# ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

В.Г. Маханьков, А.А. Рухадзе

1005

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПОПЕРЕК ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ

Nucl. Fusion, 1962, v2, N3, p 177-182.

Дубна 1962 год

В.Г. Маханьков, А.А. Рухадзе

1005



# ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПОПЕРЕК ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ



Дубна 1962 год

## А н н о т а ц и я

Исследовано возбуждение электромагнитных волн, распространяющихся поперек пучка заряженных частиц в плазме, с учетом теплового движения. Показано, что возбуждение электромагнитных волн происходит как при направленных скоростях пучка, превышающих тепловые скорости частиц, так и при скоростях, меньших чем тепловые скорости частиц в плазме. В случае медленного пучка, направленная скорость которого меньше тепловых скоростей частиц всех сортов в системе, возбуждение электромагнитных волн не происходит. При наличии внешнего магнитного поля возбуждение волн, распространяющихся поперек магнитного поля (и, следовательно, пучка), происходит при $u^2 > v_{A1}^2 + v_{A2}^2$, где $v_{A1}$ и $v_{A2}$ – альфвеновские скорости, соответственно в пучке и покоющейся плазме.

## Введение

Заряженная частица, движущаяся равномерно и прямолинейно в материальной среде, может излучать электромагнитные волны. Такое излучение имеет место в случае, когда проекция скорости частицы на направление распространения электромагнитной волны превышает ее фазовую скорость $\vec{u}\vec{k} > \omega$, и обусловлено эффектом Вавилова-Черенкова[x)] и аномальным эффектом Допплера. Если в среде движется не одна частица, а плотный пучок заряженных частиц, то в результате когерентного излучения волн электромагнитное поле в среде может усиливаться со временем. Это означает, что такое состояние системы состоящей из материальной среды и движущегося пучка заряженных частиц, является неустойчивым и с течением времени распадается.

При исследовании взаимодействия пучка заряженных частиц с плазмой следует различать неустойчивости двух видов - кинетические и гидродинамические. Кинетические неустойчивости плазмы связаны с изменением знака у компонент антиэрмитовой части тензора диэлектрической проницаемости, ответственной за поглощение электромагнитных волн. При этом вместо поглощения может происходить раскачка электромагнитных волн, приводящая к неустойчивости плазмы. Антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы, которой мы здесь только и интересуемся, обусловлена черенковским и резонансным циклотронным поглощением плазмы. Поэтому изменение знака у компонент антиэрмитовой части тензора диэлектрической проницаемости плазмы при наличии пучка заряженных частиц а, следовательно, и кинетические неустойчивости также связаны с эффектом Вавилова-Черенкова и аномальным эффектом Допплера (в последнем случае вместо циклотронного поглощения имеет место циклотронное излучение электромагнитных волн) и возможны лишь при условии $\omega \lessapprox \vec{u}\vec{k}$, где $\vec{u}$ - направленная скорость пучка. В отличие от кинетических неустойчивостей гидродинамические неустойчивости плазмы не связаны с антиэрмитовой частью тензора диэлектрической проницаемости и могут иметь место при $\omega > \vec{u}\vec{k}$. Гидродинамические неустойчивости плазмы полностью определяются эрмитовой частью тензора диэлектрической проницаемости и проявляются в условиях, когда антиэрмитовой частью тензора диэлектрической проницаемости можно пренебречь по сравнению с эрмитовой. Несмотря на это, долгое время считалось, что эффект Вавилова-Черенкова и аномальный эффект Допплера являются единственными механизмами возбуждения электромагнитных волн пучком заряженных частиц в плазме. Поэтому при исследовании взаимодействия пучка заряженных частиц с плазмой обычно ограничивались рассмотрением электромагнитных волн, для которых выполнялось черенковское условие $\omega \lessapprox \vec{u}\vec{k}$ (см. обзорные работы /1,2/). Более того, было распространено мнение, что электромагнитные волны, распространяющиеся поперек пучка, возбуждаться не могут, так как для таких волн не выполняется черенковское условие.

---

x) Под излучением Вавилова-Черенкова мы понимаем излучение как поперечных, так и продольных электромагнитных волн в среде.

Результатом этого же обстоятельства является утверждение, содержащееся во многих работах, что в изотропной плазме возбуждение поперечных электромагнитных волн пучком заряженных частиц невозможно, так как фазовая скорость таких волн больше скорости света в вакууме. К этому следует добавить, что при исследовании пучковой неустойчивости плазмы обычно ограничивались изучением уравнения

$$k_i k_j \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = 0 , \qquad (1)$$

представляющего собой дисперсионное уравнение продольных волн $(\vec{E} \parallel \vec{k})$ и описывающего колебания плотности заряда в плазме. Здесь $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$ –тензор диэлектрической проницаемости системы, состоящей из покоющейся плазмы и движущегося пучка заряженных частиц. Уравнение (1) является пределом точного дисперсионного уравнения электромагнитных волн

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) \right| = 0 \qquad (2)$$

в области больших $k$, т.е. малых фазовых скоростей $\frac{\omega}{k}$. Согласно черенковскому механизму возбуждения такие волны легче всего возбудить пучком заряженных частиц в плазме. Оказалось, что решения уравнения (1), соответствующие как кинетическим, так и гидродинамическим неустойчивостям плазмы, действительно находятся в области частот $\omega \lesssim \vec{u}\vec{k}$. Это обстоятельство еще больше укрепило убеждение в том, что эффект Вавилова-Черенкова и аномальный эффект Допплера являются единственными механизмами, ответственными за неустойчивость пучков в плазме.

С другой стороны, в работах [3] на примере плазмы с анизотропным давлением $(T_\perp \neq T_{\parallel})$ была обнаружена неустойчивость плазмы с анизотропной функцией распределения частиц по скоростям по отношению к возбуждению электромагнитных волн. Позднее такая неустойчивость была подтверждена и на ряде других примеров плазмы с анизотропной функцией распределения частиц по скоростям [4]. Анализ неустойчивостей плазмы с анизотропным давлением $(T_\perp \neq T_{\parallel})$ показывает, что в такой плазме имеют место как кинетические, так и гидродинамические неустойчивости, приводящие к возбуждению продольных и поперечных волн. В отсутствии внешнего магнитного поля в плазме с анизотропным давлением существует лишь гидродинамическая неустойчивость, причем дисперсионное уравнение продольных колебаний (1) неустойчивых решений не имеет. Отсюда следует, что при исследовании электромагнитных колебаний плазмы с анизитропной функцией распределения частиц по скоростям, вообщее говоря, необходимо решать точное дисперсионное уравнение (2).

Примером плазмы с анизотропной функцией распределения частиц по скоростям является также система, состоящая из покоющейся плазмы и движущегося пучка заряженных частиц. Поэтому в такой плазме наряду с черенковским механизмом возбуждения и аномальным эффектом Допплера должен проявляться чисто гидродинамический механизм возбуждения электромагнитных волн, связанный с анизотропией функции распределения частиц по скоростям и приводящей к возбуждению как продольной $\vec{E} \parallel \vec{k}$, так и поперечной $\vec{E} \perp \vec{k}$ компонент поля. В области частот $\omega \lesssim \vec{u}\vec{k}$ за неустойчивость плазмы ответственны все механизмы возбуждения волн и отделить их друг от друга невозможно. В области же частот $\omega \gg \vec{u}\vec{k}$ неустойчивость плазмы полностью обусловлена анизотропией функции распределения частиц по скоростям. Такое положение имеет место для волн, распространяющихся под углом $\theta = \frac{\pi}{2}$ к направлению пучка. Для случая холодной плазмы, когда тепловым движением частиц можно пренебречь, на возбуждение волн, распространяющихся под углом $\theta = \frac{\pi}{2}$ к пучку, было указано в работе [5], в которой отмечалось, что дисперсионное уравнение для таких волн допускает решение, соответствующее апериодическому нарастанию амплитуды волны со временем. В настоящей работе мы подробно исследуем возбуждение электромагнитных волн в среде, распространяющихся поперек пучка заряженных частиц с учетом теплового движения как в отсутствии, так и при наличии внешнего магнитного поля в плазме.

При исследовании электромагнитных волн в системе, состоящей из покоющейся плазмы и движущегося пучка заряженных частиц, мы будем исходить из полного дисперсионного уравнения (2). Характеристикой электромагнитных свойств среды в этом уравнении является тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$. Для нахождения тензора $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$ часто решают систему кинетических уравнений для частиц плазмы и пучка и определяют полный индукционный ток в системе. Как показано в работе [2,6] в решении кинетических уравнений в каждом конкретном случае нет необходимости. Для определения тензора диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$ при движении пучка с произвольной релятивистской скоростью вдоль внешнего магнитного поля в случае однородной плазмы (только такая постановка задачи имеет физический смысл) достаточно воспользоваться преобразованием Лоренца. Здесь для удобства рассмотрение будем вести в системе координат, в которой движутся как пучок, так и плазма, причем направленная скорость частиц $a$ – сорта $\vec{u}_a \parallel \vec{u}$ Систему координат в каждом отдельном случае будем выбирать, исходя из соображений удобства (см.ниже). Полагая $\omega >> \vec{u}_a \vec{k}$, получаем

$$\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \gamma_a a^{(a)}_{i\mu} [\epsilon^{(a)}_{\mu\nu}(\omega'_a, k'_a) - \delta_{\mu\nu}] \beta^{(a)}_{\nu j}, \tag{3}$$

где

$$a^{(a)}_{ij} = \delta_{ij} - \frac{u_{ai} u_{aj}}{u_a^2} \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a} + \frac{u_{ai} k_j}{\omega}, \tag{4}$$

$$\beta^{(a)}_{ij} = \gamma_a [\delta_{ij} - \frac{u_{ai} u_{aj}}{u_a^2} \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a} + \frac{u_{aj} k_i}{\omega}],$$

$\gamma_a = (1 - \frac{u_a^2}{c^2})^{-1/2}$, $\omega'_a = \gamma_a \omega$ и $\vec{k}'_a = \vec{k} - \gamma_a \omega \frac{\vec{u}_a}{c^2}$ – лоренцовски преобразованные частота и волновой вектор, а $\epsilon^{(a)}_{ij}(\omega'_a, \vec{k}'_a)$ – тензор диэлектрической проницаемости частиц $a$ – сорта в собственной системе координат. При написании выражения для тензора $\epsilon^{(a)}_{ij}(\omega'_a, \vec{k}'_a)$ следует иметь в виду, что ленгмюровская частота $\omega_{La} = (\frac{4\pi e_a^2 N_a}{m_a})^{1/2}$ не преобразуется при преобразованиях системы координат, а ларморовская частота преобразуется следующим образом $\omega'_{Ba} = \gamma_a \omega_{Ba}$.

При решении дисперсионного уравнения (3) мы будем определять частоту $\omega$ в виде функции действительного волнового вектора $\vec{k}$, т.е. $\omega = \omega(\vec{k})$. Комплексным корням $\omega(\vec{k})$ с положительной мнимой частью $Im\,\omega(\vec{k}) > 0$ соответствуют неустойчивые колебания системы, приводящие к возбуждению электромагнитных волн с инкрементом нарастания $\gamma = Im\,\omega(\vec{k})$.

## § 1. Возбуждение электромагнитных волн поперек пучка заряженных частиц в отсутствии внешнего магнитного поля

В отсутствии внешнего магнитного поля тензор диэлектрической проницаемости частиц $a$ -сорта в собственной системе координат можно выразить в виде

$$\epsilon^{(a)}_{ij}(\omega,\vec{k}) = (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2})\,\epsilon^{tr}_a(\omega,\vec{k}) + \frac{k_i k_j}{k^2}\,\epsilon^{\ell}_a(\omega,\vec{k}) \,. \tag{5}$$

Подставляя это выражение в формулу (3) и учитывая соотношение (4), получим

$$\epsilon_{ij}(\omega,\vec{k}) = \delta_{ij} + \sum_a \gamma_a^2 \{ (\epsilon^{tr}_a(\omega'_a,k'_a) - 1)\,\delta_{ij} + \frac{k_i k_j}{k^2 + \gamma_a^2\omega^2 u_a^2/c^4} \times$$

$$\times (\epsilon^{\ell}_a(\omega'_a,k'_a) - \epsilon^{tr}_a(\omega'_a,k'_a)) + [\frac{u_{ai}k_j + k_i u_{aj}}{\omega} + \frac{u_{ai}u_{aj}}{\omega^2}(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})] \times \tag{6}$$

$$\times [(\epsilon^{tr}_a(\omega'_a,k'_a) - 1) + \frac{k - \frac{\omega^2}{c^2}}{k^2 + \gamma_a^2\omega^2 u_a^2/c^4}(\epsilon^{\ell}_a(\omega'_a,k'_a) - \epsilon^{tr}_a(\omega'_a,k'_a))]\} \,.$$

Дисперсионное уравнение (2) при этом распадается на следующие два уравнения

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\,\epsilon_{11} = 0 \,, \tag{7}$$

$$(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\,\epsilon_{22})\epsilon_{33} + \frac{\omega^2}{c^2}\,\epsilon_{23}^2 = 0 \,, \tag{8}$$

где

$$\epsilon_{11} = 1 + \sum_a \gamma_a^2 [\epsilon^{tr}_a(\omega'_a,k'_a) - 1] \,,$$

$$\epsilon_{22} = 1 + \sum_a \gamma_a^2 \{ (\epsilon^{tr}_a(\omega'_a,k'_a) - 1) + \frac{u_a^2}{\omega^2}(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})[(\epsilon^{tr}_a(\omega'_a,k'_a) - 1) +$$

$$+ \frac{k^2 - \omega^2/c^2}{k^2 + \gamma_a^2\omega^2 u_a^2/c^4}(\epsilon^{\ell}_a(\omega'_a,k'_a) - \epsilon^{tr}_a(\omega'_a,k'_a))]\} \,, \tag{9}$$

$$\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \sum_a \gamma_a^2 \frac{u_a k}{\omega}[(\epsilon^{tr}_a(\omega'_a,k'_a) - 1) + \frac{k^2 - \omega^2/c^2}{k^2 + \gamma_a^2\omega^2 u_a^2/c^4}(\epsilon^{\ell}_a(\omega'_a,k'_a) - \epsilon^{tr}_a(\omega'_a,k'_a))] \,,$$

$$\epsilon_{33} = 1 + \sum_a \gamma_a^2 [(\epsilon^{tr}_a(\omega'_a,k'_a) - 1) + \frac{k^2}{k^2 + \gamma_a^2\omega^2 u_a^2/c^4}(\epsilon^{\ell}_a(\omega'_a,k'_a) - \epsilon^{tr}_a(\omega'_a,k'_a))] \,.$$

Уравнение (7) описывает колебания поперечного поля, в котором $\vec{E} \perp \vec{k}$ и $\vec{E} \perp \vec{u}$. Эти колебания плазмы не являются неустойчивыми, что вполне естественно, так как при $\vec{E}\vec{u} = 0$ пучок не производит работу над полем. Уравнение же (3) описывает колебания поля, в котором вектор $\vec{E}$ лежит в плоскости векторов $\vec{u}$ и $\vec{k}$. При этом величина $\vec{E}\vec{u}$, вообще говоря, отлична от нуля. Поэтому это уравнение, как мы увидим ниже, в определенных условиях может иметь комплексные решения, соответстсвующие неустойчивым колебаниям плазмы.

Рассмотрим случай, когда через холодную плазму движется холодный пучок заряженных частиц, т.е. будем считать, что направленная скорость пучка больше, чем тепловые скорости частиц в системе и последними можно пренебречь. Это означает, что в выражениях (9) можно полагать

$$\epsilon^{\ell}_{a}(\omega'_a, k'_a) = \epsilon^{tr}_{a}(\omega'_a, k'_a) = 1 - \frac{\omega^2_{La}}{\gamma^2_a \omega^2} \qquad (10)$$

Если при этом систему координат выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_a \omega^2_{La} u_a = 0 \ , \qquad (11)$$

то уравнение (8) распадается на два уравнения. Одно из них описывает устойчивые колебания продольного поля $(\vec{E} \parallel \vec{k})$ с частотой $\omega^2 = \sum_a \omega^2_{La}$, второе же – колебания поперечного поля $(\vec{E} \perp \vec{k}, \vec{E} \parallel \vec{u})$, причем

$$\omega^2 = \tfrac{1}{2} \{ k^2 c^2 + \sum_a \frac{\omega^2_{La}}{\gamma^2_a} \pm \sqrt{(k^2c^2 + \sum_a \frac{\omega^2_{La}}{\gamma^2_a}) + 4k^2 \sum_a u^2_a \omega^2_{La}} \} \qquad (12)$$

Один из корней (12) всегда отрицательный, что свидетельствует о том, что система, состоящая из холодной плазмы и движущегося со сверхтепловой скоростью пучка заряженных частиц, всегда неустойчива по отношению к возбуждению поперечных электромагнитных волн, распространяющихся поперек пучка. Инкремент нарастания волн в случае нерелятивистских скоростей пучка $u_a << c$, равен

$$\gamma = k \left( \frac{\sum_a \omega^2_{La} u^2_a}{k^2 c^2 + \sum_a \omega^2_{La}} \right)^{1/2} = ku \frac{\omega_{Le1} \omega_{Le2}}{\sqrt{\sum_a \omega^2_{La} (k^2c^2 + \sum \omega^2_{La})}} \ , \qquad (13)$$

где $\omega_{Le1}$ и $\omega_{Le2}$ –ленгмюровские частоты электронов, соответственно для пучка и плазмы[x]. При малой плотности пучка, $N_1 << N_2$ и в пределе длинных волн, $k^2c^2 << \sum_a \omega^2_{La}$, из выражения (13) имеем $\gamma \approx ku\sqrt{\frac{N_1}{N_2}}$. В пределе коротких волн, когда $k^2c^2 >> \sum_a \omega^2_{La}$, согласно выражению (13) $\gamma \simeq \frac{u}{c} \omega_{Le1}$.

Указанная неустойчивость электромагнитных волн, распространяющихся под углом $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ к направлению пучка, имеет место также и при скоростях пучка, меньших или сравнимых с тепловыми скоростями частиц, когда существенно тепловое движение. Для того, чтобы показать это, рассмотрим случай, когда через горячую плазму движется холодный пучок заряженных частиц. Исследуем область частот, определенную условиями $\frac{\omega}{k} >> v_{Te1,2}$ и $v_{T12} << \frac{\omega}{k} << v_{Te2}$. Если вспомнить, что поперечная и продольная диэлектрические проницаемости частиц $a$ –сорта в области частот $\omega << kv_{Ta}$ имеют вид

$$\epsilon^{tr}_{a}(\omega, k) = 1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2_{La}}{\omega k v_{Ta}} \ , \qquad (14)$$

$$\epsilon^{\ell}_{a}(\omega, k) = 1 + \frac{\omega^2_{La}}{k^2 v^2_{Ta}} \left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Ta}}\right)$$

где $v_{Ta} = \sqrt{\frac{T_a}{m_a}}$, и потребовать, чтобы $\frac{\omega}{kv_{Te2}} << \frac{N_1}{N_2}$, то мнимыми слагаемыми в дисперсионном уравнении (3), ответственными за поглощение электромагнитных волн в рассматриваемой области частот, можно пренебречь. При этом дисперсионное уравнение (3) запишется в виде

$$A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0 \qquad (15)$$

---

x) Ниже всюду индекс 2 относится к величинам, характеризующим плазму, а индекс 1 – к величинам, характеризующим пучок.

где

$$A = (k^2c^2 + \omega_{Le1}^2)(1 + \frac{\omega_{Le2}^2}{k^2 v_{Te2}^2}) ,$$

$$B = -(k^2c^2 + \omega_{Le1}^2)(\omega_{Le1}^2 + \omega_{Li2}^2) + \omega_{Le2}^2 \omega_{Li1}^2 \frac{u^2}{v_{Te2}^2} , \tag{16}$$

$$C = -\omega_{Le1}^2 \omega_{Li2}^2 u^2 k^2 .$$

Уравнение (15) имеет комплексные решения, соответствующие неустойчивым колебаниям системы, при $\frac{C}{A} < 0$, что в рассматриваемой области частот имеет место для любых $k$.

Как указывалось выше, возбуждение электромагнитных волн возможно даже в том случае, когда $u < v_{Te2}$. Из соотношений (15) и (16) в этом случае получаем следующее выражение для инкремента нарастания волн

$$\gamma = ku \frac{\omega_{Le1}\, \omega_{Li2}}{\sqrt{(k^2c^2 + \omega_{Le1}^2)(\omega_{Le1}^2 + \omega_{Li2}^2)}} \tag{17}$$

При движении холодного пучка через горячую плазму в области частот $v_{Te,i1} \ll \frac{\omega}{k} \ll v_{Te,i2}$ когда существенен учет теплового движения как электронов, так и ионов плазмы, в то время, как тепловым движением частиц в пучке можно пренебречь, из дисперсионного уравнения (8) получаем следующий спектр колебаний

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Le1}^2 [k^2c^2 + \omega_{Le1}^2 - u^2(\frac{\omega_{Le2}^2}{v_{Te2}^2} + \frac{\omega_{Li2}^2}{v_{Ti2}^2})]}{(k^2c^2 + \omega_{Le1}^2)(1 + \frac{\omega_{Le2}^2}{k^2 v_{Te2}^2} + \frac{\omega_{Li2}^2}{k^2 v_{Ti2}^2})} . \tag{18}$$

При решении дисперсионного уравнения (8), также как и в предыдущем случае, мы пренебрегли поглощением электромагнитных волн, обусловленным мнимой частью тензора диэлектрической проницаемости, что справедливо при $\frac{\omega}{k v_{Te2}} \ll \frac{N_1}{N_2}, \frac{N_1}{N_2}\frac{T_{e2}}{T_{i2}}$. Из выражения (18) следует, что в рассматриваемой области частот неустойчивыми являются длинноволновые колебания плазмы, для которых выполняется условие $k^2c^2 + \omega_{Le1}^2 < u^2(\frac{\omega_{Le2}^2}{v_{Te2}^2} + \frac{\omega_{Li2}^2}{v_{Ti2}^2})$. Легко видеть, что такая неустойчивость возникает и в том случае, когда скорость пучка меньше тепловых скоростей электронов и ионов плазмы, если только плотность плазмы значительно превосходит плотность пучка, а именно, $N_2 > \frac{M}{m} N_1$. Инкремент нарастания электромагнитных волн в этом случае определяется выражением

$$\gamma = ku \frac{\omega_{Le1}}{\sqrt{k^2c^2 + \omega_{Le1}^2}} . \tag{19}$$

Рассмотрим случай, когда через горячую плазму движется горячий пучок заряженных частиц и исследуем электромагнитные колебания в такой системе в области частот $v_{Ti1,2} \ll \frac{\omega}{k} \ll v_{Te1,2}$. Если при этом потребовать, чтобы $\frac{\omega}{k v_{Te1}}, \frac{\omega}{k v_{Te2}} \cdot \frac{N_1}{N_2} \ll \frac{u^2}{v_{Te1}^2}$, то мнимая часть в дисперсионном уравнении (8), ответственная за поглощение электромагнитных волн, пренебрежимо мала. В результате дисперсионное уравнение (8) запишется в виде биквадратного уравнения относительно $\omega$ (см. уравнение (15)), в котором

$$A = (k^2c^2 + \sum_a \omega_{Lia}^2)(1 + \sum_a \frac{\omega_{Lea}^2}{k^2 v_{Tea}^2}) - \frac{\omega_{Le1}^2 \omega_{Le2}^2}{k^2 v_{Te1}^2} \frac{u^2}{v_{Te2}^2}$$

$$B = -\sum_a \omega_{Lia}^2 (k^2c^2 + \sum_a \omega_{Lia}^2) + \frac{\omega_{Li1}^2 \omega_{Le2}^2 u^2}{v_{Te2}^2} + \frac{\omega_{Li2}^2 \omega_{Le1}^2 u^2}{v_{Te1}^2} \tag{20}$$

$$c = -\omega_{Li1}^2 \omega_{Li2}^2 k^2 u^2$$

Отсюда следует, что колебания плазмы являются неустойчивыми либо при $A > 0$, либо при $A < 0$ и $B > 0$. Легко видеть, что эти условия определяют перекрывающиеся области длин волн колебаний. Поэтому заключаем, что в рассматриваемой области частот колебания плазмы являются неустойчивыми для любых $k$. Отметим, что эта неустойчивость имеет место и при малых скоростях пучка, когда $u \ll v_{Te1,2}$. В этом случае для инкремента нарастания волн справедливо выражение

$$\gamma = ku \frac{\omega_{Li1} \quad \omega_{Li2}}{\sqrt{\sum_a \omega_{Lia}^2 (k^2c^2 + \sum_a \omega_{Lia}^2)}} . \tag{21}$$

Рассмотренные примеры охватывают всевозможные случаи возбуждения электромагнитных волн в плазме поперек пучка заряженных частиц за исключением области низких частот, когда фазовые скорости волн меньше тепловых скоростей электронов и ионов как в плазме, так и в пучке $\frac{\omega}{k} \ll v_{Te1,2} v_{Ti1,2}$. Можно показать, что дисперсионное уравнение (8) в этой области частот решений не имеет. Это означает, что медленный пучок заряженных частиц, скорость которого меньше тепловых скоростей частиц всех сортов в системе, не возбуждает электромагнитных волн.

Полученные результаты легко переносятся и на тот случай, когда все электроны плазмы имеют некоторую направленную скорость относительно ионов, т.е. когда роль пучка заряженных частиц играют электроны плазмы. При этом, если направленная скорость электронов такова, что тепловыми скоростями частиц можно пренебречь, т.е. $u > v_{Te,i}$, то из выражения (13) для инкремента нарастания волны, распространяющейся под углом $\theta = \frac{\pi}{2}$ к направлению скорости, получаем

$$\gamma = ku \frac{\omega_{Li}}{\sqrt{k^2c^2 + \omega_{Le}^2}} \tag{22}$$

При направленных скоростях электронов, лежащих в интервале $v_{Ti} < u < v_{Te}$, необходимо учитывать тепловое движение электронов, в то время как тепловым движением ионов можно пренебречь. Рассмотрим поэтому область частот, определенную условием $v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k} \ll v_{Te}$. Если при это потребовать, чтобы $\frac{\omega}{k v_{Te}} \ll \frac{u^2}{v_{Te}^2} < 1$, то мнимой частью тензора диэлектрической проницаемости системы, ответственной за поглощение электромагнитных волн, можно пренебречь и решение дисперсионного уравнения (8) записать в виде:

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \frac{k^2c^2 + \omega_{Li}^2 - \omega_{Le}^2 \cdot \frac{u^2}{v_{Te}^2}}{k^2c^2 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2}(k^2c^2 + \omega_{Li}^2)} \ . \tag{23}$$

Отсюда следует, что при направленных скоростях электронов, лежащих в интервале $v_{Ti} < u < v_{Te}$ происходит возбуждение длинноволновых колебаний $k^2c^2 + \omega_{Li}^2 < \omega_{Le}^2 \frac{u^2}{v_{Te}^2}$. Инкремент нарастания волн при этом определяется соотношением

$$\gamma = ku \frac{\omega_{Li}}{\sqrt{k^2c^2 + \omega_{Li}^2}} \tag{24}$$

Наконец, при направленных скоростях электронов, меньших чем тепловые скорости всех частиц, т.е. $u < v_{Te}, v_{Ti}$ , возбуждение электромагнитных волн, распространяющихся под углом $\theta = \frac{\pi}{2}$ к направленной скорости, не происходит. Это является следствием того, что дисперсионное уравнение (8) в области $\frac{\omega}{k} \ll v_{Te,i}$ не имеет решений.

## § 2. Возбуждение электромагнитных волн поперек пучка заряженных частиц в магнитоактивной плазме

Как уже отмечалось выше, при наличии внешнего магнитного поля в однородной плазме разумно рассматривать движение пучка вдоль магнитного поля. В магнитоактивной плазме наряду с черенковским механизмом возбуждения электромагнитных волн имеет место также циклотронный механизм возбуждения. Последний существенен в области частот, близких к циклотронным частотам электронов и ионов $\omega \approx n\omega_{Be,i}$ , и связан с аномальным эффектом Допплера. Оба эти механизма приводят к возбуждению электромагнитных волн под острым углом к магнитному полю (а, следовательно, и к пучку) и соответствуют кинетической неустойчивости плазмы. Для того, чтобы отделить интересующую нас гидродинамическую неустойчивость плазмы, связанную с анизотропией функции распределения частиц по скоростям, от кинетической, мы здесь рассмотрим возбуждение электромагнитных волн пучком заряженных частиц, распространяющихся под углом $\theta = \frac{\pi}{2}$ к магнитному полю. Для таких волн как черенковское условие, так и условие аномального эффекта Допплера не выполняются.

Рассмотрим случай нерелятивистской плазмы, $\omega_{Ba} \gg kv_{Ta}$ и ось $0z$ направим вдоль внешнего магнитного поля. Тензор диэлектрической проницаемости частиц $a$ – сорта в собственной системе координат при $k_z = 0$ имеет вид

$$\epsilon_{ij}^{(a)}(\omega_a, k_a) = \begin{pmatrix} \epsilon_{1a} & ig_a & 0 \\ -ig_a & \epsilon_{1a} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{2a} \end{pmatrix} , \tag{25}$$

где

$$\epsilon_{1a} = 1 - \frac{\omega_{La}^2}{\gamma_a^2(\omega^2 - \omega_{Ba}^2)}, \qquad g_a = \frac{\omega_{La}^2\,\omega_{Ba}}{\gamma_a^2\omega(\omega^2 - \omega_{Ba}^2)}$$

$$\epsilon_{2a} = 1 - \frac{\omega_{La}^2}{\gamma_a^2\omega^2} \ . \tag{26}$$

В рассматриваемом приближении диэлектрическая проницаемость плазмы не зависит от температуры частиц. Это однако не означает, что тепловым движением частиц полностью пренебрегается. Более того, как мы увидим ниже, направленная скорость пучка при этом может быть как больше, так и меньше тепловых скоростей пучка частиц в плазме.

В дальнейшем для простоты ограничимся рассмотрением случая нерелятивистских скоростей пучка $u_a \ll c$, т.е. $\gamma_a = 1$. Подставляя эти выражения в формулу (3) и учитывая соотношение (4), дисперсионное уравнение электромагнитных волн (2) в рассматриваемом случае запишется в виде

$$\left(\epsilon_{33} - \frac{k^2c^2}{\omega^2}\right)\left[\epsilon_{11}\left(\epsilon_{11} - \frac{k^2c^2}{\omega^2}\right) + \epsilon_{12}^2\right] - \epsilon_{11}\left(\epsilon_{13}^2 - \epsilon_{23}^2\right) + \tag{27}$$

$$+ \epsilon_{13}^2 \frac{k^2c^2}{\omega^2} + 2\epsilon_{12}\epsilon_{13}\epsilon_{23} = 0 .$$

Компоненты тензора диэлектрической системы $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$ определяются выражениями:

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 1 + \sum_a (\epsilon_{1a} - 1) , \qquad \epsilon_{12} = i \sum_a g_a , \tag{28}$$

$$\epsilon_{13} = \sum_a \frac{u_a k}{\omega}(\epsilon_{1a} - 1) , \qquad \epsilon_{23} = - i \sum_a g_a \frac{u_a k}{\omega}$$

$$\epsilon_{33} = 1 + \sum_a \left[(\epsilon_{2a} - 1) + \frac{u_a^2 k^2}{\omega^2}(\epsilon_{1a} - 1)\right].$$

Исследование дисперсионного уравнения (27) в общем случае произвольных частот чрезвычайно трудно. Здесь мы проанализируем его лишь в области низких частот $\omega \ll \omega_{Bi}$ (гидродинамическая область). Выражение для тензора диэлектрической проницаемости системы (28) в этой области частот существенно упрощается

$$\epsilon_{11} = 1 + (c^2/v_{A1}^2) + (c^2/v_{A2}^2), \qquad \epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 , \tag{29}$$

$$\epsilon_{33} = 1 - \frac{\omega_{Le1}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{Le2}^2}{\omega^2} + \frac{c^2k^2}{\omega}\left(\frac{u_1^2}{v_{A1}^2} + \frac{u_2^2}{v_{A2}^2}\right) .$$

Здесь $v_{A1}$ и $v_{A2}$ -альфвеновские скорости, а $u_1$ и $u_2$ - направленные скорости пучка и плазмы соответственно в системе координат, в которой

$$\sum_a u_a \frac{\omega_{La}^2}{\omega_{Ba}^2} = 0 . \tag{30}$$

Дисперсионное уравнение (27) при этом распадается на следующие два уравнения

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{22} = 0 , \tag{31}$$
$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{33} = 0 .$$

Первое из этих уравнений описывает устойчивые колебания поперечного электромагнитного поля в плазме, в котором $\vec{E} \perp \vec{u}$. Из второго же уравнения, описывающего поперечные колебания поля, поляризованного вдоль внешнего магнитного поля $(\vec{E} \parallel \vec{u})$, получаем

$$\omega^2 = \sum_a \omega_{La}^2 - k^2c^2\left(\frac{u^2}{v_{A1}^2 + v_{A2}^2} - 1\right). \qquad (32)$$

Отсюда видно, что колебания плазмы являются неустойчивыми в области коротких длин волн, в которой $k^2c^2\left(\frac{u^2}{v_{A1}^2+v_{A2}^2}-1\right) > \sum_a \omega_{La}^2$. При $k^2c^2 \gg \sum \omega_{La}^2$ условие неустойчивости колебаний имеет вид $u^2 > v_{A1}^2 + v_{A2}^2$, причем инкремент нарастания электромагнитных волн определяется выражением

$$\gamma = ku\frac{c^2}{v_{A1}^2 + v_{A2}^2}. \qquad (33)$$

Можно показать, что рассматриваемая неустойчивость имеет место как при скоростях пучка, превышающих тепловые скорости частиц всех сортов, так и при скоростях пучка, меньших чем тепловые скорости электронов, но больших чем тепловые скорости ионов. Действительно, из условия $\omega_{Ba} \gg kv_{Ta}$ в случае холодного пучка, получаем $u > v_{s2}\frac{T_{i2}}{T_{e2}}$. Отсюда следует, что в неизотермической плазме, в которой $T_{e2} \gg T_{i2}$, скорость пучка, вызывающего неустойчивость плазмы может быть меньше тепловой скорости электронов.

Полученные результаты непосредственно переносятся на тот случай, когда все электроны плазмы движутся относительно ионов с некоторой направленной скоростью $\vec{u}$. В этом случае дисперсионное уравнение (27) для низкочастотных колебаний плазмы $\omega \ll \omega_{Bi}$ сводится к виду:

$$A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0, \qquad (34)$$

где

$$A = 1 + c^2/v_A^2,$$

$$B = -(1 + c^2/v_A^2)\left[\omega_{Le}^2 + k^2c^2\left(1 - \frac{m}{M}\frac{u_1^2}{v_A^2}\right)\right] - k^2c^2, \qquad (35)$$

$$C = k^2c^2(\omega_{Le}^2 + k^2c^2)\left(1 - \frac{m}{M}u_1^2/v_A^2\right).$$

Здесь $u_1$ –скорость электронов в системе координат, определенной соотношением (30) и с точностью до членов $\approx \frac{m}{M}$, совпадающая со скоростью относительного движения $\vec{u}$. Уравнение (34) имеет комплексные решения, соответствующие неустойчивым колебаниям плазмы при $u > \sqrt{\frac{M}{m}}\,v_A$. Заметим, однако, что такая неустойчивость возможна в очень узком интервале скоростей пучка, определяемом условием $\left(\frac{m}{M}\frac{u_1^2}{v_A^2} - 1\right)^{1/2} \ll \frac{m}{M}$ и в реальных условиях может не проявляться.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность В.П. Силину за ценные советы и обсуждения, а также В.Л. Гинзбургу, В.И. Векслеру и М.С. Рабиновичу за постоянный интерес к работе.

## Литература

1. А.И.Ахиезер, Я.Б.Файнберг. УФН, 44, 321 (1951).
   Я.Б.Файнберг. Атомная энергия, 11, 313 (1961).

2. В.П.Силин, А.А.Рухадзе. "Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред", М. Атомиздат (1961), см. также УФН 76, 79 (1962).

3. Л.И. Рудаков, Р.З. Сагдеев. Сб. "Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций", М, Изд. АН СССР, т.3 стр. 269 (1958).

А.А. Веденев, Р.З. Сагдеев, там же стр. 278

Р.З. Сагдеев, В.И. Шафранов. ЖЭТФ, 39, 181 (1960).

А.Б. Киценко, К.И. Степанов. ЖЭТФ, 38, 1841 (1960).

4. B.D. Fried, Phys. Fluids, 2, 337 (1959) E.S. Weibel, Phys. Rev. Let., 2, 83 (1959).

5. J. Neufield, P.H. Doyle, Phys. Rev., 121, 654 (1961)

6. А.А. Рухадзе. ЖТФ, 32, 169 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
11 июня 1962 года.