А-659

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

2/I-78

11 - 10974

114/2-78

С.Н.Андрианов, А.Д.Дымников, Е.М.Кулакова,
Г.Х.Саркисян

О РАСЧЕТАХ ДИНАМИКИ ЧАСТИЦ РЕКУРСИВНЫМИ МЕТОДАМИ

1977

11 - 10974

С.Н.Андрианов, А.Д.Дымников, Е.М.Кулакова,

Г.Х.Саркисян

О РАСЧЕТАХ ДИНАМИКИ ЧАСТИЦ РЕКУРСИВНЫМИ МЕТОДАМИ

Направлено на Совещание по программированию и математическим методам решения физических задач, Дубна, 20-23 сентября 1977 года.

Андрианов С.Н. и др. 11 - 10974

О расчётах динамики частиц рекурсивными методами

Исследуется применение рекурсивного метода челнок-сумм интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений для расчётов динамики заряженных частиц.

Рассматриваемый метод характерен строгим сохранением фазового объема частиц на каждом шаге приближенного определения динамики пучка и компактной формой записи алгоритма вычислений.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

В расчетах динамики пучков заряженных частиц и в теории ускорителей часто используется представление магнитной /или электростатической/ линзы в виде совокупности тонкой линзы и двух свободных промежутков и реже - в виде двух тонких линз и одного свободного промежутка. Компактное описание такого представления получается при использовании аппарата скобок Гаусса [1-3]. Обобщение последних более высокой размерности приводит к понятию матричного кортежа и рекурсивным операциям над ним - челнок-суммированию [3].

Получаемые рекурсивные алгоритмы в ряде случаев оказываются весьма эффективными в таких областях, как решение линейных алгебраических систем большого порядка с редкой матрицей коэффициентов и решение систем дифференциальных уравнений. Простота и достаточно обширная область применения рекурсивных операций на кортежах позволяют рекомендовать их к использованию в модульных системах программирования.

Введем следующие обозначения: I - единичная (β,β)-матрица, $i(j)$ - j-й столбец I, $\tilde{i}(j)$ - j-я строка I, $I(j)$ - матрица рождения, $I(-j)$ - матрица уничтожения, где

$$I(j) = i(j)\tilde{i}(j), \qquad I(-j) = I - I(j); \qquad /1/$$

$H(a(j))$ - j-я элементарная матрица, отличающаяся от I своей j-й строкой /вектор-строкой $\tilde{a}$ / :

$$H(a(j)) = i(j)\tilde{a} + I(-j). \qquad /2/$$

Пусть $A^{(\beta,\beta)}$ - квадратная (β,β) -матрица, например матрицант или матрица в задачах транспортировки пучков заряженных частиц. Пусть $A_{(r)}$ означает (r,r) -матрицу, состоящую из первых r строк и столбцов матрицы A, определитель которой отличен от нуля для $r=1:\beta-1$.

Можно показать, что тогда матрицу $A^{(\beta,\beta)}$ можно представить либо в виде произведения β элементарных матриц / H_1 -разложение/, либо в виде произведения $(\beta+1)$ -й элементарной матрицы / H_2 -разложение/. Например, для $\beta=3$ имеем:

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad /3/$$

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_{41} & b_{42} & b_{43} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad /4/$$

Составим из элементов a и b две матрицы, которые будем называть кортежами и обозначать

$$\langle a(3/1)| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \qquad \langle b(4/1)| = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{Vmatrix} \qquad /5/$$

Пусть выражение $\tilde a + (j)T$, где $\tilde a$– β-мерный вектор-строка, T– (β,r) -матрица, обозначает новую матрицу, полученную из матрицы T путем замены ее j -й строки $(j=1:\beta)$ на вектор-строку $\tilde a$:

$$\tilde a + (j)T = i(j)\tilde a + I(-j)T. \qquad /6/$$

Определим операцию умножения кортежа $\langle a(n/1)|$ на (β,β) -матрицу T следующим рекурсивным образом:

$$\langle a(n/1)|\cdot T = T\langle n|, \qquad /7/$$

$$T\langle j| = a^j\cdot T\langle j-1| + (j)\cdot T\langle j-1|, \quad T\langle 0| = T, \qquad /8/$$

$$a^j = \| a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{j\beta} \|, \quad j=1:n. \qquad /9/$$

Тогда разложения /3/ и /4/ можно записать в виде:

$$A = \langle a(3/1)|\cdot I = \langle b(4/1)|\cdot I. \qquad /10/$$

Произведение кортежа на единичную матрицу назовем матрицей челнок-сумм данного кортежа. Кортежи $\langle a(3/1)|$ и $\langle b(4/1)|$ в выражении /10/ назовем соответственно H_1-кортежем-образом и H_2 -кортежем-образом матрицы A с порождающими матрицами a и b. Процесс получения по данной матрице $A^{(\beta,\beta)}$ элементов ее кортежей-образов можно записать следующим образом:

$$a^j = A^j(j), \quad A_j(j+1) = A_j(j)\cdot(A_j^j(j))^{-1}, \qquad /11/$$

$$A_r(j+1) = A_r(j) - A_j(j+1)A_r^j(j), \quad r\neq j, \quad A(1)=A, \quad r,j=1:\beta,$$

$$A = \langle a(\beta/1)|\cdot I, \quad \prod_{j=1}^{\beta} \operatorname{Det} a_j^j = \operatorname{Det} A. \qquad /12/$$

Здесь A^j и A_r - соответственно j-я строка и r-й столбец матрицы A.

$$b_j^1 = (b_1^j)^{-1} \cdot (A_j^j - b_j^j - \sum_{i=2}^{j-1} b_i^j \cdot A_j^i), \qquad /13/$$

$$b^{j+1} = A^{j+1}(j+1), \quad A_r(j+1) = A_r(j) - A_j(j+1) b_r^j, \quad r \neq j, \qquad /14/$$

$$A_j(j+1) = A_j(j) b_j^j, \quad A(1) = A, \quad A^{\beta+1} = A^1, \quad r, j = 1:\beta, \qquad /15/$$

$$A = \langle b(\beta+1/1)| \cdot I, \quad \prod_{j=1}^{\beta+1} \mathrm{Det}\, b_j^j = \mathrm{Det}\, A. \qquad /16/$$

При этом порождающая матрица b такова, что ее диагональные элементы для первых β строк / b_j^j для $j=1:\beta$/ являются произвольными /их можно положить, например, равными 1/.

Пусть ищется решение задачи Коши для линейного дифференциального матричного уравнения:

$$\frac{d}{ds} X^{(\beta,r)}(P, s/s_0) = P^{(\beta,\beta)}(s) X^{(\beta,r)}(P, s/s_0), \qquad /17/$$

$$X^{(\beta,r)}(P, s_0/s_0) = X(0), \qquad /18/$$

где $P(s)$ - кусочно-непрерывная ограниченная (β,β)-матрица - функция с нулевыми диагональными элементами, $X = R(P, s/s_0)\, X(0)$, $R(P, s/s_0)$ - матрицант, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{dR}{ds} = P(s) R, \qquad R(P, s_0/s_0) = I. \qquad /19/$$

Пусть $\kappa = (s_0, s_1, \dots, s_n)$ - разбиение замкнутого промежутка $[s_0, s_n]$ на открытые частичные промежутки $J_j = (s_{j-1}, s_j)$ длины $h_j = s_j - s_{j-1}$ с мелкостью $|\kappa| = \max_j h_j$, $j=1:n$. Значение функции $P(s)$ в некоторой точке промежутка J_j обозначим через $P(j)$. В ряде случаев удобно полагать $P(j) = P(s_j + \frac{1}{2} h_j)$.

Составим два кортежа:

$$\langle a(n\beta/1)| = \left\| \begin{matrix} I + h_1 P(1) \\ \cdots\cdots \\ I + h_n P(n) \end{matrix} \right\|, \qquad \langle b(n(\beta+1)/1)| = \left\| \begin{matrix} \bar P(1) \\ \cdots \\ \bar P(n) \end{matrix} \right\|, \qquad /20/$$

где

$$\bar P(j) = \left\| \begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} P_{12}(j) h_j & \cdots & \frac{1}{2} P_{1\beta}(j) h_j \\ P_{21}(j) h_j & 1 & \cdots & P_{2\beta}(j)\, h_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{\beta 1}(j) h_j & P_{\beta 2}(j) h_j & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} P_{12}(j) h_j & \cdots & \frac{1}{2} P_{1\beta}(j) h_j \end{matrix} \right\| \qquad /21/$$

Тогда непрерывные аналоги для H_1- и H_2-разложений для матрицанта $R(P, s/s_0)$ имеют вид:

$$\bar R(P, s_n/s_0) \cong \langle a(n\beta/1)| \cdot I \cong \langle b(n(\beta+1)/1)| \cdot I. \qquad /22/$$

Такие методы вычисления матрицанта /или X / будем называть H_1- и H_2-методами челнок-сумм.

Разностная схема H_1-метода является схемой I порядка, разностная схема H_2-метода - схемой II порядка для 1-й строки матрицанта и схемой I порядка для остальных строк.

Отметим одну особенность обоих методов челнок-сумм. При $P_{ii}(s) = 0$ для $i = 1:\beta$ определитель приближенного матрицанта строго равен 1 на каждом шаге вычислений, что является основным отличием от методов

Эйлера, Рунге-Кутта или Адамса. Тем самым по методу челнок-сумм можно производить приближенные вычисления с сохранением фазового объема на каждом шаге вычислений.

Метод челнок-сумм может быть использован и для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, для чего уравнение

$$\dot{x}^{(\beta,1)} = f(x) \qquad /23/$$

необходимо записать в формально-линейном виде

$$\frac{d}{dt} \left\| \begin{matrix} x \\ \dot{x} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & I \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x \\ \dot{x} \end{matrix} \right\| , \qquad /24/$$

после чего можно ввести понятие формального матриканта для уравнения /24/.

Предлагаемый метод применялся как для решения задач Коши, в частности для жестких систем, и ряда задач динамики частиц, так и для краевых задач /4/ и в рассмотренных случаях оказался весьма эффективным. Составлена программа на языке ФОРТРАН по решению методом челнок-сумм линейных систем произвольного порядка, которая реализована на ЭВМ БЭСМ-6 и CDC-6500.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Герцбергер М. Современная геометрическая оптика. ИЛ, М., 1962.*
2. *Дымников А.Д. ЖТФ, 1968, 38, с. 1120.*
3. *Дымников А.Д. ОИЯИ, Б1-10427, Дубна, 1977.*
4. *Васильев В.Ю., Дымников А.Д. АЭ, 1974, 37, с. 350.*

Рукопись поступила в издательский отдел
22 сентября 1977 года.