

СЗ 44.1 + 4840.1

M-80

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

10 - 4112

В.И.Мороз

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРЕНИЙ
В ПУЗЫРЬКОВЫХ КАМЕРАХ

Специальность 040 - экспериментальная физика

Автореферат диссертации на соискание учёной
степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1968

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий и Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты

доктор физ.-мат. наук СОЛОВЬЕВ М.И.

доктор физ.-мат. наук, профессор СУЛЯЕВ Р.М.

Ведущее предприятие - Московский инженерно-физический институт

Автореферат разослан " " 1968 г.

Защита диссертации состоится в 1968 г.
на заседании Ученого совета Лаборатории высоких энергий
Объединенного института ядерных исследований, в конференц-
зале ЛВЭ ОИЯИ (г. Дубна, Московской области).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института.

Секретарь Ученого совета Лаборатории
высоких энергий ОИЯИ
кандидат физ.-мат. наук

КУЗНЕЦОВ А.А.

" " 1968 г.

10 - 4112

В.И.Мороз

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРЕНИЙ
В ПУЗЫРЬКОВЫХ КАМЕРАХ

Специальность 040 - экспериментальная физика

Автореферат диссертации на соискание учёной
степени кандидата физико-математических наук

561389

Объединенный институт
высоких энергий
Библиотека

В В Е Д Е Н И Е

В физике высоких энергий широко используется методика пузырьковых камер, существенным разделом которой является обработка измерений фотографий на электронно-вычислительных машинах (ЭВМ).

В обработке измерений достаточно четко выделяются следующие этапы:

1. Накопление и первичный анализ информации (измерений) в ЭВМ.
2. Реконструкция отдельного трека, при которой определяются наиболее вероятные оценки параметров частицы, оставившей данный трек.
3. Идентификация событий, зарегистрированных в камере. На этом этапе определяется, какой именно из процессов осуществился в данном взаимодействии.
4. Вычисление эффективности регистрации отдельного события.
5. Вычисление кинематических характеристик идентифицированных событий и накопление информации обо всем эксперименте.

Такая схема обработки является общепринятой в практике работы с пузырьковыми камерами. Однако содержание каждого из разделов зависит от оснащенности вычислительными машинами, типа используемых пузырьковых камер и экспериментов, которые проводятся с этими камерами.

В диссертации описываются некоторые из разработанных в ОИЯИ алгоритмов, которые были использованы при создании системы программ /I-24/ для экспериментов на 55-см пропановой камере^{x)} /25/.

^{x)} Система использовалась при обработке нейтронного и 4 ГэВ/с π^- мезонного облучений пропановой камеры /25/.

2-м-пропановой камере/26,27/ и частично использовались при работе на 40-см водородной/28,29/ и I-м пропановой камере/30,31/.

Следует иметь в виду, что методика обработки пропановых камер сложнее, чем водородных, поэтому была заметно ограничена возможность использования алгоритмов для водородных камер, разработанных в ЦЕРНе/32/, Беркли/33/, ИТЭЭ/34/ и других лабораториях.

Диссертация содержит шесть глав и заключение.

В первой главе рассматриваются требования, которые ставит эксперимент перед программой геометрической реконструкции и дается сравнительный анализ решений, принятых в разных программах. Из анализа следует, что наиболее подходящей к условиям ОИЯИ является программа с реконструкцией пространственных точек трека, по которым определяются параметры частицы с учетом матрицы многократного рассеяния.

Во второй главе рассматриваются вопросы, связанные с математическим описанием оптической системы и обосновывается новый метод реконструкции пространственных точек.

Третья глава посвящена обоснованию алгоритма оптимального определения оценок параметров неизлучающей заряженной частицы, который состоит из двух частей - алгоритма начальной оценки (в нем удалось учесть неоднородное магнитное поле и ионизационные потери), и алгоритма точной аппроксимации, учитывающего как нелинейность задачи, так и статистические факторы.

В четвертой главе анализируется проблема определения параметров $P, \beta, tg\alpha$ для электронов по реконструированным точкам на их треках. Рассмотрение ведется с учетом флуктуации тормозного излучения.

В пятой главе рассмотрена статистическая задача идентификации событий в пузырьковой камере и ее связь с методом наименьших квадратов. Особо выделена проблема идентификации при недостатке информации.

Шестая глава посвящена вопросу определения весов событий, которые необходимо вводить из-за ограниченной величины пузырьковых камер. Показано, что метод потенциальных длин является частным случаем более общего метода вычисления весов, дающего в ряде случаев значительное улучшение точности эксперимента.

Глава I.

ОБРАБОТКА ИЗМЕРЕНИЙ ФОТОГРАФИЙ СОБЫТИЙ В ПУЗЫРЬКОВЫХ КАМЕРАХ

Программа геометрической реконструкции является первой в цепи обработки и должна определить для каждого трека заряженной частицы параметры P^{-1} (или P), β , $tg\alpha$ и координаты первой точки трека (X_0, Y_0, Z_0) по достаточно разнородной информации, поступающей на вход программы.

Здесь

- P - импульс частицы,
- β - угол между проекцией трека на XOY и осью OX,
- α - угол трека с плоскостью XOY.

Геометрическая программа, пригодная для большой пропановой камеры/26/, должна учитывать следующие статистические эффекты:

- 1) дисторсии оптической системы,
- 2) деформацию пленки,
- 3) неоднородность магнитного поля,
- 4) ионизационные потери частиц.

Кроме того, следует учитывать статистический характер задачи, который, в основном, определяется:

- /1/ измерительными ошибками,
- /2/ многократным рассеянием,
- /3/ флуктуацией радиационных потерь (для электронов).

В отмеченных выше программах /1,6,31+34/ при определении $\rho, \beta, \operatorname{tg} \alpha$ веса измеренных точек считаются постоянными, следовательно, многократное рассеяние учитывается только в ошибках параметров. Последовательный учет неоднородности магнитного поля и ионизационных потерь проведен в /35/, однако принятое там решение находить из условия минимума одного χ^2 сразу все параметры приводит к большому числу итераций, необходимых для получения достаточной точности. Поэтому для 2-м пропановой камеры потребовалось провести разработку нового алгоритма /14,15/, который состоит в следующем:

1. Первая точка трека (X_0, Y_0, Z_0) реконструируется как соответствующая точка /1,10/ и больше не меняется.
2. Все точки трека реконструируются как квазисоответствующие.
3. Вычисляется магнитное поле во всех точках трека /17/.
4. Определяются параметры $\hat{\rho}, \hat{\beta}, \hat{\operatorname{tg}} \alpha$ в начальном приближении (индекс " ^ ") по специальному алгоритму, который учитывает неоднородность магнитного поля, ионизационные и, для электронов, средние радиационные потери /14,18/.

5. Точное значение ρ^{-1}, β определяется из условия минимума χ_{xy}^2 , а $\operatorname{tg} \alpha$ - из минимума χ_z^2 . χ_{xy}^2 и χ_z^2 построены с учетом матрицы многократного рассеяния /19,36/, для электрона в χ_{xy}^2 входит матрица многократного рассеяния и флуктуации радиационных потерь /14/.

Глава 2

РЕКОНСТРУКЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТОЧЕК

В практически важном случае хорошо исправленных объективов с оптическими осями, перпендикулярными поверхностям раздела сред, каждый из объективов может быть описан как показано на рис. I. Считая объективы близкими по своим параметрам, а измерения на левом и правом кадрах равноточными, получим из метода наименьших квадратов следующие формулы для реконструкции пространственных координат соответствующих точек /1,10/

$$X = x_{лэ} A_{л}, \quad (I)$$

$$Y = \frac{1}{2} (y_{лэ} A_{л} + y_{пэ} A_{п}),$$

$$Z = \frac{B - (x_{лэ} K_{л} \psi_{л} - x_{пэ} K_{п} \psi_{п})}{x_{лэ} K_{лл} \psi_{л} - x_{пэ} K_{пп} \psi_{п}},$$

где

$$A_{л} = Z K_{лл} \psi_{л} + K_{л}, \quad A_{п} = Z K_{пп} \psi_{п} + K_{п}, \quad B = X_{оп} - X_{ол}$$

$(0,0), (B,0)$ - координаты оптических осей, левого и правого объективов, соответственно.

Эти формулы дают значительно меньшие дисперсии координат X, Y, Z , чем формулы реконструкции /22, 37/, содержащие параллакс ($x_{пз} - x_{пз} y_{пз} y_{пз}^{-1}$), к тому же выражения (I) менее чувствительны к таким неприятным систематическим ошибкам, как смещение одного кадра относительно другого вдоль оси y .

На рис. 2 показана процедура реконструкции несоответствующих точек. При этом каждой точке, измеренной на левом снимке, определяется квази соответствующая ей точка на правом (метка "*").

Для расчета дисперсий координат положим, что объективы тождественны и $\psi \equiv \psi_1$. Тогда координаты левой и квази соответствующей ей правой точки могут быть записаны в виде

$$x_{лз} = x_A + c_1, \quad y_{лз} = y + c_2 = y_{пз}^*, \quad x_{пз}^* = x_n^* + c_3 + c_2 \operatorname{tg} \psi, \quad (2)$$

где

c_1, c_2, c_3 - измерительные ошибки (с дисперсией \bar{c}^2),
 ψ - угол между проекцией трека на правый кадр и ось $O_n X_n$.

Обозначив через D_{xy} дисперсию проекции измеренной точки на плоскость XU в направлении, перпендикулярном к проекции трека на эту же плоскость, а через D_z - дисперсию смещения по Z , в которую мы перенесли измерительную ошибку вдоль трека, будем иметь /14/

$$D_{xy} = \bar{c}^2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial X}{\partial c_i} \sin \beta - \frac{\partial Y}{\partial c_i} \cos \beta \right)^2, \quad (3)$$

$$D_z = \bar{c}^2 \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial Z}{\partial c_i} - \left(\frac{\partial X}{\partial c_i} \cos \beta + \frac{\partial Y}{\partial c_i} \sin \beta \right) \operatorname{tg} \alpha \right]^2, \quad (4)$$

где X, Y, Z получены при подстановке (2) в (I).

Параметры трека определяются тем точнее, чем меньше дисперсии (3,4). Поэтому, если трек сфотографирован более чем двумя объективами, за оптимальную стереопару следует считать такую, которая дает минимум $D = D_{xy} + q D_z$,

где q выбирается из условий физической задачи.

Для компенсации деформации пленки и перехода от измерительного прибора к системе координат, связанной с оптическими осями, используются реперные кресты /11, 12, 38/. В работе /38/ на простой модели показано, что реперные кресты на границе верхнего стекла камеры с рабочей жидкостью обеспечивают более точную реконструкцию, чем реперные кресты в плоскости изображения фотоаппарата.

Глава 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЧАСТИЦЫ ПО РЕКОНСТРУИРОВАННЫМ ТОЧКАМ НА ЕЁ ТРЕКЕ

Треки можно разделить на две группы - длинных треков, на которых возможно измерение кривизны, и круто направленных или коротких треков ($\leq (10+100) \sqrt{D_{xy}}$), на которых кривизна может быть измерена только с очень большой ошибкой.

Обработка длинных треков начинается с определения начального приближения $\hat{p}, \hat{\beta}, \hat{\operatorname{tg}} \alpha$, для чего разработан специальный приём /14, 18/, позволяющий учесть при небольшом объеме вычислений на ЭВМ неоднородность магнитного поля (до $\approx 20\%$) и ионизационные потери.

Проекция реконструированных точек трека на плоскость аппроксимируется параболой

$$Y = a(X - 0,5X_k)^2 + c, \quad (5)$$

а проекция этих же точек на плоскость развёртки - прямой

$$Z = s \operatorname{tg} \alpha + Z_f, \quad (6)$$

где s - длина проекции трека на плоскость XOY . Система координат XOY выбрана так, что

$$X_1 = Y_1 = Y_k = 0. \quad (7)$$

Коэффициенты $a, c, \operatorname{tg} \alpha, Z_f$ определяются методом наименьших квадратов по измеренным точкам (индекс "э").

Спроектировав на XOY рассчитанную траекторию (интеграл уравнения движения), мы можем подобрать a и c , аппроксимировав её параболой (5). Коэффициенты a и c в этом случае будут функциями от начальных параметров частицы и магнитного поля.

Из условия $a = a_э$ получается уравнение относительно неизвестного импульса частицы в начальной точке. Решение уравнения удобно представить в виде ряда по s

$$\hat{P} = \frac{0,3H}{2\alpha_3 \cos \alpha} + \frac{3}{\cos \alpha} F_1(\alpha_3, \vec{H}, \vec{H}', \frac{dP}{ds}) + (\frac{s}{\cos \alpha})^2 F_2(\alpha_3, \vec{H}, \vec{H}', \frac{dP}{ds}, \frac{d^2 P}{ds^2}), \quad (8)$$

ограничиваясь членами до s^2 ($\vec{H}, \vec{H}', \vec{H}''$ - магнитное поле и его производные по дуге траектории).

В простейшем случае однородного поля и постоянных потерь^{/8/} формула (8) переходит в

$$\hat{P} = \frac{0,3H}{2\alpha_3 \cos \alpha} - \frac{1}{2} \frac{s}{\cos \alpha} \frac{dP}{ds} + \frac{3}{56} \left(\frac{0,3H}{2\alpha_3 \cos \alpha} \right) (2\alpha_3 s)^2. \quad (9)$$

При известном \hat{P} можно определить из решения уравнения движения угол

$$\hat{\beta} = \beta(\hat{P}, \alpha_3, \vec{H}, \vec{H}', \vec{H}'', \frac{dP}{ds}, \frac{d^2 P}{ds^2}), \quad (10)$$

при котором выполнено (?).

Аналогичным образом уточняется значение $\operatorname{tg} \alpha$. Представление о точности предложенного метода даёт таблица I.

Оптимальные оценки параметров P, β находятся из условия экстремума по $P, \beta, \gamma, \varepsilon, \delta, \eta, \varphi$ следующей производящей функции Лагранжа Q /18, 19/

$$Q = \sum \varepsilon^2 D_{\varepsilon}^{-1} + \sum \delta^2 D_{\delta}^{-1} + \sum \eta^2 D_{\eta}^{-1} + \sum q_i (y_{iэ} - y_i), \quad (11)$$

где

ε - измерительные ошибки,

δ, η - угловые отклонения и поперечные смещения в многократном рассеянии,

D_{δ}, D_{η} - дисперсии величин δ и η ,

q_i - неопределённые множители Лагранжа,

$y_{iэ}$ - координаты измеренных точек,

y_i - интеграл уравнения движения, который удалось свести к квадратурам.

Поиск минимума Q эквивалентен задаче на минимум по P, β, Y_f для

$$\chi_{xy}^2 = \|y_{i3} - \tilde{y}_i\| \|D_{xy} \Delta_{ij} + c_{ij}\|^{-1} \|y_{j3} - y_j\|, \quad (I2)$$

где

Δ_{ij} - единичная матрица,

c_{ij} - матрица многократного рассеяния /19, 36/.

Аналогичным образом определение $tg\alpha$ сводится к поиску минимума

$$\chi_z^2 = \|z_{i3} - z_i\| \|D_z \Delta_{ij} + c_{ij} \cos^2 \alpha\|^{-1} \|z_{j3} - z_j\| \quad (I3)$$

по $tg\alpha$ и Z_f .

Начальное приближение оказывается достаточно хорошим, чтобы можно было ограничиться в условиях 2-м пропановой камеры только одной итерацией, а сам алгоритм /14, 18/ обеспечивает определение оптимальных оценок параметров в условиях неоднородности магнитного поля до 20% и больших ионизационных потерь (таблица 2).

Если многократное рассеяние мало, то можно положить в (I2) и (I3) c_{ij} и учесть многократное кулоновское рассеяние только в дисперсиях параметров. В работе /14/ получены выражения

$$\overline{(\Delta P^{-1})_{кул}^2}, \quad \overline{(\Delta \beta)_{кул}^2}, \quad \overline{(\Delta tg\alpha)_{кул}^2}.$$

как функции числа измеренных точек на треке.

В условиях 2-м пропановой камеры дисперсия P^{-1} при переходе от полной матрицы к диагональной возрастает не более, чем на 35% (для очень большого многократного рассеяния), дисперсии же β и $tg\alpha$ возрастает во много десятков раз. Поэтому

альтернативой использованию (I2) и (I3) (см. таблицу 3) может быть определение β и $tg\alpha$ на соответствующих оптимальных длинах, что, однако, не всегда удобно.

Важной проблемой при обработке измерений в пропановых камерах является выделение треков частиц, испытавших ядерное рассеяние на малый угол. Наиболее надёжный критерий для этого представляют собой величины χ_{xymin}^2 и χ_{zmin}^2 .

В работе /14/ предлагается для ранней диагностики изломов использовать разность между среднеквадратичными отклонениями от параболы (5) измеренных точек и кривой y_i . Для определения интервала, на котором произошёл излом, можно вычислить все δ_i , обращающие в минимум Q (II) и выделить $\max(\delta_i^2 D\delta_i^{-1})$. Такая процедура предложена в /18, 19/.

Глава 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ $P, \beta, tg\alpha$ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ПОЗИТРОНОВ

Для обработки треков электронов в 55-см пропановой камере /25/ с 1965 г. использовалась аппроксимация проекции трека параболой (5) с последующим введением поправки на средние потери /2/. Методика введения этой поправки по существу совпадает с расчётом начального приближения P (глава 3) и может быть представлена как

$$\Delta P = \frac{1}{2} \left(\frac{dP}{ds} \Big|_{иониз.} + \frac{dP}{ds} \Big|_{радиат.} \right) \frac{3}{\cos \alpha} + \frac{3}{56} \frac{0,3H}{2a_3 \cos \alpha} (2a_3 s)^2.$$

Вычисленная таким образом поправка тем лучше, чем короче трек и меньше неоднородность магнитного поля^{х)}. Большая длина трека приводит к заметной корреляции между координатами точек трека, что не учитывается при аппроксимации, и росту дисперсии радиационных потерь. Поэтому для определения параметров электрона была разработана специальная методика^{/14/}.

Параметры электрона определяются в два этапа.

На первом вычисляются начальные оценки \hat{P}_e , $\hat{\beta}_e$ и $tg\hat{\alpha}_e$ по результатам аппроксимации трека параболой и прямой, с введением поправок на неоднородность магнитного поля, и средние потери на ионизацию и излучение (при учёте отбора треков на измерение); поправки вводятся так, как это показано в гл. 3.

На втором этапе методом максимума правдоподобия определяются оптимальные оценки P^{-1} и β с использованием в (I2) матрицы \hat{C}_{ij} (вместо C_{ij}), которая учитывает многократное рассеяние и флуктуацию радиационных потерь на треках, отобранных для измерений. Использование \hat{C}_{ij} и учёт средних потерь при вычислении Y_i гарантирует оптимальность полученных оценок P^{-1} и β , а расчёт Y_i позволяет учесть даже большую неоднородность магнитного поля. Определение $tg\hat{\alpha}$ не отличается от изложенного в гл. 3.

х) Метод^{/2/} может рассматриваться как обобщение на многоточечные измерения, предложенного в^{/39/} способа определения импульса электрона по измерениям стрелы прогиба трека с введением средних поправок на излучение.

Дальнейшее развитие этой методики изложено в^{/40,41/}, где рассматривается задача определения методом максимума правдоподобия параметров электрона без использования аппроксимации нормальным законом распределения по импульсам электронов, прошедших слой ΔS . Однако такая процедура требует большего времени на ЭВМ.

Глава 5

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СОБЫТИЙ

В большинстве случаев одному и тому же числу частиц и их взаимному расположению соответствует несколько типов ядерных взаимодействий.

Пусть среди зарегистрированных событий могут встречаться ядерные реакции $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, тогда вероятность ω_α того, что данное событие является реакцией α , определяется не только величинами $(P_{1\alpha}, \dots, P_{n\alpha})$ измеренных параметров треков и их дисперсий, но и относительными вероятностями $\Omega_\alpha, \Omega_\beta, \dots, \Omega_\gamma$ встретить зарегистрированные события, где величины Ω пропорциональны произведению сечения соответствующего процесса ($\alpha, \beta, \dots, \gamma$) на вероятность его регистрации (см. гл. 6).

Отношение $\omega_\alpha/\omega_\beta$ записывается как^{/42/}

$$\frac{\omega_\alpha}{\omega_\beta} = \left(\frac{\Omega_\alpha}{\Omega_\beta}\right) \frac{\int L_\alpha dP \int dP}{\int L_\beta dP \int dP} \exp\left(-\frac{\chi_{\alpha min}^2 - \chi_{\beta min}^2}{2}\right), \quad (I4)$$

где многомерные интегралы берутся в пространстве $P(P_1, \dots, P_n)$

по областям $A_{1\alpha}$ и $A_{1\beta}$, доступным для процессов α и β соответственно,

$$L_{\alpha} = \prod_{i=1}^N \{ (2\pi D_i)^{-\frac{1}{2}} \exp[-(P'_{i\alpha} - P_i)^2 (2D_i)^{-1}] \}, \quad (15)$$

D - дисперсии параметров,

P'_{α} - удовлетворяет уравнению $f_{\alpha K}(P) = 0$.

($K=1, \dots, K_{\alpha}$; $K_{\alpha} < N$) , характеризующим процесс α , и обращает в минимум выражение χ^2

$$\chi^2 = \sum (P_{i\alpha} - P_i)^2 D_i^{-1}, \quad (16)$$

так что

$$\chi_{\alpha \min}^2 = \sum (P_{i\alpha} - P'_{i\alpha})^2 D_i^{-1}.$$

Для одинакового числа уравнений связи и некоторых упрощающих предположений

$$\frac{\omega_{\alpha}}{\omega_{\beta}} = \frac{\Omega_{\alpha}}{\Omega_{\beta}} \exp\left(-\frac{\chi_{\alpha \min}^2 - \chi_{\beta \min}^2}{2}\right). \quad (17)$$

Из (14) следует, что, если $K_{\alpha} > K_{\beta}$ и разность $(\chi_{\alpha \min}^2 - \chi_{\beta \min}^2)$ невелика, то при достаточно малых D_i процесс α будет много более вероятен, чем β .

Для вычислений χ_{\min}^2 и P' в программах^{/3,7,8,23/} на первых итерациях использован метод штрафов^{/43/}, при котором отыскивается минимум.

$$A^2 = \sum (P_{i\alpha} - P_i)^2 D_i^{-1} + T \sum f_i^2 (\Delta f_i)^{-2}, \quad (T > 0) \quad (18)$$

(определение $\min A^2$ производится по надёжной стандартной программе^{/44/}).

В^{/45/} показано, что $|P'_T - P'| \rightarrow 0$ как T^{-1} при $T \rightarrow \infty$, где P'_T обращает в минимум (18). Последняя итерация для определения P' и χ_{\min}^2 выполняется по методу неопределённых множителей Лагранжа.

Процедуру, приведшую к (14), можно использовать и в том случае, если число уравнений связи равно 0, как это имеет место при идентификации событий с одной незарегистрированной частицей в нейтронном и γ пучках, характеризующихся широким импульсным спектром.

Разработанная для этого случая методика^{/5,42,46,47/}, кроме статистических соображений (14), опирается на анализ свойств уравнения закона сохранения энергии $F(P_H) = 0$, где

$$F(P_H) = \sqrt{P_H^2 + M_H^2} + M_P - \sum E_q - \sqrt{M_0^2 + P_q^2 + P_H^2 - 2P_H P_q \cos \theta},$$

M_H, P_H - масса и импульс налетающей частицы, M_P - масса мишени, M_0 - эффективная масса незарегистрированных частиц, E_q, P_q - энергия и импульс q -ой зарегистрированной вторичной частицы, $P_q = |\sum \vec{P}_q|$, θ - угол между $\sum \vec{P}_q$ и \vec{P}_H .

Глава 6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕГИСТРАЦИИ СОБЫТИЙ В КАМЕРЕ

Непосредственно полученные распределения событий бывают в большей или меньшей степени искажены из-за ограниченных размеров камеры и особенностей регистрации частиц очень малых или больших энергий. Поэтому необходимо введение эффективности регистрации события или обратной ей величины - веса события.

Расчёт весов событий методом потенциальных длин приводит к очень большим флуктуациям, что резко снижает точность полученных результатов. Поэтому был разработан и реализован в ряде программ /24, 49/, более общий метод /24, 50, 51/ вычисления эффективности регистрации событий, который был успешно применён при изучении методикой пузырьковых камер упругого Λp - /52/ и $n p$ - /53/ рассеяния, поиске Λp - резонансов /54, 55/ и изучении событий с частицами, распадающимися на γ - кванты /48/.

Предположим, что для каждой совокупности величин P , по которым мы должны получить распределение числа событий, нам известны $Q_p(R, S')$ - распределение событий по совокупности переменных (R, S') и $g_p(R, S')$ - вероятность регистрации событий.

Если в интервале ΔP было зарегистрировано N событий, их истинное число U может быть определено по одной из следующих формул /51/

$$U_1 = \sum g_i^{-1} \pm \sqrt{\sum g_i^{-2}}, \quad (19)$$

$$U_2 = \sum [g(S'_i)]^{-1} \pm \sqrt{\sum [g(S'_i)]^{-2}}, \quad (20)$$

$$U_3 = N(\bar{g})^{-1} \pm \sqrt{N(\bar{g})^{-1}}, \quad (21)$$

где

$$g_i = g(R_i, S'_i), \quad g(S') = \int g Q dR (S Q dR)^{-1},$$

$$\bar{g} = \iint g Q dR dS, \quad \int Q dR dS = 1.$$

Величины U_1, U_2, U_3 представляют собой несмещённые оценки одной и той же величины истинного числа событий U , но качество этих оценок разное. Наименьшую дисперсию имеет величина U_3 . Если \bar{g} не вычислено, то отношение дисперсий $D(U_1)$ и $D(U_3)$ может быть оценено по формуле

$$D(U_1)[D(U_3)]^{-1} = N \left[\sum g_i^{-1} \right]^2 \sum g_i^{-2}, \quad (22)$$

из которой следует, что разница в точности обработки измерений по формулам (19) или (21) не зависит от числа наблюдавшихся случаев.

Если отношение весов событий равно 10, то дисперсия (19) в 1,67 раза больше, чем дисперсия (21), как это следует из формулы (22). При отношении весов событий, равном 2, дисперсия в числе событий, определённом по формуле (19), только на 11% больше оптимальной (21).

На практике /24, 49, 52-55/ бывает достаточно взять только легко вычисляемые интегралы (например, по величинам R) и перейти таким образом от g_i к $g(S'_i)$, что уже обеспечивает достаточную точность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работах, которые положены в основу диссертации, получены следующие новые результаты.

1. Разработана схема программы геометрической реконструкции /14/ для больших пропановых и водородных камер, основывающаяся на последовательном применении метода максимума правдоподобия

для учёта статистических факторов. Принятый алгоритм расчёта позволяет без больших затрат времени на ЭВМ учесть большую неоднородность магнитного поля (до 20%) и большие ионизационные потери. Повышение допустимой неоднородности магнитного поля до 20% даёт возможность заметно снизить требования к конструкции магнита пузырьковой камеры, что имеет большое значение при проектировании новых больших камер.

2. При использовании метода наименьших квадратов получены формулы пространственной реконструкции координат соответствующих точек и определены дисперсии квази соответствующих точек.

3. Рассмотрено использование реперных крестов при реконструкции пространственных координат и показано, что кресты в объёме камеры обеспечивают большую точность, чем кресты в плоскости изображения объектива.

4. Разработана методика определения начальных оценок параметров, $P, \beta, \operatorname{tg} \alpha$ частицы с учётом большой неоднородности магнитного поля, ионизационных и, для электрона, средних радиационных потерь по результатам аппроксимации траектории параболой и прямой. Систематические ошибки метода не превышают

1% по импульсу P ,

0,01 радиана по углу β ,

0,009 по $\operatorname{tg} \alpha$,

если изменение магнитного поля вдоль трека (до 20%) может быть аппроксимировано квадратичной параболой.

5. Предложено определение (P^{-1}, β) и $\operatorname{tg} \alpha$ из функционалов χ_{xy}^2 и χ_z^2 соответственно, построенных на основе метода максимума правдоподобия и содержащих инте-

грал уравнения движения. Последний сведен к квадратурам разделением переменных. Это стало возможным за счёт аппроксимации магнитного поля, углов β и α функциями от S , которые построены по измеренным точкам.

С помощью специального генератора тестовых треков /20/ показано, что такой алгоритм обладает высокой линейностью и точностью даже в условиях 2-м пропановой камеры.

6. При использовании в χ_{xy}^2 и χ_z^2 диагональной матрицы в дисперсии параметров $P, \beta, \operatorname{tg} \alpha$ входят только измерительные ошибки. Поэтому получены выражения для учёта кулоновских частей дисперсий, как функций числа измеренных точек на треке.

7. Предложено использовать в качестве критерия отсутствия излома на треке величины $\chi_{xy}^2 \min$ и $\chi_z^2 \min$, а для компенсации "хвоста" ядерного или многократного рассеяния увеличивать рассчитанные дисперсии (P, β) в $(N_1 - 3)^{-1} \chi_{xy}^2 \min$ раз и дисперсию $\operatorname{tg} \alpha$ в $(N_1 - 2)^{-1} \chi_z^2 \min$ раз, где N_1 - число точек на треке.

Для ранней диагностики изломов предложено использовать сравнение средне-квадратичных отклонений от аппроксимирующей параболы измеренных точек и расчётной траектории.

Для выделения интервала, на котором произошёл излом, предлагается рассчитывать наиболее правдоподобные значения углов рассеяния δ и определять $\max(\delta_i^2 D_{\delta_i}^{-1})$.

8. Разработана методика и составлена программа определения импульса электрона по результатам аппроксимации его траектории параболой, проведенной по многим точкам. Методика основана на

учёте средних радиационных потерь электронов и подходит для условий небольших пропановых камер.

9. Для определения параметров P^+ , β , $tg\alpha$ электронов в большой пропановой камере (например /26,27/), разработана процедура, позволяющая учесть методом максимума правдоподобия измерительные ошибки, многократное рассеяние и флуктуацию излучения при большой неоднородности магнитного поля. Для учёта статистических факторов при определении (P^+ , β) получена специальная матрица многократного рассеяния и флуктуации радиационных потерь.

10. Рассмотрена статистическая задача идентификации каналов реакций и получена формула, связывающая вероятность канала с величиной χ_{min}^2 . Показано применение этой формулы для идентификации каналов, характеризующихся одинаковым и разным числом уравнений связи.

11. Предложена схема программы идентификации, отличающаяся применением метода штрафов на первых итерациях и метода неопределённых множителей Лагранжа на заключительной итерации.

12. Разработана методика идентификации каналов реакций, вызванных взаимодействием пучка частиц с широким импульсным спектром. Методика применена для разделения каналов в неупругих np -взаимодействиях, зарегистрированных на камере /25/, облученной пучком нейтронов с импульсом от 2 до 11 Гэв/с.

13. Предложен и реализован в ряде программ общий метод вычисления весов событий, зарегистрированных в камере. Показано, что метод даёт более точные результаты, чем метод потенциальных длин.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах (I-3, 5-8, 10, 11, 14, 15, 17-19, 21, 23, 24, 38, 40-42, 45-47, 51-53/.

ЛИТЕРАТУРА:

1. В.Ф.Вишневский, Ду Юнь-цай, А.Ф.Лукьянцев, В.И.Мороз, А.В.Никитин, Г.Н.Тентюкова, Ю.А.Троян, Цзян Шэо-цзян, Чжан Вэнь-шй, Б.А.Шахбазян, Янь У-гуан. Препринт ОИЯИ, Р-1468, Дубна, 1963.
2. В.Г.Гришин, Э.Г.Кистенёв, Л.И.Лепилова, В.И.Мороз, Чу Цзынь. Препринт ОИЯИ, Р-2277, Дубна, 1965.
3. А.Ф.Лукьянцев, В.И.Мороз, В.И.Никитина, Б.А.Шахбазян. Препринт ОИЯИ, Р-1982, Дубна, 1965.
4. О.Благонаравова, Л.Лепилова, А.Лукьянцев, Г.Тентюкова, В.Мороз, А.Никитин, Б.Шахбазян, Янь У-гуан. Препринт ОИЯИ, № 1959, Дубна, 1965 г.
5. Р.М.Джабар-Заде, В.И.Мороз, А.В.Никитин, А.И.Родионов, Э.Рупп, Ю.А.Троян, Б.А.Шахбазян. Препринт ОИЯИ, № 1957, Дубна, 1965 г.
6. О.В.Благонаравова, З.М.Иванченко, А.Ф.Лукьянцев, В.И.Мороз, Н.С.Новикова, Г.Н.Тентюкова, Шень Чун-хуа. Препринт ОИЯИ, № 2005, Дубна, 1965.
7. З.М.Иванченко, А.Ф.Лукьянцев, В.И.Мороз, В.И.Никитина, Ян Фу-цин, Л.С.Нефедьева. Препринт ОИЯИ, № 2005, Дубна 1965.
8. З.М.Иванченко, А.Ф.Лукьянцев, В.И.Мороз, А.Д.Макеренкова, Г.Н.Тентюкова. Препринт ОИЯИ, Р-2399, Дубна, 1965 г.
9. А.Д.Макеренкова, В.И.Мороз, Э.Рупп. Препринт ОИЯИ, № 2917, Дубна, 1966 г.

10. И.М.Иванченко, Т.Г.Останевич, Н.А.Круткова, В.И.Мороз,
Г.Н.Тентюкова.
Препринт ОИЯИ, Р-2889, Дубна, 1966 г., ПТЭ № 6, 1967 г.
11. Н.Ф.Маркова, В.И.Мороз.
Отчёт ОИЯИ, Б2-2918, Дубна, 1966.
12. В.А.Загивайко, В.Н.Шигаев.
Препринт ОИЯИ, 2527, Дубна, 1965 г.
13. Н.Ф.Маркова, В.И.Мороз, А.В.Никитин, И.В.Попова,
Г.Н.Тентюкова, Ю.А.Троян.
Препринт ОИЯИ, IO-3545, Дубна, 1967.
14. Н.Ф.Маркова, В.И.Мороз, В.И.Никитина, А.П.Стельмах,
Г.Н.Тентюкова.
Препринт ОИЯИ, P10-3768, Дубна, 1968 г., март.
15. Н.Н.Говорун, Г.А.Емельяненко, Н.Ф.Маркова, В.И.Мороз,
В.И.Никитина, И.С.Сайтов, А.П.Стельмах, Г.Н.Тентюкова.
Препринт ОИЯИ, P11-3480, Дубна, 1967 г.
16. Л.И.Лепилова, Ф.Фришева.
Отчёт ОИЯИ, Б1-IO-3533, Дубна, 1967 г.
17. В.И.Мороз, О.В.Мухитова, Г.Н.Тентюкова.
Препринт ОИЯИ, P11-3512, Дубна, 1967 г.
18. Г.А.Емельяненко, К.П.Ломов, Г.И.Макаренко, В.И.Мороз,
И.С.Сайтов, А.П.Стельмах.
Препринт ОИЯИ, Р-2829, Дубна, 1966.
19. Г.А.Емельяненко, К.П.Ломов, Г.И.Макаренко, В.И.Мороз,
И.С.Сайтов, А.П.Стельмах.
ПТЭ, № 5, стр. 128, 1967 г.

20. А.Д.Макаренко, В.И.Мороз, А.П.Стельмах, Г.Н.Тентюкова,
Препринт ОИЯИ, P10-3526, Дубна, 1967 г.
21. Н.Н.Говорун, В.И.Мороз, Г.Н.Тентюкова, В.Н.Шигаев.
Препринт ОИЯИ, IO-3627, Дубна, 1967 г.
22. Е.Н.Кладницкая.
Препринт ОИЯИ, 796, Дубна, 1961.
23. З.М.Иванченко, А.Ф.Лукьянцев, А.Д.Макаренко, В.И.Мороз,
Г.Н.Тентюкова.
Препринт ОИЯИ, P11-3983, Дубна, 1968.
24. В.Ф.Вишневский, Ду Вань-цай, Г.И.Копылов, В.Е.Комолова,
В.И.Мороз, А.В.Никитин, А.И.Родионов, Ю.А.Троян,
Цзянь Шао-цзянь, Чжан Вань-шй, Б.А.Шехбазян, Янь У-гуан.
Препринт ОИЯИ, Р-1489, Дубна, 1964 г.
25. Ван Ген-чан, М.И.Соловьёв, Ю.Н.Шкобин.
ПТЭ, I, 41 (1959).
26. M.P. Balandin *et al.*
Nuclear Instruments and Methods, V.20, p.110-113, 1963
27. С.Аверичев и др.
Препринт ОИЯИ, I3-3724, Дубна, 1968 г.
28. А.В.Белоногов и др.
XII Международная конференция по физике высоких энергий.
Дубна, август 1964, т. 2, стр. 490-493, Атомиздат, М., 1966.
29. И.М.Граменицкий, А.М.Моисеев, Л.А.Тихонова, М.Д.Шефранов.
Препринт ОИЯИ, IO-3772, Дубна, 1968 г.
30. А.В.Богомолов и др.
ПТЭ, I, 61, 1964 г.

31. Н.А.Буздавина, В.Б.Виноградов, В.Б.Флягин.
ОИЯИ, БИ-10-3572, Дубна, 1967 г.
32. *A.M. Chops*
Preprint CERN, 63-23 (1963)
33. *F.T. Solmitz, A.D. Johnson, T.B. Day.*
UCRL, P-117, Berkeley, California, (1966).
34. АСП - Программа обработки наблюдений в водородной камере.
ИТЭФ, Препринт 428, Москва, 1966 г.
35. *W.G. Moozhead*
CERN, DD/DP/67/6, October 1967.
36. И.М.Грменицкий, Л.А.Тихонова, Г.В.Пляшников.
Препринт ОИЯИ, Р-2146, Дубна, 1965 г.
37. Н.А.Буздавина и др.
Препринт ОИЯИ, № 2095 (1965 г.) и № 2755 (1966 г.), Дубна,
38. *V. Mozoz*
CERN, DD/DP/68/1, May 1968.
39. *L. Behr and P. Mittner*
Nuclear Instruments and Methods, v20, p446, (1963).
40. Г.И.Макаренко, В.И.Мороз, И.С.Святков, А.П.Стельмах.
Препринт ОИЯИ, Р10-3737, Дубна, 1968 г.
41. Г.И.Макаренко, В.И.Мороз, И.С.Святков, А.П.Стельмах.
Препринт ОИЯИ, Р10-3575, Дубна, 1967 г.
42. В.И.Мороз, А.В.Никитин, Ю.А.Троян, Б.А.Шахбазян.
ЯФ, т. 6, вып. I, 1967 г.

43. Е.С.Левитип, Б.Т.Поляк.
ХВМ и МФ, т. 6, № 5, 1966 г.
44. С.Н.Соколов, И.Н.Силин.
Препринт ОИЯИ, Д-810, Дубна, 1961.
И.Н.Силин.
Препринт ОИЯИ, II-3362, Дубна, 1967.
45. В.И.Мороз.
Препринт ОИЯИ, Р-1958, Дубна, 1965 г.
46. В.И.Мороз, А.В.Никитин, А.И.Родионов, Д.А.Троян.
Препринт ОИЯИ, Р1-3145, Дубна, 1967 г.
47. В.И.Мороз, А.В.Никитин, Ю.А.Троян.
Препринт ОИЯИ, Р1-3881, Дубна, 1968 г.
48. В.Г.Гришин и др.
Препринт ОИЯИ, Р1-3677, Дубна, 1968.
49. В.Г.Гришин, М.Иреш, А.Г.Кривенцова, М.М.Муминов, З.Триа.
Препринт ОИЯИ, Р11-3462, Дубна, 1967 г.
50. Б.А.Шахбазян.
Сборник "Вопросы физики элементарных частиц", Ереван, 1964.
51. В.Ф.Вишневский, В.И.Мороз, Б.А.Шахбазян, Янь У-гуан.
Препринт ОИЯИ, Р-2215, Дубна, 1965 г.
52. В.Ф.Вишневский, Ду Юань-цай, В.И.Мороз, А.В.Никитин,
Ю.А.Троян, Цзян Шао-цзынь, Чжан Вэнь-пй, Б.А.Шахбазян,
Янь У-гуан.
ЯФ, т. 3, вып. 4, 1966 г.

53. C. Besliu, T. Besliu, A. Constantinescu, M. Gavrilas, A. Mihul,
 M. Gheorgdanescu, N. Hangea, L. Pascu, I. Tira, M. Teleman,
 V. Kaznauhov, V. Moroz, L. Nefedeva.
 C.R. Acad. Sc. Paris, t. 265, p. 1350-1353, (1967), Serie B.

54. В.Ф.Вишневский, В.И.Мороз, Б.А.Шехбазян.
 Письма ЖЭТФ, т. 5, 307, (1967).

55. B. A. Shahbazian, V. I. Moroz.
 Preprint JINR, E1-4020, Dubna, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
 18 октября 1968 года.

Таблица I

Определение параметров треков в начальном приближении.

№ пп	Генератор		Характеристики магнитного поля				Начальное приближение		
	R_0 МэВ с	α_0 рад	S см	D кГс	H кГс	H' кГс/см	$\hat{P}-P_0$ МэВ с	$\hat{\alpha}-\alpha_0$ рад	$\hat{\beta}-\beta_0$ рад
1	800	-3/8	30	2,6197	-21,8443	0,1711	3,0	0,0043	0,0005
2	800	0	30	2,2262	-14,5271	0,0155	1,1	-0,0002	0,0002
3	800	3/8	30	3,9721	-3,8471	-0,4837	-3,1	-0,0019	0,0001
4	800	-2/8	50	3,0195	-19,0134	0,0970	-0,6	0,0034	0,0015
5	800	0	50	2,2254	-14,5302	0,0220	-1,0	-0,0001	0,0008
6	800	2/8	50	4,7367	-8,3430	-0,1851	-2,3	0,0033	0,0006
7	800	-1/8	80	2,6203	-16,6213	0,0624	-10,0	0,0040	0,0054
8	800	0	80	2,2289	-14,5227	0,0136	1,5	0,0008	0,0035
9	800	1/8	80	3,9754	-11,8114	-0,0634	-0,2	0,0041	0,0015
10	800	0	100	1,8757	-14,7540	0,0046	-7,4	-0,0056	0,0094
11	2000	0	100	2,2257	-14,5297	0,0094	3,1	-0,0007	-0,0001
12	10000	0	100	2,2252	-14,5335	0,0089	7,0	-0,0001	0,0000
13	800	-3/8	30	0,0004	-17,0109	0,1021	5,9	0,0039	0,0001
14	800	0	30	0,2009	-15,9535	-0,0724	3,6	-0,0021	0,0002
15	800	3/8	30	1,8554	-10,0536	-0,5192	1,5	-0,0051	-0,0006
16	800	-2/8	50	0,0008	-17,4192	0,0532	1,9	-0,0024	0,0011
17	800	0	50	0,2803	-15,6828	-0,0608	0,5	-0,0041	0,0010
18	800	2/8	50	2,1287	-11,0105	-0,3053	9,3	-0,0066	0,0002
19	800	-1/8	80	0,0051	-16,8903	-0,0177	-0,1	-0,0043	-0,0013
20	800	0	80	0,0119	-15,0034	-0,0675	5,4	-0,0083	0,0020
21	800	1/8	80	0,4478	-12,4531	-0,1360	6,1	-0,0029	0,0030
22	800	0	100	0,2417	-15,3406	-0,0466	-1,0	-0,0021	0,0066
23	2000	0	100	0,0563	-14,8046	-0,0665	49,1	-0,0044	-0,0001
24	10000	0	100	0,0547	-14,8047	-0,0678	234,0	-0,0008	0,0000

Треки протонов генерировались /20/ в магнитном поле 2-м пропеллерной камерой /26,27/ без учета многократного рассеяния и измерительных ошибок. Параметры \hat{P} , $\hat{\beta}$ определялись по формулам /8/, /10/ соответственно.

Магнитное поле аппроксимировалось параболой по трем точкам. В случаях 23,24 изменение магнитного поля вдоль трека плохо описывается квадратичной параболой.

$$H = (H_x \cos\beta + H_y \sin\beta) \operatorname{tg}\alpha - H_z, \quad H' = \left(\frac{\partial H_x}{\partial S} \cos\beta + \frac{\partial H_y}{\partial S} \sin\beta \right) \operatorname{tg}\alpha - \frac{\partial H_z}{\partial S},$$

$$D = (H_x \cos\beta + H_y \sin\beta), \quad S - \text{дуга трека.}$$

Таблица 2

Влияние начального приближения на точность определения оптимальных оценок параметров.

Генератор	Начальные значения						Оптимальная оценка			
	P_0 Мэв/с	α_0 рад.	β_0 рад.	S см	P Мэв/с	α рад.	β рад.	$tg\alpha$	P Мэв/с	β рад.
1	800	$\pi/8$	$\pi/2$	80	800	$\pi/8$	$\pi/2$	0,4141	800,1	1,5707
2	800	$\pi/8$	$\pi/2$	80	825	$\pi/8+0,05$	$\pi/2+0,05$	0,4144	799,3	1,5707
3	800	$\pi/8$	$\pi/2$	80	775	$\pi/8-0,05$	$\pi/2-0,05$	0,4139	798,6	1,5705
4	1000	$\pi/8$	$\pi/2$	100	1000	$\pi/8$	$\pi/2$	0,4141	999,9	1,5707
5	1000	$\pi/8$	$\pi/2$	100	1050	$\pi/8+0,05$	$\pi/2+0,05$	0,4145	999,0	1,5707
6	1000	$\pi/8$	$\pi/2$	100	950	$\pi/8-0,05$	$\pi/2-0,05$	0,4138	998,2	1,5707
7	10000	$\pi/8$	$\pi/2$	100	10000	$\pi/8$	$\pi/2$	0,4142	9997,5	1,5708
8	10000	$\pi/8$	$\pi/2$	100	10500	$\pi/8+0,05$	$\pi/2+0,05$	0,4142	10008,1	1,5708
9	10000	$\pi/8$	$\pi/2$	100	9500	$\pi/8-0,05$	$\pi/2-0,05$	0,4142	10010,5	1,5708

Генерировались треки протонов с 21 равномерно расположенной точкой в неоднородном магнитном поле 2-м пропановой камеры без учета многократного рассеяния и измерительных ошибок.

Начальные значения параметров задавались соответствующими генератору и смещенными.

В блоке определения оптимальных оценок делалась одна итерация.

Таблица 3

Уменьшение ошибок параметров с увеличением информации о треке.

S	25 см (6 точек)	50 см (11 точек)	100 см (21 точка)	145 см (30 точек)
$\Delta P \frac{M_{20}}{c}$	287,0	145,9	90,2	73,6
$(\Delta\beta)^2$ (рад) ²	$0,955 \cdot 10^{-5}$	$0,222 \cdot 10^{-5}$	$0,203 \cdot 10^{-5}$	$0,201 \cdot 10^{-5}$
$(\Delta tg\alpha)^2$	$0,955 \cdot 10^{-5}$	$0,550 \cdot 10^{-5}$	$0,545 \cdot 10^{-5}$	$0,545 \cdot 10^{-5}$

Величины ΔP , $(\Delta\beta)^2$, $(\Delta tg\alpha)^2$ получены при об-
 счёте точного трека (π - мезон, $P = 2750$ Мэв/с, $tg\alpha = 0$,
 $\beta = \frac{\pi}{2}$, 2-м пропановой камера) с учетом матрицы кулоновского
 рассеяния при различных длинах S .

Из таблицы видно, что с увеличением длины трека S
 ошибки величин P , β , $tg\alpha$ уменьшаются. При S боль-
 ших $S_{опт}$ ошибки β и $tg\alpha$ уменьшаются медленно.

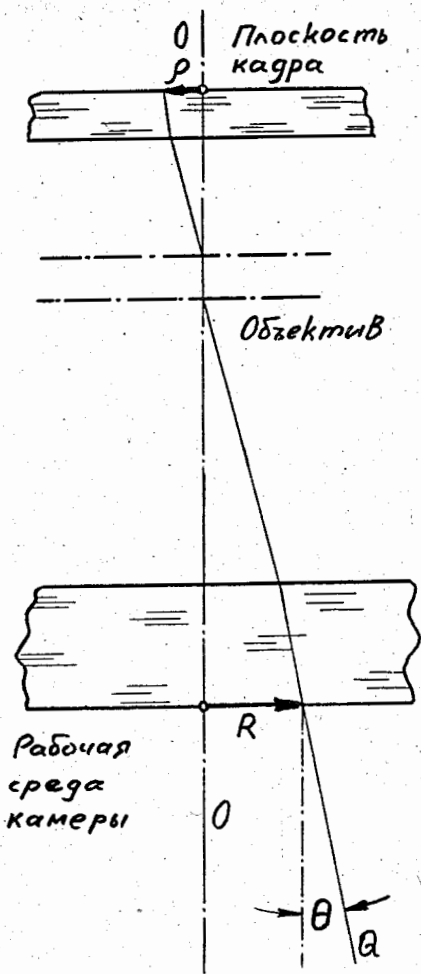


Рис. 1. Математическое описание оптической системы.

OO - оптическая ось,

α - линия проектирования,

$$R(\rho) = \rho K \psi(\rho), \quad \operatorname{tg} \theta = \rho K_1 \psi_1(\rho),$$

где

$$K = \left. \frac{dR}{d\rho} \right|_{\rho=0}, \quad \psi(\rho) \approx 1 + \frac{K^{-1}}{3!} \left. \frac{d^3 R}{d\rho^3} \right|_{\rho=0},$$

$$K_1 = \left. \frac{d \operatorname{tg} \theta}{d\rho} \right|_{\rho=0}, \quad \psi_1(\rho) \approx 1 + \frac{K_1^{-1}}{3!} \left. \frac{d^3 \operatorname{tg} \theta}{d\rho^3} \right|_{\rho=0}.$$

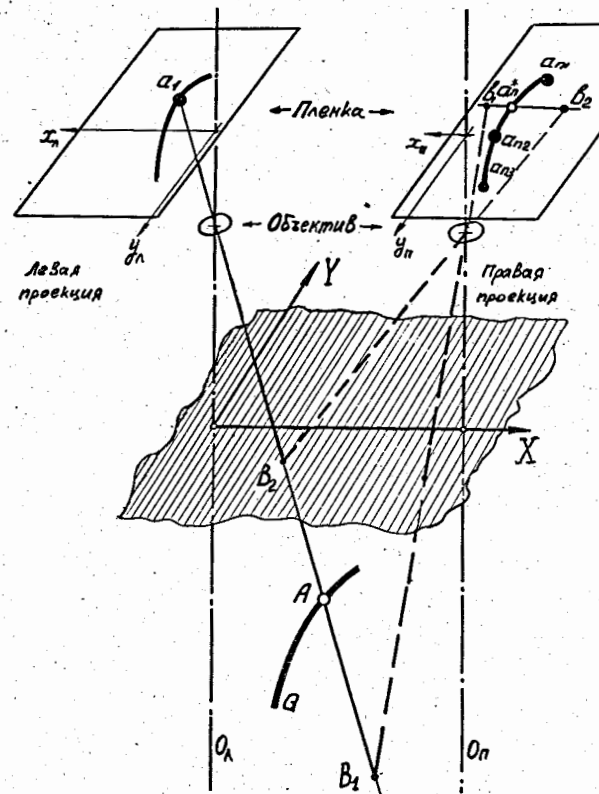


Рис. 2. Схема определения квазисоответствующей точки α^*

O_n, O_p - оси левой и правой стереофотокамеры

XOY - нижняя поверхность верхнего стола пузырьковой камеры

$\alpha_n, \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}$ - измеренные точки на проекциях следа α

B_1, B_2 - прямая, проектирующаяся в точку α_n

b_1, b_2 - проекция B_1, B_2 на правый кадр, иначе, образ точки α_n на правом кадре.

α^* лежит на пересечении b_1, b_2 с параболой, аппроксимирующей точки $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}$

A - пространственная точка, проектирующаяся в α_n и α_p^* .