С 345с
Ж-696

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

4911/2-77

12/XII-77

11 - 10845

Е.П.Жидков, Л.Л.Зиновьева, Р.В.Полякова, И.А.Шелаев

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОСТАТИКИ

1977

11 - 10845

Е.П.Жидков, Л.Л.Зиновьева, Р.В.Полякова, И.А.Шелаев

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОСТАТИКИ

Жидков Е.П. и др. 11 - 10845

Решение некоторого класса нелинейных обратных задач магнитостатики

Рассматривается нелинейная обратная задача магнитостатики, которая в общем виде относится к классу некорректных задач с ограничениями на параметры. Предложенный в работе метод приводит поставленную задачу к решению M последовательных нелинейных уравнений с одним неизвестным, что позволяет избежать трудностей, связанных с решением систем нелинейных уравнений, к которым обычно приводятся обратные задачи. Для реализации метода на ЭВМ написана программа на языке ФОРТРАН, с помощью которой решена задача определения положения проводников в дипольном магните и величины тока в них. Рассмотренный метод может быть использован при решении задач, связанных с проектированием различных магнитных систем, в частности магнитных систем ускорителей.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

© 1977 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

I. ВВЕДЕНИЕ

При проектировании магнитных систем необходимо решать обратную задачу магнитостатики, т.е. по заданному магнитному полю определять параметры источников - токи или геометрические характеристики или и то и другое одновременно.

Определение по заданному полю распределения токов в магнитной системе, геометрия которой известна, является линейной обратной задачей магнитостатики. Решение ее было рассмотрено в работе /1/.

В данной работе рассматривается решение нелинейной обратной задачи магнитостатики, когда требуемое поле необходимо создать с помощью проводников, величина тока в которых варьируется, так же как и координаты их положения, при условии, что ток во всех проводниках одинаков /элементы с железом в системе отсутствуют/.

Будем полагать, что поле задается какой-либо из своих компонент (H_x,H_y,H_z), что зависит от конкретной задачи, поэтому в дальнейшем индекс компоненты поля опускается.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в некоторой области S с помощью M бесконечно тонких проводников с одинаковым током I_0 надо создать поле H. В такой магнитной системе поле в любой точке пространства $\vec{p}$ определяется соотношением вида

$$H(\vec{p}) = I_0 \sum_{i=1}^{M} G(\vec{r}_i, \vec{p}), \quad \vec{p} \in S \qquad /1/$$

где $G(\vec{r}_i, \vec{p})$ - функция Грина, r_i - координата i -го проводника.

Требуется определить такие ток I_0 и координаты проводников $\vec{r}_i$, которые бы наилучшим образом обеспечили в известной области S заданное поле $H(\vec{p})$.

Функция Грина обычно нелинейна относительно координат проводников, поэтому рассматриваемая задача представляет собой нелинейную обратную задачу магнитостатики. Известно /2/, что обратные задачи обладают неустойчивым решением и поэтому относятся к классу некорректных задач. Основные принципы решения некорректных задач были предложены А.Н.Тихоновым /2/ и в настоящее время интенсивно развиваются и другими авторами.

Дополнительные трудности при решении обратных задач вызывают ограничения на параметры /3/. Однако в некоторых частных случаях можно эффективно находить решение, удовлетворяющее условиям задачи. Один из таких случаев и рассматривается в данной работе.

III. *МЕТОД РЕШЕНИЯ*

Рассмотрим случай, когда параметром положения проводника является только одна координата, например x, причем допустимая область расположения проводников вдоль оси x известна $(x_1 \le x_i \le x_2, i=1 \div M)$. Если же ограничений на область нет, то их всегда можно ввести разумным образом.

При этих предположениях в соответствии с /1/ имеем /в дальнейшем фиксированные координаты в обозначениях опускаем/

$$H(p) = I \sum G(x_i, \bar{p}). \qquad /2/$$

$$\vec{p} \in S, \; x_1 \le x_i \le x_2 \; .$$

Для решения поставленной задачи определим сначала непрерывное распределение плотности тока $j(x)$ в пределах допустимой области $x_1 \leq x \leq x_2$.

Математически такая задача сводится к решению уравнения Фредгольма 1-го рода

$$H(\vec{p}) = \int_{x_2}^{x_1} j(x)\, G(x, \vec{p})\, dx \qquad /3/$$

$\vec{p} \in S$

и была рассмотрена в работе /1/.

При выборе решения $j^{\alpha}(x)$ / α - параметр регуляризации /2/ / необходимо учесть следующие условия задачи:

1/ точность вычисления поля должна быть не хуже требуемой точности эксперимента;

2/ во всем допустимом интервале $[x_1, x_2]$ функция $j^{\alpha}(x)$ должна сохранять знак;

3/ $|j^{\alpha}(x)| \leq j_{доп}$.

Предположим, что существует решение $j^{\alpha}(x)$, удовлетворяющее всем трем условиям.

Разобьем интервал $[x_1, x_2]$ на M подынтервалов, тогда

$$H(\vec{p}) = \sum_{i=1}^{M} \int_{x_{1i}}^{x_{2i}} j(x)\, G(x, \vec{p})\, dx. \qquad /4/$$

Для каждого подынтервала выполнены условия теоремы о среднем /так выбиралась функция $j^{\alpha}(x)$ /, поэтому

$$H(\vec{S}_j) = \sum_{i=1}^{M} G(x_{ij}, \vec{S}_j) \int_{x_{1i}}^{x_{2i}} j(x)\, dx, \qquad /5/$$

$j = 1 \div N$,

где N - число точек в области S, в которых рассматривается поле, x_{ij} - точка внутри i-го интервала.

Границы подынтервалов выбираются так, чтобы

$$\int_{x_{1i}}^{x_{2i}} j(x)\, dx = \int_{x_{1i+1}}^{x_{2i+1}} j(x)\, dx = I_1. \qquad /6/$$

Тогда

$$\vec{H}(\vec{S}_j) = I_1 \sum_{i=1}^{M} G(x_{ij}, \vec{S}_j), \qquad /7/$$

$$j = 1 \div N.$$

Из /7/ и /2/ имеем, что

$$I_1 = I_0 = \int_{x_1}^{x_2} j(x)dx/M. \qquad /8/$$

Очевидно, что для различных $\vec{S}_j$ /см. /5// существует своя точка x_{ij}, но по теореме о среднем она всегда находится внутри подынтервала $[x_{1i}, x_{2i}]$. Это означает, что искомая координата положения i -го проводника x_i /см. /2// также всегда находится внутри i -го подынтервала. Она определяется из условия минимума функционала

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{N} [\int_{x_{1i}}^{x_{2i}} j(x)G(x,\vec{S}_j)dx - I_0 G(x_i,\vec{S}_j)), \qquad /9/$$

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{N} [\int_{x_{1i}}^{x_{2i}} j(x)G(x,\vec{S}_j)dx - I_0 G(x_i,\vec{S}_j)] \times \frac{\partial G(x_i,\vec{S}_j)}{\partial x_i} = 0,$$

$$x_{1i} \le x_i \le x_{2i} . \qquad /10/$$

Таким образом, решение задачи /2/ сводится к решению M последовательных нелинейных уравнений с одним неизвестным /10/, причем границы существования решения точно известны. Уравнение /10/ может быть решено любым из известных методов.

Замечание 1

Выше был рассмотрен вопрос о создании поля с помощью бесконечно тонких проводников. Несложно показать, что при конечных размерах проводника решение задачи также сводится к уравнению вида /10/, в котором везде функция Грина войдет под знак интегрирования по сечению проводника.

Замечание 2

Случай, когда допустимая геометрическая область размещения проводников задана в пространстве, не вызывает особых затруднений и будет рассмотрен в другой работе.

IV. ПРИМЕР ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА

С помощью рассмотренного метода была решена тестовая задача определения положения проводников в дипольном магните и величины тока в них [4,5].

Известно [4], что если на бесконечно длинном цилиндре распределить ток по косинусоидальному закону ($j = j_0 \cos\phi$), то во всей области внутри цилиндра компонента H_y будет представлять собой абсолютно однородное поле.

Решалась задача определения положения проводников на окружности для создания внутри окружности однородного поля.

Функция $j = j_0 \cos\phi$ удовлетворяет трем условиям в п. II. Для данной конфигурации проводников

$$H_y(x_0,y_0) = k \int_0^{2\pi} j(\phi)\, G_y(R,\phi, x_0,y_0)\, d\phi, \qquad /11/$$

где k - коэффициент, зависящий от системы единиц.

$$G_y(R,\phi, x_0,y_0) = \frac{(x_0 - R\cos\phi)}{(x_0 - R\cos\phi)^2 + (y_0 - R\cos\phi)^2}. \qquad /12/$$

Из /11/ и /12/ следует, что число неизвестных параметров проводников можно сократить в 4 раза, а поле рассматривать только в четверти области.

Полный ток на четверти окружности

$$I = j_0 \int_0^{\pi/2} \cos\phi \, d\phi = j_0 , \qquad /13/$$

откуда ток в одном проводнике

$$I_0 = j_0 / M . \qquad /14/$$

Соотношение между уровнем поля H_y и амплитудой тока j_0 находим из условия

$$H_y(0,0) = -k \int_0^{2\pi} \frac{j_0 R \cos^2\phi}{R^2} d\phi , \qquad /15/$$

откуда

$$H_y = \frac{k\pi j_0}{R} . \qquad /16/$$

Уравнение /10/ в рассматриваемом случае имеет вид

$$\sum_{j=1}^{N} \{ \int_{\phi_{1i}}^{\phi_{2i}} \frac{\cos\phi (x_j - R\cos\phi)}{(x_j - R\cos\phi)^2 + (y_i - R\sin\phi)^2} d\phi - \qquad /17/$$

$$- \frac{(x_j - R\cos\phi_i)}{M[(x_j - R\cos\phi_i)^2 + (y_i - R\sin\phi_i)^2]} \} \times \frac{\partial G(\phi_i)}{\partial \phi_i} = 0,$$

где

$$\frac{\partial G(\phi_i)}{\partial \phi_i} = \frac{R\sin\phi_i\,[(x_0-R\cos\phi_i)^2+(y_0-R\sin\phi_i)^2]}{[(x_0-R\cos\phi_i)^2+(y_0-R\sin\phi_i)^2]^2} -$$

/18/

$$- \frac{2R(x_0-R\cos\phi_i)[(x_0-R\cos\phi_i)\sin\phi_i-(y_0-R\sin\phi_i)\cos\phi_i]}{[(x_0-R\cos\phi_i)^2+(y_0-R\sin\phi_i)^2]^2},$$

$$\phi_{2i} = \arcsin(\sin\phi_{1i} + \frac{1}{M}),$$

$$\phi_{1i+1} = \phi_{2i},$$

/19/

$$\phi_{11} = 0, \quad \phi_{2M} = \frac{\pi}{2}.$$

Уравнение /15/ решалось на ЭВМ с помощью программы, написанной на ФОРТРАНе.

На четверти окружности с радиусом R **=3,5** ***см*** **определялось положение** M(M- Var) **бесконечно тонких проводников с одинаковым током, которые должны внутри окружности обеспечить однородное поле** H_y **=1 Э. Результаты расчетов приведены в** ***таблице.***

Таблица

M, число проводников в четверти окружности	Средняя относительная точность поля для апертуры с R =2,3 см (-65%)	Средняя относительная точность поля для апертуры с R = = 2,3-3 см (от 65 до 85%)
6	10^{-3}	10^{-2}
12	10^{-3} - 10^{-4}	10^{-2} - 10^{-3}
40	10^{-4}	10^{-3}
60	10^{-4} - 10^{-5}	10^{-3} - 10^{-4}
80	10^{-5}	10^{-4}

Замечание

О возможностях создания однородного поля с помощью выбранной магнитной системы судят по относительной точности

$$\epsilon(\vec{S}_j) = \frac{H_{расч.}(\vec{S}_j) - H_{теор.}}{H_{теор.}}.$$

Зная $H_{теор.}$, из /14/ и /16/ находим величину тока, одинакового для всех проводников, координаты которых, в свою очередь, определяются из /17/. Однако в результате вычислений средний уровень однородного поля, соответствующий $H_{расч.}$, немного отклоняется в ту или другую сторону от $H_{теор.}$, вследствие чего относительная точность ϵ также изменяется и уже не является критерием точности создания однородного поля данной системы. Для устранения этой погрешности необходимо ввести уточнение $H_{теор.}$. Это можно сделать следующим образом. Уровень однородного поля $H'_{теор.}$, соответствующий $H_{расч.}$, находится из условия минимума квадратичного функционала

$$\chi^2(H'_{теор.}) = \sum_{j=1}^{N} |H_{расч.}(\vec{S}_j) - H'_{теор.}|^2 .$$

По найденному $H'_{теор.}$ судят об относительной точности однородного поля, которое можно создать рассчитанной магнитной системой

$$\epsilon'(\vec{S}_j) = \frac{H_{расч.}(\vec{S}_j) - H'_{теор.}}{H'_{теор.}}.$$

IV. ВЫВОДЫ

1. В данной работе рассматривается метод решения некоторого типа нелинейных обратных задач магнитостатики, которые в общем виде относятся к классу некорректных задач с ограничениями на параметры.

Этот метод приводит задачу типа /2/ к решению M последовательных нелинейных уравнений с одним неизвестным, что позволяет избежать трудностей, связанных с решением системы нелинейных уравнений, к которым обычно приводятся обратные задачи.

2. Для реализации метода на ЭВМ написана программа на языке ФОРТРАН, с помощью которой решена задача определения положения проводников и тока в них в дипольном магните.

3. Рассмотренный метод используется при решении задач, связанных с проектированием магнитных систем ускорителей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, Р9-7580, Дубна, 1973.*
2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Наука, М., 1974.*
3. *Поляк Б.Т. Итерационные методы решения некоторых некорректных вариационных задач. В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. XII. Изд-во Моск.гос.ун-та, 1969, с. 38-52.*
4. *Брехна Г. Сверхпроводящие магнитные системы. Мир, М., 1976.*
5. ISABELLE, A Proposal for Construction of a Proton–Proton Storage Accelerator Facility. May 1976, Brookhaven National Laboratory.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 июля 1977 года.