1053

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

О.И. Ярковой

1053

АЗИМУТАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ ПЛАЗМА-ПУЧОК ОГРАНИЧЕННОГО РАДИУСА

Дубна 1962 год

О.И. Ярковой

1053

АЗИМУТАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ ПЛАЗМА-ПУЧОК ОГРАНИЧЕННОГО РАДИУСА

Дубна 1962 год

Аннотация

Рассмотрены волны, зависящие от азимута, в ограниченной по радиусу системе плазма-пучок.

Пространственная дисперсия, вызванная направленным движением пучка, учитывается дифференциальными операциями. Исследован спектр колебаний, в частности, найдено нарастающее во времени решение, обусловленное исключительно пространственной дисперсией.

1. Токи возмущения

Линейные возмущения неоднородной системы, состоящей из нескольких сортов частиц, в отсутствие полей в стационарном состоянии описываются кинетическими уравнениями для каждого сорта частиц

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla} f_a = - e_a \{E + [\vec{v}\vec{H}]\} \frac{\partial f_{0a}(\vec{p},\vec{r})}{\partial \vec{p}} \qquad /1/$$

вместе с парой уравнений Максвелла

$$rot\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \; . \qquad /2/$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Полагая $f_a(\vec{r},\vec{v},t) = f_a(\vec{r},\vec{p})\ell^{-i\omega t}$, $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ и проводя Фурье- преобразование /1/, получим

$$-i(\omega - \vec{k}\vec{v}) f_a = -e_a\{\vec{E} + [\vec{v}\vec{H}]\}\frac{\partial f_{0a}}{\partial \vec{p}}, \qquad /3/$$

где в правой части /2/ понимается Фурье-образ правой части /1/. Тогда

$$\vec{j}(\vec{k}) = \sum_a j_a(\vec{k}) = -i\sum_a e_a^2 \int \frac{\vec{v}(\{\vec{E} + [\vec{v}\vec{H}]\}\frac{\partial f_{0a}}{\partial \vec{p}})}{\omega - \vec{k}\vec{v}}\, d\vec{p} \; . \qquad /4/$$

В том случае, когда $\vec{j}$ представляет собой полином по каким-либо из компонент $\vec{k} = \{k_i\} = \{k_x, k_y, k_z\}$ для зависящих от $\vec{r} f_{0a}$ имеет смысл в выражении для тока возмущения перейти к координатному представлению по соответствующим координатам, учитывая, что каждому умножению Фурье-образа на ik_i в координатном представлении соответствует применение операции $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Если

$$f_{0a} = F_a(\vec{p})\,\Pi_a(\vec{r}), \qquad /5/$$

то, как нетрудно видеть из /3/,

$$j_i(\omega,\vec{k}) = \sum_a \sigma_{a\,ij}\,(\omega,\vec{k})\,\tilde{E}_{aj}(\omega,\vec{k}), \qquad /6/$$

где σ_{aij} -тензор проводимости для бесконечной однородной среды с невозмущенной функцией распределения $F_a(\vec{p})$, $\tilde{E}_{aj}(\omega,\vec{k})$ -Фурье-образ величины $E_j(\omega,\vec{r})\Pi_a(\vec{r})$. Очевидно истинный тензор проводимости для этого случая в k -представлении есть интегральный оператор[x/].

Мы будем рассматривать квазинейтральную плазму с плотностью n_1, сквозь которую движется с /релятивистской/ скоростью u квазинейтральный же пучок плотности n_2. Система представляет собой в стационарном состоянии шнур радиуса r_0 с постоянной плотностью

---

x/ Очевидно ход рассуждений не меняется, если в стационарном состоянии присутствует однородное поле.

$$\Pi_a(\vec r) = \begin{cases} 1 & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases} .$$

Зависимостью тензора проводимости от температуры пренебрегается[x].

По /6/, воспользовавшись /1/, находим

$$j_z = \frac{i}{4\pi\omega}\{\omega^2(1-\eta)E_z + \Omega_2^2 b^2 k_\perp^2 E_z + \Omega_2^2 b(\vec k_\perp \vec E_\perp)\} \qquad /7/$$

$$\vec j = \frac{i}{4\pi\omega}\{\omega^2(1-\epsilon)\vec E_\perp + \Omega_2^2 b\vec k_\perp E_z\},$$

где

$$\eta = 1 - \frac{\Omega_1^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_2^2}{\gamma^2(\omega - ku)^2},$$

$$\epsilon = 1 - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\omega^2}, \quad b = \frac{u}{\omega - ku},$$

$$\vec k = \{\vec k_\perp, k_z\} = \{\vec k_\perp, k\} \qquad /7a/$$

$$\Omega_1^2 = 4\pi e^2 n_1\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right), \quad \Omega_2^2 = \frac{4\pi e^2 n_2}{\gamma}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) -$$

– соответственно ленгмюровские частоты плазмы и пучка / m –масса электрона, M–масса иона, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ /.

Переходя к координатному представлению по $\vec r_\perp$ ($\vec r = \{\vec r_\perp, z\}$), имеем

$$j_z = \frac{1}{4\pi\omega}\{\omega^2(1-\eta)E_z - \Omega_2^2 b^2 \Delta_\perp E_z - i\Omega_2^2 b(\vec\nabla_\perp \vec E_\perp)\} \qquad /8/$$

$$\vec j_\perp = \frac{i}{4\pi\omega}\{\omega^2(1-\epsilon)\vec E_\perp - i\Omega_2^2 b\vec\nabla_\perp E_z\}.$$

Таким образом пространственная дисперсия по $\vec r_\perp$ учитывается простыми дифференциальными операциями.

2. Электромагнитные поля и спектр колебаний

Уравнения поля /2/ удобно записать в виде

$$\Delta\vec E - \vec\nabla(\vec\nabla\vec E) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec E}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\vec j}{\partial t} \qquad /9/$$

или, подставляя сюда /8/, для возмущений вида $\vec E = \vec E(r)e^{i(kz+n\theta-\omega t)}$ при $r < r_0$ имеем

$$\Delta_\perp E_z - ik(\vec\nabla_\perp\vec E_\perp) = -\frac{\omega^2}{c^2}\eta E_z - \frac{\Omega_2^2}{c^2}b^2\Delta_\perp E_z - i\frac{\Omega_2^2}{c^2}b(\vec\nabla_\perp\vec E_\perp)$$

$$-k^2\vec E_\perp + \Delta_\perp\vec E_\perp - \vec\nabla_\perp(\vec\nabla_\perp\vec E_\perp) - ik\nabla_\perp E_z = -\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\vec E_\perp - i\frac{\Omega_2^2}{c^2}b\vec\nabla_\perp E_z \qquad /10/$$

---

[x] Учёт температурных эффектов для случая слабой пространственной дисперсии может быть проведен тем же путем, что и в приводимом ниже рассмотрении абсолютно холодной системы.

Применяя операцию $div_{\perp}$ ко второму из уравнений /10/, получим

$$(\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2)(\vec{\nabla}_{\perp} \vec{E}_{\perp}) = i(k_{\perp} - \frac{\Omega_2^2}{c^2} b) \Delta_{\perp} E_z \qquad /11/$$

или после подстановки /11/ в /10/

$$[(1 + \frac{\Omega_2^2}{c^2} b^2) + \frac{(k - \frac{\Omega_2^2}{c^2} b)^2}{\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2}] \Delta_{\perp} E_z + \frac{\omega^2}{c^2} \eta E_z = 0 . \qquad /12а/$$

Два других из уравнений /10/ дают

$$(\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2) E_r - \frac{n^2}{r^2} E_r - i(k - \frac{\Omega_2^2}{c^2} b) \frac{dE_z}{dr} - \frac{in}{r} \frac{d}{dr}(r E_\theta) = 0$$

$$\frac{d}{dr}(\frac{1}{r} \frac{drE_\theta}{dr}) - in \frac{d}{dr}(\frac{E_r}{r}) + \frac{(k - \frac{\Omega_2^2}{c^2} b) n}{r} E_z + (\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2) E_\theta = 0 . \qquad /12в/$$

Окончательно уравнения поля удобно дать в следующем виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dE_z}{dr}) - \frac{n^2}{r^2} E_z + \frac{\lambda^2}{r_0^2} E_z = 0$$

$$x \frac{d}{dx} (\frac{x}{x^2 - n^2} \frac{d\Phi}{dx}) + \Phi = 0 \qquad /13/$$

$$E_r = \frac{in}{x^2 - n^2} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{i(k - \frac{\Omega_2^2}{c^2} b)}{\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \frac{1}{x^2 - n^2} \frac{dE_z}{dr} ,$$

где

$$\frac{\lambda^2}{r_0^2} = \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \eta (\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2)}{(1 + \frac{\Omega_2^2 b^2}{c^2})(\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2) + (k - \frac{\Omega_2^2}{c^2} b)^2} \qquad /13а/$$

$$x = r \sqrt{\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$$

$$\Phi = x E_\theta + \frac{(k - \frac{\Omega_2^2}{c^2} b) n}{\sqrt{\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2}} E_z .$$

Уравнения поля в пустом пространстве $(r > r_0)$, очевидно, можно получить, полагая в /13/ $\epsilon = \eta = 1$, $b = 0$. В дальнейшем величины, относящиеся к области, занимаемой частицами, снабжаются индексом 1, к пустому пространству - индексом 2. Как видно, решения /13/ можно записать в виде

$$E_z^{(1)} = A_1 J_n (\lambda \frac{r}{r_0}) , \quad E_z^{(2)} = A_2 H_n (\mu \frac{r}{r_0}) ,$$

$$\Phi^{(1)} = B_1 \Phi_1 (x) , \quad \Phi^{(2)} = B_2 \Phi_2 (\mu \frac{r}{r_0}) , \qquad /14/$$

где $\mu^2=(\frac{\omega^2}{c^2}-k)r_0^2$, J_n и H_n —соответственно функции Бесселя и Ганкеля, Φ_1 и Φ_2 —линейно-независимые решения второго из уравнений /13/, причём Φ_1 ограничено в нуле, а Φ_2 дает на бесконечности расходящуюся волну.

Потребуем при $r=r_0$ непрерывности тангенцианальных компонент электрического и магнитного поля

$$E_z^{(1)}=E_z^{(2)},\quad H_z^{(1)}=H_z^{(2)}, \qquad /15/$$

$$E_\theta^{(1)}=E_\theta^{(2)},\quad H_\theta^{(1)}=H_\theta^{(2)},$$

согласно /2/,

$$H_\theta=\frac{ic}{\omega}\left[\frac{dE_z}{dr}-ikE_r\right] \qquad /16/$$

$$H_z=-\frac{ic}{\omega}\left[\frac{1}{r}\frac{drE_\theta}{dr}-\frac{in}{r}E_r\right].$$

В дальнейшем мы будем интересоваться случаем $k=0$ /азимутальные волны/. Положим также $2\nu_1=\frac{\Omega_1^2}{\beta^2}r_0^2\ll 1$, $\frac{2\nu_2}{\gamma}=\frac{\Omega_2^2}{c^2}r_0^2\ll 1$. Это условие ограничивает число частиц на единицу длины пучка / ν — "погонный электрон"/.

Используя /14/ и /16/ запишем /15/ в виде /

$$A_1J_n(\lambda)=A_2H_n(\mu) \qquad /17/$$

$$A_1\lambda J'_n(\lambda)=A_2\mu H'_n(\mu)$$

$$B_1\frac{1}{x_0}\Phi_1(x_0)+\frac{\Omega_2^2 bn}{\epsilon\omega^2 r_0}A_1J_n(\lambda)=B_2\frac{1}{\mu}\Phi_2(\mu)$$

$$B_1\frac{x_0^2}{x_0^2-n^2}\Phi'_1(x_0)=B_2\frac{\mu^2}{\mu^2-n^2}\Phi'_2(\mu).$$

Частоты колебаний определяются из условия совместности системы /17/.

Пусть $E_z\neq 0$. Из первой пары уравнений /17/ получим

$$\mu H'_n(\mu)J_n(\lambda)-\lambda H_n(\mu)J'_n(\lambda)=0, \qquad /18/$$

Если $|\omega^2|\gg\Omega_{1,2}^2$, то $\lambda\simeq\mu$ и /18/ не может удовлетворяться, т.к. левая часть переходит во вронскиан линейно-независимых решений уравнения Бесселя. Таким образом $|\omega^2|\gg\Omega_{1,2}^2$ запрещены.

Если $|\omega^2|\lesssim\Omega_{1,2}^2$, то

$$\mu^2<\frac{\Omega_{1,2}^2}{c^2}r_0^2\ll 1$$

и для $H_n(\mu)$ можно воспользоваться выражением μ^{-n}. В результате получим

$$-n\mu^{-n} J(\lambda) - \mu^{-n} J'_n(\lambda)\lambda = -n\mu^{-n}\lambda J_{n-1}(\lambda) = 0 \qquad /18a/$$

откуда $\lambda^2 = \lambda_i^2$,

где λ_i корни $J_{n-1}(\lambda)$. Из /13a/ имеем

$$\frac{2\nu_1}{\gamma}\cdot\frac{\omega^2}{\Omega_1^2}\cdot\frac{(\omega^2-\Omega^2-\Omega^2)(\omega-\Omega_1^2-\frac{\Omega_2^2}{\gamma^2})}{\omega^2(\omega^2-\Omega_1^2-\frac{\Omega_2^2}{\gamma^2})-\Omega_1^2\Omega_2^2\frac{u^2}{c^2}} = \lambda_i^2 . \qquad /19/$$

Отсюда для $\lambda_0 = 0$

$$\omega_{01}^2 = \Omega_1^2 + \frac{\Omega_2^2}{\gamma^2}, \qquad \omega_{02}^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 .$$

Для $\lambda_i \neq 0$ всегда $\frac{2\nu_1}{\gamma} \ll \lambda_i^2\ (\lambda_i^2 > 1)$ и в интересующей нас области частот $|\omega^2| \leq \Omega_{1,2}^2$ /19/ переходит в

$$\omega^2(\omega^2-\Omega_1^2-\frac{\Omega_2^2}{\gamma^2})-\Omega_1^2\Omega_2^2\frac{u^2}{c^2} = 0, \qquad /19a/$$

откуда

$$\omega^2 = \tfrac{1}{2}\left\{(\Omega_1^2+\frac{\Omega_2^2}{\gamma^2}) \pm \sqrt{(\Omega_1^2+\frac{\Omega_2^2}{\gamma^2})^2+4\Omega_1^2\Omega_2^2\frac{u^2}{c^2}}\right. . \qquad /20/$$

Как видно, здесь всегда имеет место апериодический рост решения. Такого рода неустойчивость с волновым вектором перпендикулярным скорости направленного движения для бесконечной однородной среды описана в [2].

В нерелятивистском случае /20/ дает

$$Im\,\omega = \frac{\Omega_1\ \Omega_2}{\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}}\frac{u}{c}, \qquad /20a/$$

что совпадает с выражением для больших K, приведенным в [2]. Отметим еще, что этот эффект обусловлен исключительно пространственной дисперсией по $\vec{r}_\perp$. В этом легко можно убедиться, формально положив в /13a/ $b=0$ /тогда $\lambda^2 = (\omega^2-\Omega_1^2-\frac{\Omega_2^2}{\gamma^2})\frac{r_0^2}{c^2}$ и уравнение $\lambda^2 = \lambda_i^2$ не имеет комплексных решений/.

Перейдем к случаю $E_z = 0$. Вторая пара /17/ дает

$$\frac{\mu^3}{\mu^2-n^2}\Phi_1(x_0)\,\Phi'_2(\mu) - \frac{x_0^3}{x_0^2-n^2}\Phi'_1(x_0)\,\Phi_2(\mu) = 0 . \qquad /21/$$

При $|\omega^2| \gg \Omega_{1,2}^2$ $x_0 \simeq \mu$ и левая часть /21/ обращается во вронскиан линейно-независимых решений, т.е. такие частоты опять запрещены.

Для $|\omega^2| \leq \Omega_{1,2}^2$ $x_0 \ll 1$, $\mu \ll 1$ и

$$\Phi_1(x_0) = x_0^n$$

$$\Phi_2(\mu) = \mu^{-n} .$$

В результате получаем

$$\omega^2 = \frac{\Omega_1^2+\Omega_2^2}{2} . \qquad /21a/$$

Естественно здесь нет возбуждения волн, поскольку $(\vec{E}\,\vec{u}) = 0$ и пучок не производит работы над полем.

Литература

1. В.П.Силин и А.А.Рухадзе "Электромагнитные свойства плазмы и пламоподобных сред" М.Атомиздат /1961/.
2. В.Г.Маханьков, А.А.Рухадзе. "Возбуждение электромагнитных волн поперек пучка заряженных частиц в плазме". Препринт ОИЯИ Р 1005 /1962/.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 июля 1962 года.