траектории электронного кольца в симметричном относительно оси z магнитном поле $\vec{B}$, которое создаётся системой n катушек с известными параметрами

$I_i(t)$ - закон изменения тока в i-й катушке

r_i' - r-координата i-й катушки

z_i' - z-координата i-й катушки.

Вычисление $R(t)$ - радиуса кольца и $Z(t)$ - z координаты кольца сводится к решению двух нелинейных уравнений относительно $R(t)$, $Z(t)$ при фиксированном t.

$$\begin{gathered} B_r(R(t),Z(t),r_i',z_i',I_i(t))=0 \\ R^2(t)B_z(R(t),Z(t),r_i',z_i',I_i(t))-R(t)A_\varphi(R(t),Z(t),r_i',z_i',I_i(t))=\\ =\mathrm{const}, \end{gathered} \tag{8}$$

где B_r, A_φ, подобно B_z, легко выписать, а const равна первой части уравнения при $t=0$.

$$B_r=\frac{\mu}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}I_i(t)\frac{z-z'}{r\sqrt{(r+r_i')^2+(z-z_i')^2}}\left[-K+\frac{r^2+r_i'^2+(z-z_i')^2}{(r-r_i')^2+(z-z_i')^2}E\right]$$

$$A_\varphi=\frac{\mu}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}I_i(t)\sqrt{\frac{r_i'}{r}}\left[\left(\frac{2}{k_i}-k_i\right)K-\frac{2}{k_i}E\right].$$

Здесь k_i, модуль эллиптических интегралов E,K, равен

$$k_i=\frac{4rr_i'}{(r+r_i')^2+(z-z_i')^2}.$$

Система (8) решалась относительно $R(t),Z(t)$ по программе TSUDA2. В произвольный момент времени t система (8) вычислялась за 4 минуты для I000 испытаний на ЭВМ БЭСМ-6; найденное решение отличалось от вычисленного в /5/ по методу Ньютона на I0%.

5. <u>Заключение.</u> Проведённые нами численные расчёты по методу Тсуды-Кионо-Клейзы позволяют сделать вывод о том, что для сис-

тем алгебраических нелинейных уравнений невысокого порядка ($n \leq 5$) метод Монте-Карло позволяет за 2-3 тыс. испытаний локализовать решение с точностью 5-10%, причём все корни определяются за один приём. Подобная же методика применялась нами и для сложных систем трансцендентных уравнений с большим объёмом вычислений (без достаточного исследования условий такой применимости) и в некоторых случаях давала за очень малое число испытаний (500 - 2000) результаты, не отличающиеся от решений другими методами более чем на 5-10%.

Формальное применение программ TSUDA и KLEIZA к произвольным системам нелинейных уравнений при $n > 15$ не позволило локализовать все корни даже при задании начальных значений в сравнительно узкой области.

Методы Монте-Карло сохраняют на наш взгляд актуальность для решения данной проблемы и требуют дальнейших теоретических разработок и машинных экспериментов.

Литература

1. Takao Tsuda and Takeshi Kiyono. Numerische Mathematik, Band 6, Heft 2, 1964, p.p. 59-67.
2. В.Клейза. Решение нелинейных разностных уравнений методом Монте-Карло. В сб. "Дифференциальные уравнения и их применение", вып.3, Изд. Института Физики и математики АН Литовской ССР, Вильнюс, 1973, стр. 51-67.
3. В.Клейза. Алгоритм метода Монте-Карло для решения нелинейного дифференциального уравнения. В сб. "Дифференциальные уравнения и их применение", вып.7, Вильнюс, 1974, стр. 9-19.
4. Ю.С.Дерендяев, В.И.Кочкин, Г.А.Ососков. Депонированное сообщение ОИЯИ, Б1-11-10351, Дубна, 1976.

5. Ю.С.Дерендяев. Депонированное сообщение ОИЯИ, Б1-9-9092, Дубна, 1975.
6. Ю.С.Дерендяев, В.И.Кочкин, Г.А.Ососков. В сб. "Совещание по программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 20-23 сентября, 1977г.)"; Д10, 11-11264; Дубна, 1978, стр. 254-255.
7. Н.В.Копчёнова, И.А.Марон. "Вычислительная математика в примерах и задачах", "Наука", Главная ред. физико-математической литературы, М., 1972.
8. Г.Л.Мазный. Программирование на БЭСМ-6 в системе "Дубна", М., "Наука", Главная ред. физико-математической литературы, М., 1978.
9. Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц. Статистическая физика. Издательство "Наука", М., 1964г.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 сентября 1978 года.