ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

И.Н. Иванов

1052

ОБ АЗИМУТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКРАНИРОВАННОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТОКА

Дубна 1962 год

И.Н. Иванов

1052

ОБ АЗИМУТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКРАНИРОВАННОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТОКА

Дубна 1962 год

Рассматривается эффект пространственного заряда, связанного с азимутальной неоднородностью кругового тока, находящегося в постоянном магнитном поле, с учетом экранирования данного тока средой с произвольной диэлектрической проницаемостью.

Задача решается для систем, обладающих цилиндрической симметрией, в приближении однородности тока по Z .

Как известно[1,2], заряженные токи, находящиеся во внешних магнитных полях, могут оказаться неустойчивыми в результате действия пространственного заряда, связанного с их азимутальной неоднородностью. Обычно, например, в ускорительных установках такие токи расположены вблизи экранов, обладающих, в общем случае, некоторыми диэлектрической постоянной ϵ и магнитной проницаемостью μ. Представляется интересным рассмотреть влияние стенок экрана на эффект пространственного заряда. С этой целью рассмотрим бесконечный цилиндрический релятивистский ток с плотностью заряда

$$\rho(r, \phi, t) = \frac{eN}{2\pi a}\,\delta(r-a)\,f(\phi, t), \tag{1}$$

окруженный круглым цилиндрическим экраном радиуса $b > a$.

Здесь
$$e = \begin{cases} +\,e & \text{для тока ионов} \\ -\,e & \text{для тока электронов,} \end{cases}$$

N – число частиц на единицу длины по Z, а $f(\phi, t)$ – некоторая безразмерная функция.

При рассмотрении плотности (1) допускается моделирование задачи: рассматриваются малые искривления цилиндрической поверхности по сравнению с радиусом цилиндра, так что вкладом в электромагнитное поле из-за токов, направленных по радиусу, можно пренебречь. Пусть

$$f(\phi, t) = 1 + \delta f(\phi, t) \qquad \delta f(\phi, t) << 1. \tag{2}$$

Ток при $f(\phi, t) = 1$ является однородным и стационарным; он образован заряженными частицами, движущими со скоростью

$$r V_\phi = c\beta_0 = const \qquad V_r = 0 \qquad \left(V_r = \frac{dr}{dt}\ ;\quad V_\phi = \frac{d\phi}{dt}\right)$$

с энергией $mc^2\gamma = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$ во внешнем магнитном поле и в собственных полях:

$$H_z^1 = -\frac{\kappa e N \beta_0}{a}\ ; \qquad E_r^1 = \frac{\kappa e N}{a} \qquad \kappa \approx 1$$

Уравнения магнитной гидродинамики, записанные на радиусе a, при этих предположениях дают равновесие центробежной силы с разностью магнитных давлений внутри и вне заряженного цилиндра, а будучи линеаризованными относительно этого стационарного состояния

$$r V_\phi = c\beta_0 + \delta r V_\phi(r, \phi, \omega)\exp i\omega t$$

$$V_r = \delta V_r(r, \phi, \omega)\ \exp i\omega t$$

$$H_z = \begin{cases} H_z^0 + H_z^1(r) + \delta H_{z1}(r, \phi, \omega)\exp i\omega t\ , & r < a \\ H_z^0 + \delta H_{z2}(r, \phi, \omega)\exp i\omega t\ , & r > a \end{cases} \tag{3}$$

$$E_r = \begin{cases} E_r^1(r) + \delta E_{r2}(r, \phi, \omega) \exp i\omega t, & r > a \\ \delta E_{r1}(r, \phi, \omega) \exp i\omega t, & r < a \end{cases}$$

$$E_\phi = \delta E_\phi (r, \phi, \omega) \exp i\omega t,$$

$$f = 1 + \delta f(r, \phi, \omega) \exp i\omega t$$

имеют вид

$$\frac{\partial \delta V_r}{\partial \phi} + \frac{ia\omega}{c\beta_0} \delta V_r - [1 - \frac{e^2 N \kappa}{mc^2\beta_0^2\gamma}] \delta r V_\phi = \frac{ea}{mc\gamma\beta_0}[\delta E_r + \beta_0 \delta H_z]$$

$$\frac{\partial \delta r V_\phi}{\partial \phi} + \frac{ia\omega}{c\beta_0} \delta r V_\phi + [1 - \frac{e^2 N\kappa}{mc^2\beta_0^2\gamma^3}] \delta V_r = \frac{ea}{mc\gamma^3\beta_0} \delta E_\phi \tag{4}$$

$$\frac{\partial \delta f}{\partial \phi} + \frac{ia\omega}{c\beta_0} \delta f = -\frac{1}{c\beta_0} [\frac{\partial}{\partial r} r \delta V_r + \frac{\partial \delta r V_\phi}{\partial \phi}].$$

Для нахождения $\delta H_z(r, \phi, \omega)$, $\delta E_r(r, \phi, \omega)$, $\delta E_\phi(r, \phi, \omega)$ имеем

$$\nabla^2 \delta \vec{A} + k^2 \delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \delta \vec{j}(r, \phi, \omega)$$

$$\nabla^2 \delta \phi + k^2 \delta \phi = -4\pi \delta \rho (r, \phi, \omega) \tag{5}$$

$$div\, \delta \vec{A} + \frac{i\omega}{c} \phi = 0$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \qquad \delta \vec{j} = \vec{\ell}_{\phi_0} c \beta_0 \delta\rho = \frac{eN}{2\pi a} \delta(r-a) c\beta_0 \delta f \vec{\ell}_{\phi_0},$$

где $\vec{\ell}_{\phi_0}$ – единичный орт в точке источника

$$\delta \vec{A} = \begin{cases} \delta \vec{A}_1 & r < a \\ \delta \vec{A}_2 & r > a \end{cases} \qquad \delta \phi = \begin{cases} \delta \phi_1 & r < a \\ \delta \phi_2 & r > a. \end{cases}$$

Кроме того, в области $r > b$ будут индуцироваться потенциалы $\delta \vec{A}_3$, $\delta \phi_3$, удовлетворяющие уравнениям:

$$\nabla^2 \delta \vec{A}_3 + k_1^2 \delta \vec{A}_3 = 0$$

$$\nabla^2 \delta \phi_3 + k_1^2 \delta \phi_3 = 0 \tag{6}$$

$$div\, \delta \vec{A}_3 + i \frac{\epsilon\mu\omega}{c} \delta\phi_3 = 0$$

$$k_1^2 = \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2}.$$

Решение систем (5) и (6) связаны граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&[\vec{n}\,(\delta \vec{H}_2 - \delta \vec{H}_1)] = \frac{4\pi}{c}\,\frac{eN}{2\pi a}\,(c\beta_0 \delta f + \delta r\, V_\phi)\,, \qquad r = a \\
&[\vec{n}\,(\delta \vec{H}_3 - \delta \vec{H}_2)] = 0 \\
&[\vec{n}\,(\delta \vec{E}_3 - \delta \vec{E}_2)] = 0 \qquad\qquad , \qquad\qquad r = b
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Решение векторного волнового уравнения для тока (5) есть

$$
\delta \vec{A}_e = \frac{1}{c} \int G_\ell\, \mathcal{T}\, \delta \vec{j}\; d v_0 \qquad dv_0 = r_0\, dr_0\, d\phi_0\,,
$$

где

$$
G_\ell = i\pi H_0^{(1)}(kR) = i\pi \sum_p \exp ip(\phi-\phi_0)\;
\begin{matrix} \mathcal{J}_p(kr) H_p^{(1)}(kr_1) & \ell = 1 \\ \mathcal{J}_p(kr_1)\, H_p^{(1)}(kr) & \ell = 2 \end{matrix}
$$

G_ℓ – функция Грина скалярного уравнения [3].

$\mathcal{T} = \sum\limits_{n=1}^{3} \vec{\ell n}\, \vec{\ell n}$ – единичный аффинор, $H_p^{(1)}(kr)$ и $\mathcal{J}_p(kr)$ соотвественно функция Ханкеля 1-го рода и функция Бесселя. После нахождения $\delta \vec{H}_\ell$, $\delta \vec{H}_3$, $\delta \vec{E}_\ell$, $\delta \vec{E}_3$ по формулам

$$
\delta \vec{H}_\ell = rot\, \delta \vec{A}_\ell \;;\quad \delta \vec{E}_\ell = -\frac{ic}{\omega}\,(k^2 \delta \vec{A}_\ell + grad div\, \delta \vec{A}_\ell)\,;\quad \ell = 1, 2
$$

$$
\delta \vec{H}_3 = \frac{1}{\mu}\, rot\, \delta \vec{A}_3\,;\quad \delta \vec{E}_3 = -\frac{ic}{\omega \epsilon \mu}\,(k_1^2 \delta \vec{A}_3 + grad div\, \delta \vec{A}_3)
$$

будем иметь при $r = a$:

$$
\begin{aligned}
&\delta H_z = -\frac{\kappa eN}{c} \sum_p \int_0^{2\pi} \exp ip(\phi-\phi_0)\, (c\beta_0 \delta f + \delta r\, V_\phi)\, i P_p\, d\phi_0 \\
&\delta E_r = -\frac{\kappa eN}{\omega} \sum_p \int_0^{2\pi} \exp ip(\phi-\phi_0)\, \frac{p}{a}\, (c\beta_0 \delta f + \delta r\, V_\phi)\, i P_p\, d\phi_0 \\
&\delta E_\phi = \frac{\kappa eN}{\omega} \sum_p \int_0^{2\pi} \exp ip(\phi-\phi_0) (c\beta_0 \delta f + \delta r\, V_\phi)\, 2 T_p\, d\phi_0\,,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где

$$
P_p = H_p^{(1)'}(ka)\, \mathcal{J}_p(ka) + H_p^{(1)}(ka)\, \mathcal{J}'_p(ka) - 2\mathcal{J}'_p(ka)\mathcal{J}_p(ka)(A_p + iB_p)
$$

$$
T_p = H_p^{(1)'}(ka)\, \mathcal{J}'_p(ka) - \mathcal{J}'_p(ka)\, \mathcal{J}'_p(ka)(A_p + iB_p)
$$

$$
A_p + iB_p = \frac{\frac{1}{\epsilon}\, H_p^{(1)}(kb)\, H_p^{(1)'}(k_1 b) - H_p^{(1)'}(kb)\, H_p^{(1)}(k_1 b)}{\frac{1}{\epsilon}\, \mathcal{J}_p(kb) H_p^{(1)'}(k_1 b) - \mathcal{J}'_p(kb)\, H_p^{(1)}(k_1 b)}\,.
$$

Штрих-дифференцирование по a или b - в зависимости от аргумента.

При этом уравнение движения (4) переходит в

$$\frac{\partial \delta V_r}{\partial \phi} + \frac{i a \omega}{c\beta_0} \delta V_r - [1 - \frac{e^2 N \kappa}{m c^2 \beta_0^2 \gamma}] \delta r V_\phi = - \frac{i e^2 a N \kappa}{m c^2 \gamma} \sum_p (1 + \frac{pc}{\omega a \beta_0}) \int_0^{2\pi} (c\beta_0 \delta f + \delta r V_\phi) P_p \exp ip(\phi - \phi_0)\, d\phi_0$$

$$\frac{\partial \delta r V_\phi}{\partial \phi} + \frac{i a \omega}{c \beta_0} \delta r V_\phi + [1 - \frac{e^2 N \kappa}{m c^2 \beta_0^2 \gamma^3}] \delta V_r = \frac{e^2 a N \kappa}{m \gamma^3 c \beta_0 \omega} \sum_p \int_0^{2\pi} (c\beta_0 \delta f + \delta r V_\phi) T_p \exp ip(\phi - \phi_0) d\phi_0$$

$$\frac{\partial \delta f}{\partial \phi} + \frac{i a \omega}{c \beta_0} \delta f = - \frac{1}{c\beta_0} \frac{\partial \delta r V_\phi}{\partial \phi} .$$

После разложения в ряд Фурье

$$\delta V_r = \sum_n \exp in\phi\, X_n ; \quad \delta r V_\phi = \sum_n \exp in\phi\, Y_n ; \quad \delta f = \sum_n \exp in\phi\, Z_n \tag{10}$$

и перехода к безразмерным величинам получим из условия совместности алгебраических уравнений для X_n , Y_n , Z_n дисперсионное уравнение:

$$(t + n\beta_0)^2 - \beta_0^2 (1 - d)(1 - \frac{d}{\gamma^2}) + i\pi d t \beta_0^4 [\frac{2t}{\gamma^2} T_n + (1 - \frac{d}{\gamma^2}) P_n] = 0 \tag{11}$$

$$t \equiv \frac{\omega a}{c} , \qquad d \equiv \frac{e^2 N \kappa}{m c^2 \beta_0^2 \gamma} .$$

P_n и T_n записываются соответственно как функции t . При $\frac{2\pi a}{n} < \lambda$ (λ- длина волны возмущений) уравнение (13) превращается в алгебраическое уравнение первого порядка с действительными коэффициентами. Отсюда следует вывод, что такого типа возмущения не будут нарастать во времени. При $\frac{2\pi a}{n} > \lambda$ при металлическом экране имеем условие неустойчивости для токов, расположенных вблизи экрана ($\frac{b}{a} < 2$) :

$$\frac{4 e^2 N \kappa \beta_0^2}{m c^2 \gamma^3} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{b - a}{b + a} > 1 . \tag{12}$$

При диэлектрическом экране неустойчивыми будут волны $\frac{2\pi a}{n} > \lambda$ и инкремент возрастания пропорционален

$$\omega \approx - \frac{ic}{2(b-a)} \ln \frac{1 + \frac{4 e^2 N \kappa \beta_0^2}{m c^2 \gamma^3} \cdot \frac{b - a}{a}}{1 + \frac{4 e^2 N \kappa \beta_0^2}{m c^2 \gamma^3} \frac{b - a}{a} \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}} , \tag{13}$$

если $N < \frac{\gamma mc^2}{e^2}$. При $b \to a$ $\omega \to -\frac{i4e^2 N \kappa \beta_0^2}{mc^2 \gamma^3 a} \cdot \frac{1}{\epsilon + 1}$. Формулы (12) и (13) позволяют выяснить роль экранирования для эффекта пространственного заряда.

В заключение автор выражает большую признательность М.Л. Иовновичу, С.Б. Рубину и О.И. Ярковому за обсуждение задачи.

Литература

1. А.А. Коломенский, А.Н. Лебедев. "Атомная энергия" том 7, вып. 6 (1959).
2. C.E.Nielsen. A.M.Sessler Rev. Sci. Inst. 30. 80 (1959).
3. Ф.М. Морс, Г.Фешбах. Методы теоретической физики, т.1, 2 , ИЛ, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 июля 1962 года.