

Ц 701

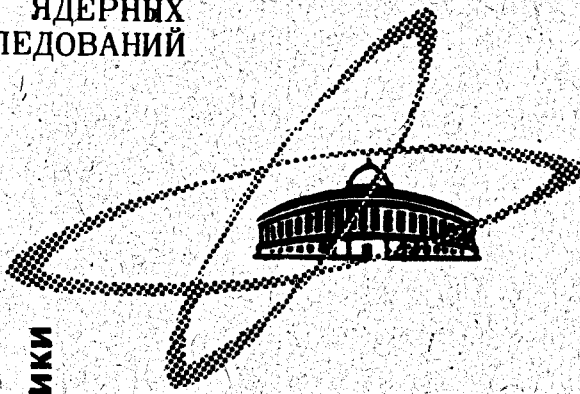
359/1-71

B-676

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

10 - 5474



ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ  
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Ю.А.Волков, В.А.Королев, В.И.Приходько,  
В.В.Яковлев

ОБ ОЦЕНКАХ ИСКАЖЕНИЙ  
В ОБЛАСТИ ВЫСШИХ ЧАСТОТ

1970

10 - 5474

Ю.А.Волков, В.А.Королев, В.И.Приходько,  
В.В.Яковлев

ОБ ОЦЕНКАХ ИСКАЖЕНИЙ  
В ОБЛАСТИ ВЫСШИХ ЧАСТОТ

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

Как известно, для оценки искажений в области малых времен при монотонной переходной характеристике  $h(t)$  с изображением

$$h(p) = \frac{1 + a_1 p + \dots + a_m p^m}{1 + b_1 p + \dots + b_n p^n}, \quad (1)$$

где  $m < n$ , широко используются формулы Элмора /1,2/.

При проектировании широкополосных усилителей значительный интерес представляет определение верхней граничной частоты  $\omega_b$ . Использование формулы Элмора для времени нарастания фронта  $t_n$  и известной приближенной связи  $t_n \omega_b \approx 2,2$  для нахождения  $\omega_b$  далеко не всегда возможно, т.к. оптимальная амплитудно-частотная характеристика (а.ч.х.) соответствует переходной характеристике иногда с весьма большими выбросами. Например, в простейшем случае усилительного каскада с параллельной индуктивной коррекцией /3/ оптимальная а.ч.х. получается при значении коэффициента коррекции  $m = 0,41$ , в то время как оптимальная переходная характеристика - при  $m = 0,25$ . В переходной характеристике, соответствующей  $m = 0,41$ , имеется выброс, и, следовательно, определение времени нарастания фронта по формуле Элмора не представляется возможным. Именно поэтому оценка верхней граничной частоты непосредственно по коэффициентам выражения (1) (без предварительного построения а.ч.х. или решения алгебраических уравнений высших порядков) заслуживает специального рассмотрения<sup>x/</sup>.

<sup>x/</sup> Правда, как это будет показано ниже, глобальные оценки  $\omega_b$  приводят к более громоздким выражениям, в которых присутствуют коэффициенты не только при первой и второй степенях оператора  $p$ , как в формулах Элмора, но и коэффициенты при высших степенях  $p$ .

Рассмотрим монотонную а.ч.х.  $h(\omega)$ . Тогда функция  $\delta(\omega) = 1 - h^2(\omega)$ , характеризующая отклонение данной а.ч.х. от идеальной а.ч.х., равной (на всех частотах  $\omega$ ) единице, является монотонно возрастающей, причем, как следует из (1),  $\delta(0) = 0$  и  $\delta(\infty) = 1$ . Считая  $\delta(\omega)$  функцией распределения случайной величины  $\omega$ , находим математическое ожидание

$$M[\omega] = \int_0^{\infty} \omega \delta'(\omega) d\omega. \quad (2)$$

Интеграл (2) всегда (т.е. при любых  $m \leq n$ ) сходится, причём, интегрируя по частям, легко получить  $M[\omega] = \int_0^{\infty} h^2(\omega) d\omega$ .

Однако последний интеграл можно выразить через коэффициенты (1). В самом деле, согласно /4-6/,

$$\int_0^{\infty} h^2(\omega) d\omega = \pi \int_0^{\infty} [h'(t)]^2 dt. \quad (3)$$

Из работ /5-7/ следует, что интеграл правой части равенства (3) всегда можно вычислить без нахождения функции  $h(t)$  и что он представляет собой многочлен второго порядка относительно начальных условий дифференциального уравнения для определения  $h(t)$ , причём коэффициенты этого многочлена являются рациональными функциями от коэффициентов  $b_i$  (где  $i = 1, 2, \dots, n$ ) уравнения. В этих же работах указана и процедура такого вычисления. Ниже она проиллюстрирована на ряде примеров.

Дифференциальное уравнение для нахождения  $h(t)$ , соответствующее изображению вида (1), имеет следующий вид /5,6,8/:

$$b_n \frac{d^n h(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} h(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = 1, \quad (4)$$

при начальных условиях  $h(0)$ ,  $h'(0)$ ,  $h^{n-1}(0)$ , которые легко определяются из системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ a_{m+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ b_2 & b_3 & \dots & b_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & b_{m+1} & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ b_{m+1} & b_{m+2} & \dots & b_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0) \\ h'(0) \\ \vdots \\ h^{(m-1)}(0) \\ h^{(m)}(0) \\ \vdots \\ h^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} \quad (5)$$

причём, как видно из (1),  $a_{m+1} = \dots = a_n = 0$ .

В качестве оценки для верхней граничной частоты  $\omega_b$  монотонной а.ч.х. используем выражение

$$\omega_b = \lambda M[\omega] \quad (6)$$

где  $\lambda$  - нормирующий множитель, величина которого, как будет показано ниже, выбирается исходя из требования получения значений  $\omega_b$ , близких к значениям  $\omega_b$ , которые определяются  $^{3/}$  по уровню  $1/\sqrt{2}$ , т.е. из алгебраического уравнения  $2n$ -ой-степени $^{x/}$

$$h^2(\omega) = 1/2. \quad (7)$$

$^{x/}$  Очевидно, что при достаточно высоких степенях  $2n$  нахождение  $\omega_b$  из уравнения (7) является нелегкой задачей, часто разрешимой лишь численными методами.

## Примеры

1) Система первого порядка имеет изображение переходной характеристики  $h(p) = \frac{1}{1 + p\tau}$ , которому соответствует дифференциальное уравнение  $\tau \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = 1$ , причём  $h(0) = 0$ .

Умножая это уравнение на  $\frac{dh(t)}{dt}$  и интегрируя по  $t$  от 0 до  $\infty$ , получаем  $\tau J + \frac{h^2(t)}{2} \Big|_0^\infty = h(t) \Big|_0^\infty$ , где  $J = \int_0^\infty [h'(t)]^2 dt$ , т.е.  $\tau J + 1/2 = 1$ , т.к.  $h(\infty) = 1$ . Согласно (6) имеем  $\omega_b = \lambda \pi J = \lambda \pi / 2\tau$ . Из уравнения (7) определяем  $\bar{\omega}_b = 1/\tau$ . Потребовав  $\omega_b = \bar{\omega}_b$ , получаем  $\lambda = 2/\pi$ .

2) Система второго порядка имеет изображение переходной характеристики вида  $h(p) = \frac{1 + a_1 p}{1 + b_1 p + b_2 p^2}$ . Соответствующее дифференциальное уравнение  $b_2 h''(t) + b_1 h'(t) + h(t) = 1$ , причём согласно (5)

$h(0) = 0$ ,  $h'(0) = a_1/b_2$ . Как и выше, получаем  $J = (a_1^2 + b_2)/2b_1 b_2$ , т.е.  $\omega_b = (a_1^2 + b_2)/b_1 b_2$ . При нахождении  $J$  было учтено, что  $h'(\infty) = h''(\infty) = \dots = 0$  (это следует из устойчивости решения уравнения (4)). Из уравнения (7) получаем  $\bar{\omega}_b = \sqrt{2a_1^2 + 2b_2 - b_1^2 + \sqrt{(2a_1^2 + 2b_2 - b_1^2)^2 + 4b_2^2}}/b_2 \sqrt{2}$ .

На рис. 1 показаны зависимости  $\omega_b$  и  $\bar{\omega}_b$  от  $b_1$ , при  $b_2 = 1$  и различных  $a_1$  для области монотонности а.ч.х., т.е.  $a_1^2 \leq b_1^2 - 2$ .

Из этих графиков следует, что вблизи границы монотонности а.ч.х., где  $a_1^2 = b_1^2 - 2$  (на рис. 1 - кривая  $\delta = 0$ ), глобальные оценки  $\omega_b$  с достаточной точностью соответствуют  $\bar{\omega}_b$ ; для небольших значений  $a_1$  это совпадение имеет место и при увеличении  $b_1$ . Однако при

И в дальнейшем будем считать  $\lambda = 2/\pi$ , хотя, строго говоря, как и в формуле Элмора, этот коэффициент зависит от порядка системы.

Заметим, что, полагая  $b_2 = 1$ , переходим к изображению

$$h(p) = \frac{1 + a_1 p}{1 + b_1 p + p^2}, \text{ нормированному по частоте.}$$

возрастании  $a_1$  растёт и отклонение, даваемое оценкой  $\omega_b$  по сравнению с  $\bar{\omega}_b$ . Отметим, что имеет место подобное же возрастание отклонения времени нарастания фронта, определяемого по формуле Элмора, по сравнению со временем нарастания фронта, определяемым по уровням 0,1 и 0,9 от установившегося значения  $h(t)$ .

3) Система третьего порядка имеет изображение переходной характеристики  $h(p) = \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3}$ , т.е. соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид  $b_3 h'''(t) + b_2 h''(t) + b_1 h'(t) + h(t) = 1$ , причем согласно (5)  $h(0) = 0$ ,  $h'(0) = a_2 / b_3$ ,  $h''(0) = (a_1 b_3 - a_2 b_2) / b_3^2$ . Умножая уравнение на  $h'(t)$  и интегрируя по  $t$  от 0 до  $\infty$ , получим:

$$b_3 \int_0^{\infty} h''' h' dt + b_2 \int_0^{\infty} h'' h' dt + b_1 \int_0^{\infty} [h'(t)]^2 dt + \int_0^{\infty} h h' dt = \int_0^{\infty} h' dt,$$

т.е.

$$b_3 \int_0^{\infty} h''' h' dt + b_2 \frac{(h')^2}{2} \Big|_0^{\infty} + b_1 J + \frac{h^2}{2} \Big|_0^{\infty} = h \Big|_0^{\infty}, \text{ где } J = \int_0^{\infty} [h'(t)]^2 dt.$$

Последнее уравнение приводится к виду  $b_3 \int_0^{\infty} h''' h' dt - b_2 \frac{a_2^2}{2 b_3^2} + b_1 J - \frac{1}{2} = 0$ , причем  $\int_0^{\infty} h''' h' dt = h' h'' \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} [h''(t)]^2 dt = - \frac{a_2}{b_3} \frac{a_1 b_3 - a_2 b_2}{b_3^2} - \int_0^{\infty} [h''(t)]^2 dt$ .

Для вычисления интеграла  $\int_0^{\infty} [h''(t)]^2 dt$  умножим дифференциальное уравнение на  $h''(t)$  и вновь проинтегрируем по  $t$  от 0 до  $\infty$ :

$$b_3 \int_0^{\infty} h''' h'' dt + b_2 \int_0^{\infty} [h''(t)]^2 dt + b_1 \int_0^{\infty} h' h'' dt + \int_0^{\infty} h h'' dt = \int_0^{\infty} h'' dt,$$

т.е.

$$b_3 \frac{(h'')^2}{2} \Big|_0^\infty + b_2 \int_0^\infty [h''(t)]^2 dt + b_1 \frac{(h')^2}{2} \Big|_0^\infty + h h' \Big|_0^\infty - J = h' \Big|_0^\infty .$$

Итак,  $b_2 \int_0^\infty [h''(t)]^2 dt = J + \frac{a_2^2 b_1}{2b_3^2} + \frac{(a_1 b_3 - a_2 b_2)^2}{2b_3^2} - \frac{a_2}{b_3}$  . Следовательно, искомый интеграл  $J$  определится из уравнения

$$b_1 J - \frac{a_2^2 b_2}{2b_3^2} - \frac{1}{2} - \frac{a_2 (a_1 b_3 - a_2 b_2)}{b_3^2} - \frac{b_3}{b_2} \left[ J + \frac{a_2^2 b_1}{2b_3^2} + \frac{(a_1 b_3 - a_2 b_2)^2}{2b_3^2} - \frac{a_2}{b_3} \right] = 0 ,$$

т.е.

$$J = [a_2^2 b_1 + (a_1^2 - 2a_2 + b_2) b_3] / 2b_3 (b_1 b_2 - b_3) .$$

Таким образом,  $\omega_b = [a_2^2 b_1 + (a_1^2 - 2a_2 + b_2) b_3] / (b_1 b_2 - b_3) b_3$  . При  $a_2 = 0$  получаем  $\omega_b = (a_1^2 + b_2) / (b_1 b_2 - b_3)$  ; при  $a_1 = a_2 = 0$  получаем  $\omega_b = b_2 / (b_1 b_2 - b_3)$  . На рис. 2 показаны зависимости  $\omega_b$  и  $\bar{\omega}_b$  от  $b_2$  для  $b_3 = 1$  ,  $a_1 = a_2 = 0$  и ряда значений  $b_1$  ; кривые  $\delta = 0$  соответствуют границе монотонных а.ч.х.

4) Аналогичная методика применима при любом порядке  $n$  , приводя к системе линейных алгебраических уравнений относительно

$$J_1 = \int_0^\infty [h'(t)]^2 dt , J_2 = \int_0^\infty [h''(t)]^2 dt , \dots , J_{n-1} = \int_0^\infty [h^{(n-1)}(t)]^2 dt .$$



В частном случае, когда все начальные условия нулевые, т.е.

$h(0)=h'(0)=\dots=h^{(n-1)}(0)=0$ , то  $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$  и полином в числителе изображения (1) равен единице. В этом случае глобальные оценки  $\omega_b$  дают наилучшее совпадение с  $\bar{\omega}_b$ , определяемым по уровню  $1/\sqrt{2}$ .

Нетрудно получить следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения  $J_1, J_2, \dots, J_{n-1}$ :

$$\begin{pmatrix} b_1 & -b_3 & b_5 & \dots & 0 \\ -1 & b_2 & -b_4 & \dots & 0 \\ 0 & -b_1 & b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -b_{n-3} & b_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ \vdots \\ J_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

т.е.  $VJ = Q$ .

Матрица коэффициентов совпадает с матрицей Гурвица<sup>/6/</sup> и является невырожденной, если система устойчива, т.е.  $J = V^{-1}Q$ . Следовательно,  $J_1 = \int_0^\infty [h'(t)]^2 dt = \frac{\Delta_{11}}{2\Delta}$ , где  $\Delta_{11}$  - алгебраическое дополнение элемента  $b_1$  матрицы  $V$ , стоящего на пересечении первой строки и первого столбца, а  $\Delta$  - ее определитель.

Тогда верхняя граничная частота  $\omega_b = \Delta_{11} / \Delta$ .

5) Наиболее общие выражения для интеграла (3) непосредственно через коэффициенты (1) имеются, например, в работах<sup>/5-7/</sup>. Согласно этим выражениям

$$\int_0^{\infty} [h'(t)]^2 dt = \frac{1}{2\Delta} (A_1 \Delta_1 + A_2 \Delta_2 + \dots + \frac{A_{m+1} \Delta_{m+1}}{b_n}) , \quad (10)$$

где  $\Delta$  - определитель матрицы  $B$ ,  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m+1$ ) - определитель, получающийся из  $\Delta$  заменой  $(i+1)$ -го столбца столбцом  $1, 0, \dots, 0$ ;  $A_1 = 1$ ;  $A_2 = a_1^2 - 2a_2$ ;  $A_3 = a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4$ ;  $\dots$   $A_k = a_{k-1}^2 - 2a_{k-2} a_k + \dots + 2(-1)^{k-1} a_{2k-2}$ ;  $\dots$   $A_{m+1} = a_m^2$ .

Итак, выражение для верхней граничной частоты монотонной а.ч.х. произвольной системы  $n$ -го порядка имеет вид

$$\omega_b = (A_1 \Delta_1 + A_2 \Delta_2 + \dots + A_{m+1} \Delta_{m+1} / b_n) / \Delta . \quad (11)$$

Предлагаемые глобальные оценки для верхней граничной частоты, позволяющие оценить эту величину непосредственно по виду передаточной функции цепи без решения алгебраических уравнений высших степеней, могут оказаться полезными, в частности, при анализе и расчёте широкополосных линейных усилителей.

#### Литература

1. В. Элмор, М. Сендс. Электроника в ядерной физике, ИЛ, 1953.
2. Г.К. Гаврилов. Приближенные методы анализа переходных процессов. Изд-во "Советское радио", 1966.
3. О.Б. Лурье. Усилители видеочастоты. Изд-во "Советское радио", 1961.
4. С. Мэзон, Г. Циммерман. Электронные цепи, сигналы и системы. Изд-во ИЛ, 1963.

5. З.Ш. Блох. Переходные процессы в линейных системах автоматического регулирования. Физматгиз, 1961.
6. Теория автоматического регулирования, под ред. В.В. Солодовникова, книга 1, изд-во "Машиностроение", 1967.
7. Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. Изд-во ИЛ, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел

25 ноября 1970 года.

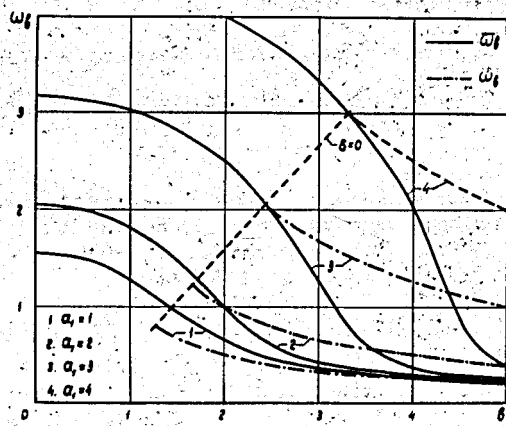


Рис. 1. Зависимости  $\omega_b(b_1)$  и  $\bar{\omega}_b(b_1)$  при различных значениях  $a_1$  для системы второго порядка.

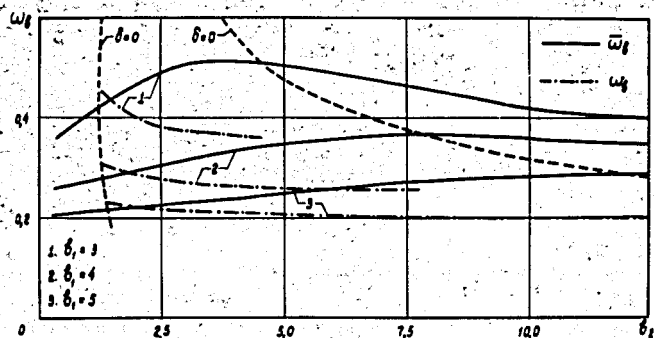


Рис. 2. Зависимости  $\omega_b(b_2)$  и  $\bar{\omega}_b(b_2)$  при различных значениях  $b_1$  для системы третьего порядка.