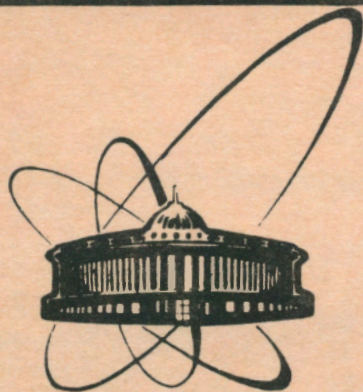


92-317



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P10-92-317

Г.А.Ососков, А.С.Поспелов*

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
В ЗАДАЧЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ
РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ
В ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ.
СЛУЧАЙ КОРРЕЛИРОВАННОСТИ
ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

*Московский институт электронной техники, Москва

1992

1. В настоящей работе продолжены исследования, начатые авторами в [1]. Мы продолжаем изучать модель

$$\xi = \eta + \epsilon, \quad \eta = G\alpha, \quad (1)$$

где η — вектор модели со случайными параметрами $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ и матрицей G , ξ — N -мерный вектор измерений и ϵ — вектор случайных погрешностей измерений той же размерности. Предполагается, что вектор погрешностей ϵ независим от вектора модели η и имеет известную ковариационную матрицу K_ϵ . Ковариационная матрица C s -мерного вектора параметров α также предполагается известной, так что если K_M — ковариационная матрица вектора η (ковариационная матрица модели), то

$$K_M = G C G^T. \quad (2)$$

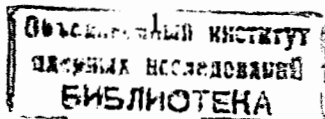
Таким образом, учитывая (2), а также независимость погрешностей измерений, можем записать

$$K = K_M + K_\epsilon = G C G^T + K_\epsilon, \quad (3)$$

где K — ковариационная матрица вектора измерений ξ .

Под задачей предварительной обработки результатов измерений будем понимать разработку метода преобразования данных сканирования с координатных детекторов в линейные трек-элементы [2]. В дальнейшем эту задачу при условии существования исходной модели, то есть в случае, когда выполняются соотношения (1) — (3), будем для краткости обозначать через $\langle G, K_\epsilon \rangle$. Здесь матрица G определяет модель физического эксперимента, а

K_ϵ — ковариационную матрицу погрешностей измерений. Задачу $\langle G, \sigma^2 I \rangle$ (I — единичная матрица), когда погрешности измерений некоррелированы, будем называть канонической для данной модели. Метод и алгоритм решения такой задачи были рассмотрены авторами в работе [1]. Там же отмечалось, что общий случай коррелированных погрешностей измерений (когда $K_\epsilon = \sigma^2 W$ для некоторой положительно определенной симметрической матрицы W) необходимо сводить к соответствующей канонической задаче дискретным преобразованием $T = W^{-1/2}$. В результате получается новая каноническая задача $\langle \tilde{G}, \tilde{K}_\epsilon \rangle$, где



$$\tilde{G} = W^{-1/2}G; \tilde{K}_\varepsilon = W^{-1/2}K_\varepsilon W^{-1/2} = W^{-1/2}(\sigma^2 W)W^{-1/2} = \sigma^2 I,$$

которая может быть решена разработанным методом. Такой способ решения задачи предварительной обработки, основанный в общем случае на использовании преобразования T , связан с большими трудностями, так как общие методы вычисления матрицы $W^{1/2}$ отсутствуют [3].

Ниже показано, как можно преодолеть указанную трудность.

Напомним, что разработанный для канонической задачи метод требует выделения подпространства, ортогонального подпространству модели, и построения критерия распознавания в этом подпространстве. Пусть L_M — подпространство модели, то есть подпространство, порожденное вектор-столбцами матрицы G . Пусть далее L^\perp — ортогональное дополнение для L_M . Аналогично определяем \tilde{L}_M и \tilde{L}^\perp для соответствующей канонической задачи $\langle \tilde{G}, \tilde{K}_\varepsilon \rangle$, $\tilde{K}_\varepsilon = \sigma^2 I$. Заметим при этом, что \tilde{L}_M является образом подпространства L_M при преобразовании T , то есть

$$\tilde{L}_M = TL_M. \quad (4)$$

Рассмотрим, наконец, подпространство $T^*\tilde{L}$ и покажем, что оно совпадает с L^\perp , то есть

$$T^*\tilde{L} = L^\perp. \quad (5)$$

Действительно, пусть x — произвольный вектор из подпространства L_M и y — из подпространства $T^*\tilde{L}$. В силу невырожденности преобразования T (а следовательно, и T^*) тогда найдется вектор $z \in \tilde{L}^\perp$ такой, что $y = T^*z$. Отсюда получаем, с учетом (4),

$$(x, y) = (x, T^*z) = (Tx, z) = 0,$$

так что имеет место включение $T^*\tilde{L}^\perp \subseteq L^\perp$. И вновь учитывая невырожденность преобразования T , выводим, наконец, равенство (5).

2. Доказанное равенство (5) позволяет в значительной степени упростить процедуру применения критерия распознавания треков среди произвольных наборов различных измерений. Напомним, что в соответствии с разработанным в [1] методом этот критерий в применении к задаче $\langle G, K_\varepsilon \rangle$ с произвольной ковариационной матрицей K_ε строится в терминах подпространства \tilde{L}^\perp соответствующей канонической задачи $\langle \tilde{G}, \sigma^2 I \rangle$. Необходимо выбрать произвольный базис подпространства \tilde{L}^\perp и рассмотреть распределения коэффициентов разложения образа набора различных измерений, то

есть вектора TX , по этому базису. Иначе говоря, если $\tilde{X} = TX$ — образ некоторого набора различных измерений и f — вектор ортонормированного базиса подпространства \tilde{L}^\perp , то изучается распределение случайной величины $\tilde{c}(\tilde{X}, f)$. Но в силу равенства (5) эта величина равна (X, e) , где $e = T^*\tilde{L}^\perp \subseteq L^\perp$.

Отсюда следует, что переход от задачи $\langle G, K_\varepsilon \rangle$ к задаче $\langle \tilde{G}, \sigma^2 I \rangle$ не нужен. Достаточно рассмотреть произвольный базис подпространства L^\perp и, в полном соответствии со случаем канонической задачи, исследовать распределения скалярных произведений вектора X с элементами этого базиса. В результате получаем, что случай ковариационной матрицы K_ε общего вида, то есть задача $\langle G, K_\varepsilon \rangle$, решается тем же способом, что и каноническая задача $\langle \tilde{G}, \sigma^2 I \rangle$.

3. Проведенные численные эксперименты подтвердили полученные теоретические результаты. Как и в случае скалярной ковариационной матрицы, в серии экспериментов генерировалось 10 треков, каждый из которых представлял собой прямую вида αt со случайным параметром α , равномерно распределенным на интервале $[-1/2, 1/2]$. Далее моделировались измерения каждого из треков в точках $t_k = k = 1, 2, 3, 4$ с погрешностью округления, равномерно распределенной на интервале $[-\Delta/2, \Delta/2]$, и таким образом, что погрешности соседних измерений были коррелированы с коэффициентом корреляции ρ .

Более подробно остановимся на формировании решающего правила отбора тех совокупностей измерений, которые направляются на следующую проверку и в результате связываются в треки. Заметим, прежде всего, что если $x_k = \alpha t_k$ — значения случайной прямой в точках измерений и ε_k — соответствующая погрешность измерения, то $X_k = x_k + \varepsilon_k = \alpha t_k + \varepsilon_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Если теперь e_1 — первый из базисных векторов подпространства L^\perp , то скалярное произведение

$$c_1 = (X, e_1) = \sum_{k=1}^4 X_k e_{k1} = \sum_{k=1}^4 x_k e_{k1} + \sum_{k=1}^4 \varepsilon_k e_{k1}. \quad (6)$$

В случае, когда набор значений (x_1, x_2, x_3, x_4) получен от одной из случайных прямых, первое слагаемое в правой части (6) отсутствует в силу ортогональности подпространства L^\perp подпространству модели L_M . Таким образом,

$$c_1 = \sum_{k=1}^4 \varepsilon_k e_{k1} \quad (7)$$

в этом случае. Если же набор значений (x_1, x_2, x_3, x_4) получен от разных прямых, в правой части (6) присутствуют оба слагаемых.

Рассмотрим плотность распределения случайной величины c_1 в каждом из этих случаев. Когда случайная величина c_1 описывается соотношением (6), ее плотность распределения $f_{c_1}(u)$ является сверткой (в силу независимости погрешностей измерений от самих измерений) плотностей распределений двух слагаемых. Обозначим их соответственно через $f_x(u)$ и $f_\varepsilon(u)$.

Нетрудно видеть, что

$$f_x(u) = f_{x_1}(u) * \dots * f_{x_4}(u)$$

и

$$f_\varepsilon(u) = f_{\varepsilon_1}(u) * \dots * f_{\varepsilon_4}(u),$$

причем область распределения $f_x(u)$ (ее носитель) содержится в интервале $[-2, 2]$, а носитель $f_\varepsilon(u)$ — в интервале $[-2\Delta, 2\Delta]$. Отсюда следует, что носитель плотности распределения $f_{c_1}(u)$ содержится в интервале $[-2(1 + \Delta), 2(1 + \Delta)]$ для случая, определенного соотношением (6). Если же случайная величина c_1 определяется формулой (7), то плотность ее распределения сосредоточена на интервале $[-2\Delta, 2\Delta]$ в силу отсутствия первого слагаемого.

На этом факте и основано решающее правило. Именно: к следующей проверке (вычислению скалярного произведения со следующим базисным вектором e_2 подпространства L^1) допускаются те наборы X , для каждого из которых выполняется неравенство

$$|c_1| = |(X, e_1)| \leq 2\Delta. \quad (8)$$

Аналогично (8) определены и иные критерии.

В результате прошедшие все проверки наборы измерений объявляются треками.

В условиях рассматриваемой модели был проделан большой объем экспериментов при различных значениях Δ и ρ . Типичный случай результатов, когда $\Delta = 0,01$ (диапазон погрешности измерений составляет 1% от диапазона измерений) приведен в таблице 1. Отметим, что число наборов измерений, связанных в треки (N_3), слабо зависит от коэффициента корреляции ρ и колеблется в пределах от 57 до 12. При этом все «истинные» треки, то есть наборы измерений десяти случайных прямых, также фиксировались (что контролировалось в программе), прошли все три проверки и, следовательно, были связаны в треки. В других экспериментах (Δ изменялось

Таблица 1. Число наборов измерений N_1, N_2, N_3 (треков), прошедших соответствующее количество проверок (модель — прямые, $\Delta = 0,01$)

$\rho \backslash N$	N_1	N_2	N_3
-0.50	1200	240	40
-0.49	1400	196	38
-0.47	1400	224	43
-0.44	1000	120	12
-0.40	1200	144	24
-0.34	1200	216	46
-0.28	1100	154	22
-0.19	1200	192	34
-0.10	1100	132	20
0.00	1200	168	26
0.10	1000	120	12
0.19	1000	120	12
0.28	1100	132	20
0.34	1600	320	57
0.40	1200	240	41
0.44	1400	224	40
0.47	1000	150	16
0.49	1000	150	18
0.50.	1200	216	35

Таблица 2. Число наборов измерений N_1, N_2, N_3 (треков), прошедших соответствующее количество проверок (модель — прямые, $\Delta = 0,1$)

$\rho \backslash N$	N_1	N_2	N_3
-0.50	4000	2720	1235
-0.49	2900	1914	765
-0.47	2300	1288	365
-0.44	2600	1326	423
-0.40	3100	1953	859
-0.34	3500	2205	1195
-0.28	3300	2046	966
-0.19	2100	861	212
-0.10	2888	980	288
0.00	3000	1470	738
0.10	2700	1134	538
0.19	3300	1980	818
0.28	2500	1225	449
0.34	2800	1428	535
0.40	3400	2108	1038
0.44	3800	2812	1150
0.47	2900	1827	677
0.49	2800	1904	728
0.50	4200	2352	1035

от 01% до 5%) получены аналогичные результаты. Естественно, что число N_3 треков уменьшается с уменьшением диапазона погрешности измерений. Так, в случае, когда $\Delta = 0,001$ и, следовательно, составляет 0,1% диапазона измерений, число выделенных треков N_3 изменяется от 10 до 24 при различных значениях коэффициента корреляции ρ (все «истинные» треки по-прежнему выделяются).

Вместе с тем, когда Δ увеличивается, то возрастает и число выделяемых треков. При $\Delta = 0,1$ (10% диапазона измерений) N_3 принимает значения от 212 до 1235. Факт уменьшения эффективности разработанного метода при больших погрешностях измерений очевиден, так как допускается значительно большее число вариантов связывания измерений в треки. Заключая рассмотрение результатов этого эксперимента, отметим, что любопытная закономерность в значениях N_1 в таблице 2 связана со специальным выбором базиса в подпространстве L^1 . Две последние координаты первого базисного элемента равны нулю, так что критерий проверки (8) для всякого набора измерений организуется лишь по первым двум координатам, что позволяет значительно сократить число операций (а следовательно, и время обработки), а также распараллелить вычисления.

Во второй серии экспериментов была использована принципиально другая модель, а также увеличено число измерений. Генерировалось 15 треков, каждый из которых представлял собой случайную параболу $\alpha t^2 + \beta t$ с вершиной в начале координат, а параметры α и β были равномерно распределены на интервале $[-1/2, 1/2]$ и удовлетворяли условию $\alpha + \beta = 1$. Таким образом, подпространство модели L_M было двумерным. Число измерений равнялось 6, а погрешности измерений могли быть коррелированы и моделировались, как и в предыдущей серии экспериментов. Таким образом, объем перебора возрастал до 15^6 шестимерных наборов измерений. Тем не менее специальный выбор базиса в L^1 позволил распараллелить вычисления и значительно сократить количество операций, так что на каждый из вариантов (при фиксированном ρ) затрачивалось приблизительно 15—20 секунд счета. Типичный результат приведен в таблице 3.

Замечание. Относительно большое число полученных как в этом, так и в предыдущем эксперименте треков объясняется не только (а может быть, и не столько) величиной диапазона погрешности. Дело в том, что специальный базис, выбираемый в подпространстве L^1 , не является ортогональным и, кроме того, никак не связан с ортогональным базисом в подпространстве \tilde{L}^1 , по которому, в соответствии с построенной теорией, и должен реализовываться критерий отбора. В результате эти критерии могут быть коррелированы, что приводит к увеличению числа распознаваемых «треков».

Таблица 3. Число наборов измерений N_1, N_2, N_3, N_4 (треков), прошедших соответствующее количество проверок (модель — параболы, $\Delta = 0,01$)

$\rho \backslash N$	N_1	N_2	N_3	N_4
-0.50	310500	23850	3600	925
-0.49	361125	28800	5685	1415
-0.47	226125	14175	1845	380
-0.44	216000	15525	2550	591
-0.40	263250	15300	12900	210
-0.34	354375	47925	10650	3233
-0.28	175500	11925	1725	388
-0.19	239655	19125	2895	528
-0.10	199125	14625	1890	393
0.00	158625	8550	990	149
0.10	175500	10575	1365	365
0.19	172125	21600	5025	1297
0.28	236250	13725	1620	212
0.34	273375	19575	3075	851
0.40	205875	15750	2340	588
0.44	229500	19800	2940	734
0.47	226125	24300	3105	720
0.49	354375	27300	4735	1139
0.50	313875	48600	9720	2685

4. С этим недостатком можно справиться, пропуская полученные «треки» через дополнительные проверки, либо построив базис в подпространстве \tilde{L}^1 , для чего необходимо, как отмечалось выше, явный вид дискретного преобразования T . Один из таких случаев рассматривается ниже.

Пусть ковариационная матрица погрешностей имеет следующий вид:

$$K_\varepsilon = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^l & 0 & \dots & 0 \\ \rho & 1 & \dots & \dots & \rho^l & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

что соответствует марковскому процессу l -го порядка. Рассмотрим новую задачу $\langle G^{(0)}, K_\varepsilon^{(0)} \rangle$, порожденную матрицей модели $G^{(0)}$, столбцами которой являются векторы

$$g_j^{(0)} = (\underbrace{0, \dots, 0}_l, g_{1j}, \dots, g_{lj}), \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

а ковариационная матрица измерений $K_\varepsilon^{(0)}$ является циркулянтном, первая строка которого имеет вид

$$(1, \rho, \dots, \rho^l, 0, \dots, 0, \rho^l, \dots, \rho); \quad (10)$$

остальные получаются из нее циклическим сдвигом на соответствующее число элементов вправо. Нетрудно видеть, что K_ε из (9) является подматрицей $K_\varepsilon^{(0)}$, расположенной в ее правом нижнем углу. Известно [4], что дискретное преобразование Фурье диагонализует матрицу-циркулянт.

Вычислим диагональные элементы соответствующего результата. Пусть $D = FK_\varepsilon^{(0)}F^* = \text{diag}(d_0, d_1, \dots, d_{n+l-1})$, где F — матрица дискретного преобразования Фурье с элементами

$$f_{\nu\mu} = \frac{1}{\sqrt{n+l-1}} \exp\left\{-2\pi i \frac{\nu\mu}{n+l-1}\right\}. \quad (11)$$

Элементы $k_{\nu\mu}^{(0)}$ циркулянта $K_\varepsilon^{(0)}$ могут быть записаны в виде

$$k_{\nu\mu}^{(0)} = k_{\nu-\mu}, \quad (12)$$

где (k_0, \dots, k_{n+l-1}) — его первая вектор-строка, а знак точки над арифметической операцией означает, что эта операция выполняется циклически по модулю $n+l-1$. Далее, используя выражения (11) и (12), последовательно находим

$$\begin{aligned}
 d_k &= \sum_{\nu=0}^{n+l-1} \sum_{\mu=0}^{n+l-1} f_{k\nu} k_{\nu\mu}^{(0)} (f^*)_{\mu k} = \sum_{\nu=0}^{n+l-1} \sum_{\mu=0}^{n+l-1} f_{k\nu} k_{\nu} \cdot \bar{f}_{\mu k} = \\
 &= \sum_{\mu=0}^{n+l-1} \sum_{\nu=0}^{n+l-1} f_{k,\nu} \bar{f}_{\mu} k_{\nu} \bar{f}_{\mu k} = \sum_{\nu=0}^{n+l-1} \left(\sum_{\mu=0}^{n+l-1} f_{\mu} \bar{f}_{\mu k} \right) \exp \left\{ -2\pi i \frac{\nu k}{n+l-1} \right\} k_{\nu} = \\
 &= \sum_{\nu=0}^{n+l-1} \exp \left\{ -2\pi i \frac{\nu k}{n+l-1} \right\} k_{\nu}.
 \end{aligned}$$

Подставляя в последнее выражение вместо k_{ν} их явный вид из (10), находим

$$d_k = \sigma^2 \sum_{j=-l}^l \rho^{|j|} \exp \left\{ -2\pi i \frac{kj}{n+l-1} \right\} = \sigma^2 \left(1 + 2 \sum_{k=1}^l \rho^k \cos 2\pi \frac{kj}{n+l-1} \right). \quad (13)$$

Таким образом, применяя преобразование Фурье к задаче $\langle G^{(0)}, K_{\varepsilon}^{(0)} \rangle$, получаем новую задачу $\langle G_F^{(0)}, K_{\varepsilon,F}^{(0)} \rangle$, для которой $G_F^{(0)} = F G^{(0)}$, а ковариационная матрица погрешностей $K_{\varepsilon,F}^{(0)} = F K_{\varepsilon}^{(0)} F^*$ имеет диагональный вид с элементами, определенными соотношениями (13), на главной диагонали. Наконец, полагая $\tilde{G} = D^{-1/2} G_F^{(0)}$, где D — диагональная матрица с элементами из (13), получаем задачу $\langle \tilde{G}, \tilde{K}_{\varepsilon} \rangle$, для которой ковариационная матрица $\tilde{K}_{\varepsilon} = D^{-1/2} \cdot K_{\varepsilon,F}^{(0)} \cdot D^{-1/2}$ является скалярной. При этом преобразование T , переводящее исходную расширенную задачу в каноническую, имеет вид $T = D^{-1/2} \cdot F$, что позволяет определить как структуру модельного подпространства \tilde{L}_M , так и его ортогональное дополнение \tilde{L}^{\perp} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ососков Г.А., Поспелов А.С. — Сообщение ОИЯИ Р10-91-444, Дубна, 1991.
2. Никитин В.А., Ососков Г.А. — Автоматизация измерений и обработки данных физического эксперимента. М.: Изд-во Московского университета, 1986.
3. Парлетт Б. — Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983.
4. Иохвидов И.С. — Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. М.: Наука, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 июля 1992 года.

Применение дискретных преобразований в задаче предварительной обработки результатов экспериментов в физике высоких энергий.
Случай коррелированности погрешностей измерений

В настоящей работе продолжены исследования по предварительному анализу треков элементарных частиц в линейной модели с s параметрами. Метод отбора трек-кандидатов по данным их измерений в N точках путем дискретного преобразования всех возможных комбинаций точек в подпространство $N - S$ признаков обобщен здесь на важный случай коррелированных погрешностей измерений, соответствующий, в частности, наличию многократного рассеяния. Возникающие при этом вычислительные трудности, связанные с необходимостью извлечения корня из ковариационной матрицы измерений, преодолены в общем случае с помощью последовательного применения простых пороговых критериев. Для случая, когда ковариационная матрица определяет трек как марковский процесс, найдено точное решение. Приведены результаты численных экспериментов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод авторов

Applications of Discrete Transformations in the Problem of Preliminary Data Processing for Experiments in High Energy Physics.
Case of Correlated Measurement Errors

The given paper continues the study for the preliminary analysis of elementary particles tracks. Assuming a linear model with S parameters for a track measured in N points, a method was proposed in [1] for selecting track-candidates from all possible point combinations. It was based on discrete transformation of these combinations to the subspace of $N - S$ features. This method is generalized here on the important case of multiple scattering, when measurements are correlated. Computational difficulties caused by necessity of square root extracting from the covariance matrix of measurements were surmounted in the general case by sequential using of simple cut-off criteria. In the particular case, when the covariance matrix determined a track as a markov chain, the exact solution is found. Results of numerical experiments are given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992