5078/82

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

25/10-82

10-82-574

И.Ванков, А.Двуреченский, Г.А.Ососков

О ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРИИ РЕКУРРЕНТНЫХ СОБЫТИЙ К ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЯДЕРНОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

1982

Принцип работы нового типа измерителя средней частоты импульсов /I/, получаемых с детектора радиоактивного излучения, состоит в следующем: входная информация проверяется периодически, через равные интервалы ΔT. Обозначим через A_n выполнение некоторого условия A при очередной n-ой проверке, а через $\bar{A}_n$ – невыполнение условия A. При выполнении условия A схема устанавливается в начальное состояние и цикл опроса начинается снова.

Рассмотрим целочисленную случайную величину ν – номер того испытания, на котором в первый раз выполняется условие A. Задача состоит в определении закона распределения случайной величины ν, а также среднего числа $M(\nu)$ испытаний в цикле, т.е. между двумя возвращениями в начальное состояние.

Это задача теории дискретного восстановления и можно ее решать методом так называемых рекуррентных событий, введенных Феллером /2/. Очевидно, что для случайной величины ν имеем

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P(\nu = 1) = P(A_1), \\
P_n &= P(\nu = n) = P(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{n-1} A_n), \quad n \geq 2,
\end{aligned}
\tag{I}
$$

а можно показать, что события $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, которые не обязательно независимы, связаны между собой следующим образом:
для каждого набора индексов $i_2 < i_3 < \dots < i_n$, $n = 2, 3 \dots$

$$
P(A_{i_n} / A_{i_1} \dots A_{i_{n-1}}) = P(A_{i_n - i_{n-1}}). \tag{2}
$$

При условии

$$
P(A_1) > 0 \tag{3}
$$

соотношение (2) может быть записано в эквивалентной форме:
для любых $i_1 < i_2 < \dots < i_n$,

$j_2, \ldots, j_n = 0, 1, \qquad (n = 2, 3, \ldots)$

$$P(A_{i_2}^{j_2} \ldots A_{i_n}^{j_n} \mid A_{i_1}) = P(A_{i_2 - i_1}^{j_2} \ldots A_{i_n - i_1}^{j_n}),$$

где $A^0 = \bar{A}$, $A^1 = A$.

Тогда аналогично Феллеру /2/ можно доказать, что имеют место следующие рекуррентные выражения:

$$P_1 = P(A_1),$$
$$P_n = P(A_n) - \sum_{j=1}^{n-1} P(A_j) P_{n-j}, \qquad (4)$$

а события $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ независимы тогда и только тогда, когда

$$P(A_n) = P, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

В этом случае

$$P_n = P(1-P)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

Если обозначить $P_\infty = P(\nu = \infty)$ (P_∞ – есть вероятность того, что схема никогда не возвратится снова в начальное состояние), то можно доказать, что $P_\infty = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty ; \qquad (6)$$

В противном случае будем иметь $P_\infty = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_n > 0.$

В дальнейшем будем предполагать, что имеет место (6).

Если обозначим $\varphi(z)$ – производящую функцию случайной величины ν, т.е.

$$\varphi(z) = M(z^\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n,$$

то можно доказать, что

$$\varphi(z) = \frac{\psi(z)}{1 - z + \psi(z)}, \qquad (7)$$

где функция

$$\psi(z) = P(A_1) z + \sum_{n=2}^{\infty} [P(A_n) - P(A_{n-1})] z^n$$

является аналитической в круге $|z| < 1$.

Как следует из свойств рекуррентных событий /2/, существует предел $P = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$, и для среднего числа испытаний в цикле имеем

$$M(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n = \varphi'(1),$$

$$M(\nu) = 1 / \lim P(A_n) = 1/P, \qquad (9)$$

причем $M(\nu) = \infty$ только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$

Используя производящую функцию (7), можно получить также и дисперсию $D(\nu)$ числа испытаний в одном цикле

$$D(\nu) = \varphi''(1) + \varphi'(1) - \varphi'^2(1).$$

Используя (7-9), находим

$$\varphi'(1) = 1/P, \quad \varphi''(1) = \frac{2[1 - \psi'(1)]}{P^2},$$

$$\psi'(1) = \lim_{n\to\infty} [n P(A_n) - \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k)].$$

Отсюда для $D(\nu)$ получаем

$$D(\nu) = [1 - 2 \lim_{n\to\infty} (n P(A_n) - \sum_{k=1}^{n-1} P(A_n)] P^{-2} + P^{-1}. \qquad (10)$$

Для перехода к пределу воспользуемся свойствами эквивалентности для степенных рядов (8) (см. /3/, стр.233)

$$n P(A_n) \sim nP, \quad \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) \sim (n-1) P,$$

дающими следующее условие существования предела

$$P(A_n) - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) = O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (11)$$

При выполнении этого условия из (10) получаем

$$D(\nu) = (1-P)/P^2. \qquad (12)$$

Если $\lim_{n\to\infty} \frac{P(A_n) - P}{1/n} = k \neq 0$, то $D(\nu) = \infty$, как будет ниже показано для частного случая.

Выражения (12) и (9) будут справедливы, в частности, когда рекуррентные события $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ независимы (образуют схему Бернулли).

При приложении вышерассмотренной теории к задаче определения среднего числа испытаний в одном цикле работы устройства вероятности событий $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ задаются как

$$P(A_n) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{Cg(n)} e^{-x^2/2} dx, \qquad (13)$$

где C – параметр устройства, а

$$g(n) = \frac{n+a}{\sqrt{(n+b)(n+d)}} \ .$$

Значения положительных констант a, b и d зависят от выбранного алгоритма обработки входной информации в устройстве.
Очевидно, что в таком случае

$$\lim_{n\to\infty} g(n) = 1 ,$$

что подтверждает справедливость (6), и предел $P = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ равен

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^C e^{-\frac{x^2}{2}} dx \ .$$

Для среднего числа испытаний k_{cp} из (9) имеем

$$k_{cp} = M(\nu) = \frac{1}{1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^C e^{-\frac{x^2}{2}} dx} \ . \qquad (14)$$

Для вычисления дисперсии $D(\nu)$ преобразуем формально (10) к виду

$$D(\nu) = \left\{ 1 - P - 2\lim_{n\to\infty} \frac{P(A_n) - P}{1/n} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left[P(A_k) - P \right] \right\} \cdot P^{-2}$$

и оценим выражение

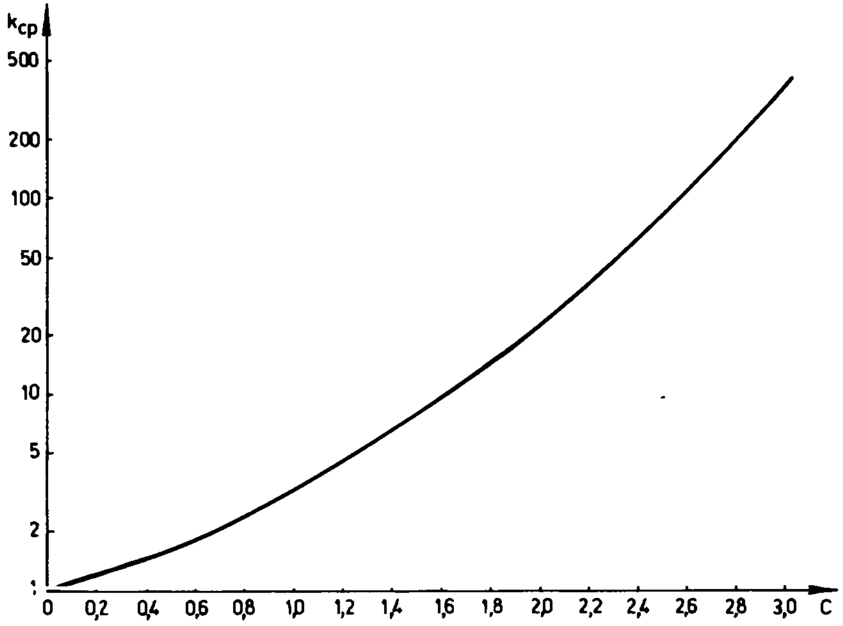
$$\lim_{n\to\infty} \left[P(A_n) - P \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{C\,g(n)}^{C} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \ .$$

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(A_n) - P}{1/n} = \frac{C\,(b + d - 2a)}{\sqrt{2\pi}} e^{-C^2/2} \ .$$

Этот результат показывает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} [P(A_k) - P]$ расходится, так как существует конечный предел отношения его члена к члену заведомо расходящегося гармонического ряда $1/n$ (случай $b + d = 2a$ при работе устройства не используется) и, следовательно, дисперсия будет бесконечной.

Из полученного выражения для k_{cp} следует, что среднее число испытаний в одном цикле работы устройства не зависит от алгоритма обработки информации. Результат существенный, т.к. это он позволяет выбирать указанный алгоритм, исходя из других требований к устройству. Бесконечность дисперсии указывает на большой разброс возможных значений числа испытаний в цикле около k_{cp}. Поэтому для обеспечения более частой реализации длинных циклов надо работать при больших значениях k_{cp}, т.е. $C \to \infty$ (см. рисунок).



Литература

1. Ванков И., Генев Г., Иванов Р., Мюллер М. Устройство для определения средней частоты. Заявка на изобретение НРБ, рег. № 53602, 22.09.1981 г.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применение. Т. I, Мир, М., 1967.
3. Титчмарш Е. Теория функций. Наука, М., 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 июля 1982 года.

Ванков И., Двуреченский А., Ососков Г.А. 10-82-574
О приложении теории рекуррентных событий
к одной задаче ядерной электроники

Исследуются вероятностные характристики случайной величины периода работоспособности измерителя средней частоты импульсов, получаемые с детектора радиоактивного излучения.

Среди результатов, найденных при помощи теории рекуррентных событий, получены достаточные условия конечности /или бесконечности/ дисперсии периода работоспособности.

В частном случае показано, что дисперсия бесконечна, и это указывает на большой разброс возможных значений числа испытаний в периоде около среднего значения.

Работа выоплнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации и Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Vankov I., Dvurecenskij A., Ososkov G.A. 10-82-574
On Recurrent Event Theory Application
to One Problem of Nuclear Electronics

The distribution law, the mean value and the dispersion of the interrogatory cycle length of functioning pulses mean frequency measuring instrument received from a radioactive radiation detector are investigated. Among the results obtained by the theory of recurrent events some sufficient conditions to the dispersion be finite or infinite are given. In the particular case it is shown that the dispersion is infinite which points to a great possible value scattering of a cycle length near the mean value.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation and Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.