

К-245
7/10 67

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

10 - 3635



ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

В.М.Карнаухов, В.И.Мороз, Н.Г.Фадеев
Ш.С.Шошиашвили

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО
ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ПЕРВОНАЧАЛЬНОГО НАПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ
ЗАРЯЖЕННОЙ НЕИЗЛУЧАЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ
В ПУЗЫРЬКОВЫХ КАМЕРАХ БЕЗ МАГНИТНОГО
ПОЛЯ

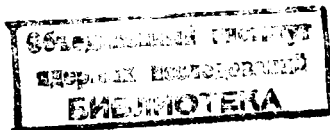
1967.

10 - 3635

В.М.Карнаухов, В.И.Мороз, Н.Г.Фадеев
Ш.С.Шошашвили*

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО
ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ПЕРВОНАЧАЛЬНОГО НАПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ
ЗАРЯЖЕННОЙ НЕИЗЛУЧАЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ
В ПУЗЫРЬКОВЫХ КАМЕРАХ БЕЗ МАГНИТНОГО
ПОЛЯ

* Тбилисский государственный университет



Для реального случая измеренных координат частицы, движущейся в рассеивающей среде, рассматривается задача наилучшей оценки углов α , β методом максимального правдоподобия, где α и β - углы, определяющие направление частицы в пространстве (см. рис.1). Пространственные координаты точек трека предполагаем измеренными независимо друг от друга.

Задача решается в два этапа.

В первом приближении за первоначальное направление трека принимаем прямую, проведенную по методу наименьших квадратов через первые N^* точек ($N^* \leq N$, где N - число измеренных точек на треке).

За N^* -ю точку принимается точка, лежащая в той части трека, где кратное рассеяние приводит к резкому изменению направления частицы.

На втором этапе направляем одну из координатных осей по этой прямой. Теперь можем записать каждую измеренную координату на следе как функцию первоначального направления, случайных ошибок измерений и независимых случайных величин от многократного рассеяния. Это дает возможность построить функционал, минимизация которого определит искомые параметры. Эта процедура близка к использованной в работах /1-3/.

1. Рассмотрим подробно выкладки первого этапа. Обозначим через ℓ , μ , ν интересующие нас направляющие косинусы искомой прямой:

$$l = \cos \beta \cos \alpha,$$

$$m = \sin \beta \cos \alpha, \quad (1)$$

$$n = \sin \alpha.$$

Вспомогательный функционал запишем в виде:

$$\sum_{i=0}^{N^*} [(\bar{x}_i - l s_i)^2 + (\bar{y}_i + m s_i)^2 + (\bar{z}_i - n s_i)^2] = Q^2, \quad (2)$$

где

$$\bar{x}_i = x_i - x_0,$$

$$\bar{y}_i = y_i - y_0,$$

$$\bar{z}_i = z_i - z_0,$$

$$s_i = (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2 + \bar{z}_i^2)^{1/2}.$$

Система уравнений, соответствующая условиям экстремума Q^2 , имеет следующий вид:

$$\frac{\partial Q^2}{\partial \beta} = \sum_i (\bar{x}_i s_i \sin \beta \cos \alpha, -\bar{y}_i \cos \beta \cos \alpha s_i) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial Q^2}{\partial \alpha} = \sum_i (\bar{x}_i s_i \cos \beta \sin \alpha + \bar{y}_i s_i \sin \beta \sin \alpha - \bar{z}_i s_i \cos \alpha) = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sum_i \bar{y}_i s_i}{\sum_i \bar{x}_i s_i}, \quad (4)$$

$$\cos \beta \sum_i \bar{x}_i s_i + \sin \beta \sum_i \bar{y}_i s_i = \operatorname{ctg} \alpha \sum_i \bar{z}_i s_i,$$

откуда:

$$\cos \beta = (\sum_1 \bar{x}_1 s_1) / [(\sum_1 \bar{x}_1 s_1)^2 + (\sum_1 \bar{y}_1 s_1)^2]^{1/2},$$

$$\sin \beta = (\sum_1 \bar{y}_1 s_1) / [(\sum_1 \bar{x}_1 s_1)^2 + (\sum_1 \bar{y}_1 s_1)^2]^{1/2}, \quad (5)$$

$$\sin \alpha = (\sum_1 \bar{z}_1 s_1) / [(\sum_1 \bar{x}_1 s_1)^2 + (\sum_1 \bar{y}_1 s_1)^2 + (\sum_1 \bar{z}_1 s_1)^2]^{1/2}.$$

где

$$0 \leq \beta \leq 2\pi, \quad -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2.$$

Полученные ℓ , m , n определяют направление трека в первом приближении.

2. Перейдем к уточненному определению направления трека с учетом многократного рассеяния. Сделаем переход из лабораторной системы 1 в систему координат II, где ось OY совпадает с найденным направлением прямой. В системе II координаты \bar{x}_1 и \bar{z}_1 можно представить в виде:

$$\bar{x}_{0\alpha} = T_{0x} + \epsilon_0,$$

$$\bar{x}_{1\alpha} = T_{0x} + \epsilon_1 + A_x \Delta s_1 + \frac{1}{2} \delta_1 \Delta s_1 + \eta_1,$$

$$\bar{x}_{2\alpha} = T_{0x} + \epsilon_2 + A_x (\Delta s_1 + \Delta s_2) + \delta_1 \left(\frac{1}{2} \Delta s_1 + \Delta s_2 \right) + \frac{1}{2} \delta_2 \Delta s_2 + \eta_1 + \eta_2, \quad (6)$$

$$\bar{x}_{i\alpha} = T_{0x} + \epsilon_i + A_x \sum_{j=1}^i \Delta s_j + \sum_{k=1}^i \left(\sum_{\kappa=k}^i \Delta s_{\kappa} - \frac{1}{2} \Delta s_k \right) \delta_k + \sum_{j=1}^i \eta_j,$$

здесь

T_{0x} - истинное значение \bar{x} -й координаты в начальной точке;

ϵ_i - измерительная ошибка в координате \bar{x}_i ;

δ_i - проекция на плоскость \bar{XOY} угла многократного рассеяния на интервале между точками $i-1$ и i (i -й интервал);

η_i - превышение смещения в многократном рассеянии на i -том интервале над средним при заданном δ_i ;

Δs_i - текущий параметр (длина проекции траектории на ось $O\bar{Y}$);

A_x - тангенс угла между осью $O\bar{Y}$ и проекцией импульса частицы в начальной точке на плоскость $\bar{XO}\bar{Y}$ (рис.2).

В работе^{/1/} показано, что δ_i и η_i являются независимыми стохастическими переменными.

Запишем систему (6) для точек i и g в виде:

$$[\bar{x}_{i0} - T_{0x} - A_x \sum_{j=1}^i \Delta s_j] = \epsilon_i + \sum_{k=1}^i (\sum_{\kappa=k}^i \Delta s_{\kappa} - \frac{1}{2} \Delta s_k) \delta_k + \sum_{j=1}^i \eta_j, \quad (7)$$

$$[\bar{x}_{g0} - T_{0x} - A_x \sum_{j=1}^g \Delta s_j] = \epsilon_g + \sum_{k=1}^g (\sum_{\kappa=k}^g \Delta s_{\kappa} - \frac{1}{2} \Delta s_k) \delta_k + \sum_{j=1}^g \eta_j.$$

Теперь можно записать выражение для матрицы, учитывающей как ошибки измерения, так и многократное рассеяние:

$$\sigma_{ig} = \epsilon_i^2 \delta_{ig} + \sum_{k=\min(i,g)}^{\max(i,g)} [(\sum_{\kappa=k}^i \Delta s_{\kappa} - \frac{1}{2} \Delta s_k)(\sum_{\kappa=k}^g \Delta s_{\kappa} - \frac{1}{2} \Delta s_k) \delta_k^2 + \eta_k^2], \quad (8)$$

где /4/

$$\delta_k^2 = \frac{1}{2} D \Delta s_k,$$

$$\eta_k^2 = \frac{1}{24} D (\Delta s_k)^3, \quad (9)$$

$$D = \left(\frac{21 \cdot 2}{\rho \beta} \right)^2 \frac{1}{x_0},$$

x_0 - радиационная длина.

Используя формулы перехода из одной системы координат в другую, находим

$$\overline{\epsilon_{ix}^2} = \frac{m^2}{\ell^2 + m^2} (\overline{\Delta x})^2 + \frac{\ell^2}{\ell^2 + m^2} (\overline{\Delta y})^2 + 2 \frac{\ell m}{\ell^2 + m^2} (\overline{\Delta x})(\overline{\Delta y}),$$

$$\overline{\epsilon_{iy}^2} = \ell^2 (\overline{\Delta x})^2 + m^2 (\overline{\Delta y})^2 + n^2 (\overline{\Delta z})^2 + 2 \ell m (\overline{\Delta x})(\overline{\Delta y}) + 2 \ell n (\overline{\Delta x})(\overline{\Delta z}).$$

$$\overline{\epsilon_{ix}^2} = \frac{\ell^2 n^2}{\ell^2 + m^2} (\overline{\Delta x})^2 + \frac{m^2 n^2}{\ell^2 + m^2} (\overline{\Delta y})^2 + (\ell^2 + m^2) (\overline{\Delta z})^2$$

$$+ 2 \frac{\ell m n^2}{\ell^2 + m^2} (\Delta x)(\Delta y) - 2 \ell n (\Delta x)(\Delta z).$$

Дисперсии и корреляции величин x , y , z приведены в приложении 1.

Зная матрицу σ , можно записать следующий функционал:

$$\chi^2 = \sum_{i,q}^{N^*} [x_i - T_{0x} - A_x (\sum_{j=1}^i \Delta s_j)] \sigma_{iq}^{-1} [x_q - T_{0x} - A_x (\sum_{j=1}^q \Delta s_j)]. \quad (10)$$

Минимизация этого функционала по переменным T_{0x} и A_x приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} \sum_{i,q} \sigma_{iq}^{-1} \{ \overline{x_i} + \overline{x_q} - 2T_{0x} - A_x (\sum_{j=1}^i \Delta s_j + \sum_{j=1}^q \Delta s_j) \} &= 0, \\ \sum_{i,q} \sigma_{iq}^{-1} \{ (\sum_{j=1}^i \Delta s_j) [\overline{x_q} - T_{0x} - A_x (\sum_{j=1}^q \Delta s_j)] + & \\ + (\sum_{j=1}^q \Delta s_j) [\overline{x_i} - T_{0x} - A_x (\sum_{j=1}^i \Delta s_j)] \} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Решая эту систему относительно T_{0x} и A_x , получаем:

$$\begin{aligned} T_{0x} &= \frac{b_2 c_{1x} - b_1 c_{2x}}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \\ A_x &= \frac{a_1 c_{2x} - a_2 c_{1x}}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{i,q} \sigma_{iq}^{-1}, \\ b_1 &= \sum_{i,q} \sigma_{iq}^{-1} (\sum_{j=1}^i \Delta s_j), \\ a_2 &= b_1, \end{aligned} \quad (12)$$

$$b_{2z} = \sum_{i,q} \sigma_{iq}^{-1} \left(\sum_{j=1}^q \Delta s_j \right) \left(\sum_{j=1}^q \Delta s_j \right), \quad (12)$$

$$c_{1z} = \sum_{i,q} \sigma_{iq}^{-1} \bar{x}_{i\theta}$$

$$c_{2z} = \sum_{i,q} \sigma_{iq}^{-1} \left(\sum_{j=1}^q \Delta s_j \right) \bar{x}_{i\theta}$$

Рассматривая многократное рассеяние и измерительные ошибки в плоскости \bar{ZOY} , перпендикулярной ранее рассмотренной плоскости \bar{XOY} , получим для A_x и T_{0x} формулы, аналогичные (12), а именно:

$$T_{0x} = \frac{b_2 c_{1z} - b_1 c_{2z}}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

$$A_x = \frac{a_1 c_{2z} - a_2 c_{1z}}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

где

$$c_{1z} = \sum_{i,q} \sigma_{iq}^{-1} \bar{z}_{i\theta}$$

$$c_{2z} = \sum_{i,q} \sigma_{iq}^{-1} \left(\sum_{j=1}^q \Delta s_j \right) \bar{z}_{i\theta}$$

Здесь $A_x = \text{tg } \alpha_1$, $A_z = \text{tg } \alpha_2$ (рис.2), где углы α_1 и α_2 определяют первоначальное направление трека в новой системе координат II;

$$\ell_T = A_x / (1 + A_x^2 + A_z^2)^{1/2},$$

$$m_T = 1 / (1 + A_x^2 + A_z^2)^{1/2}, \quad (13)$$

$$n_T = A_z / (1 + A_x^2 + A_z^2)^{1/2}.$$

Используя формулы обратного перехода от системы II в лабораторную систему I, находим направляющие косинусы трека ℓ_0 , m_0 , n_0 в системе I:

$$\ell_0 = \frac{m}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} \ell_T + \ell m_T - \frac{\ell n}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} n_T,$$

$$m_0 = -\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} \ell_T + m m_T - \frac{m n}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} n_T, \quad (14)$$

$$n_0 = n m_T + \sqrt{\ell^2 + m^2} n_T.$$

Подставляя в (14) формулы (1), найдем связь ℓ_0 , m_0 , n_0 с углами α и β .

На рис.3 приводится зависимость среднеквадратичных ошибок $\sigma_\beta, \sigma_\alpha$ (см.Пр.2) азимутального β - и полярного α - углов от начальной энергии π - мезонов, от взаимного расположения точек на треке и их количества. В качестве среды рассмотрен жидкий ксенон ($\tau_0 = 8.12 \text{ г/см}^2$). По оси абсцисс отложены расстояния между точками в долях оптимальной ячейки (см. Приложение 3). Ввиду различия ошибок пространственных координат ($D_x = D_y \neq D_z$) эти зависимости представлены для различных положений трека в камере (рис.3а, 3б). Так как $D_x = D_y$, то при фиксированном угле наклона трека к оптической оси (ось OZ) величины σ_α и σ_β не зависят от ориентации трека в азимутальной плоскости.

Пунктирные линии на рис.3 соответствуют двухточечным измерениям, сплошные - измерениям по 5 точкам.

На рис.4 изображены зависимости величин σ_β и σ_α как функции количества точек и их расположения на треке. Точки на следе распределяются следующим образом: задается определенное расстояние между 1 и 2 точками, после которого точки располагаются на одинаковых расстояниях друг от друга.

Результаты расчетов показывают, что применение метода максимального правдоподобия для определения направления трека обеспечивает:

1. Уменьшение погрешностей в оценках независимых углов σ_α и σ_β по сравнению с двухточечными измерениями (рис.3);
2. Наличие плато в зависимости величин σ_α и σ_β от количества точек и их взаимного расположения (рис.4).

В заключение мы выражаем благодарность Э.И.Мальцеву за постоянный интерес к работе и полезные советы.

П р и л о ж е н и е 1

Определение дисперсий и корреляций восстановленных пространственных координат точке трека

Для восстановления пространственных координат воспользуемся формулами из работы ^{/3/}:

$$z = \frac{V_{\text{п}} - V_{\text{л}} - (x_{\text{лэ}} k_{\text{л}} \psi_{\text{л}} - x_{\text{пэ}} k_{\text{п}} \psi_{\text{п}})}{x_{\text{лэ}} k_{\text{л}} \psi_{\text{л}} - x_{\text{пэ}} k_{\text{п}} \psi_{\text{п}}},$$

$$x = z x_{\text{лэ}} k_{\text{л}} \psi_{\text{л}} + x_{\text{лэ}} k_{\text{л}} \psi_{\text{л}} + V_{\text{л}}, \quad (1-П1)$$

$$y = \frac{y_{\text{лэ}} + y_{\text{пэ}}}{\frac{1}{A_{\text{л}}} + \frac{1}{A_{\text{п}}}} + c.$$

Рассматривая почти тождественные объективы и хорошо исправленные оптические системы, где

$$k_{\text{л}} = k_{\text{п}} = k_1,$$

$$k_{\text{л}} = k_{\text{п}} = k,$$

$$\psi_{\text{л}} = \psi_{\text{п}} = \psi_{\text{л}} = \psi_{\text{п}} = 1,$$

$$A_{\text{л}} = A_{\text{п}} = z k_1 \psi_{\text{л}} + k \psi_{\text{п}} = z k_1 + k,$$

выишем формулы (1-П1) в виде:

$$z = \frac{V_{\text{п}} - V_{\text{л}}}{k_1 (x_{\text{л}} - x_{\text{п}})} - \frac{k}{k_1}$$

$$x = x_{\text{л}} (z k_1 + k) + V_{\text{л}}$$

$$y = \frac{1}{2} (z k_1 + k) (y_{\text{л}} + y_{\text{п}}) + c.$$

В этом случае дисперсии и ковариации величины x, y, z равны:

$$\begin{aligned} \overline{(x' - x)^2} &= \frac{\sigma^2 (B_{\Pi} - B_{\text{Л}})^2 (x_{\text{Л}} + x_{\Pi})^2}{(x_{\text{Л}} - x_{\Pi})^4}, \\ \overline{(z' - z)^2} &= \frac{2 \sigma^2 (B_{\text{Л}} - B_{\Pi})^2}{k_1^2 (x_{\text{Л}} - x_{\Pi})^4}, \\ \overline{(y' - y)^2} &= \frac{\sigma^2 (B_{\text{Л}} - B_{\Pi})^2 [(x_{\text{Л}} - x_{\Pi})^2 + (y_{\text{Л}} + y_{\Pi})^2]}{2 (x_{\text{Л}} - x_{\Pi})^4}, \\ \overline{(x' - x)(z' - z)} &= \frac{\sigma^2 (B_{\text{Л}} - B_{\Pi})^2 (x_{\text{Л}} + x_{\Pi})}{k_1 (x_{\text{Л}} - x_{\Pi})^4}, \\ \overline{(x' - x)(y' - y)} &= \frac{\sigma^2 (B_{\text{Л}} - B_{\Pi})^2 (x_{\text{Л}} + x_{\Pi})(y_{\text{Л}} + y_{\Pi})}{2 (x_{\text{Л}} - x_{\Pi})^4}, \\ \overline{(y' - y)(z' - z)} &= \frac{(B_{\text{Л}} - B_{\Pi})^2 (y_{\text{Л}} + y_{\Pi}) \sigma^2}{k_1 (x_{\text{Л}} - x_{\Pi})^4}, \end{aligned}$$

или, выражая величины через пространственные координаты с помощью (2-П1), получаем окончательно:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\sigma^2 (z k_1 + k)^2 [(x - B_{\text{Л}})^2 + (x - B_{\Pi})^2]}{(B_{\Pi} - B_{\text{Л}})^2}, \\ D_y &= \frac{2 \sigma^2 (z k_1 + k)^2 [(B_{\text{Л}} - B_{\Pi})^2 + 4 (y_{\text{Л}} + y_{\Pi})^2]}{2 \cdot (B_{\text{Л}} - B_{\Pi})^2}, \\ D_z &= \frac{2 \sigma^2 (z k_1 + k)^4}{k_1^2 (B_{\text{Л}} - B_{\Pi})^2}, \end{aligned} \quad (3-П1)$$

$$\frac{\overline{\sigma^2}^2 (2x - B_{\Pi} - B_{\text{Л}})(zk_1 + k)^3}{k_1 (B_{\text{Л}} - B_{\text{П}})^2},$$

$$\frac{\overline{\sigma^2}^2 (2x - B_{\Pi} - B_{\text{Л}})(zk_1 + k)^2 (y - c)}{(B_{\text{Л}} - B_{\text{П}})^2}, \quad (3-П1)$$

$$\frac{\overline{\sigma^2}^2 (y - c)(zk_1 + k)^3}{k_1 (B_{\text{Л}} - B_{\text{П}})^2}.$$

где $\overline{\sigma^2} \overline{\sigma^2} = \overline{\sigma^2} - \overline{\sigma^2}$ - измерительная ошибка на пленке.

Приложение 2

Численная оценка дисперсии величины А в системе П

Из уравнений связи видно (6), что дисперсии величин А и T₀ определяются величинами $\epsilon_1, \eta_1, \delta_1$:

$$\sigma_A^2 = \sum_{k=0}^{N^*} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \delta_k} \right)^2 \delta_k^{-2} + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta_k} \right)^2 \eta_k^{-2} + \left(\frac{\partial A}{\partial \epsilon_k} \right)^2 \epsilon_k^{-2} \right], \quad (1-П2)$$

для T₀ - аналогично.

Выражения для производных имеют вид:

$$\frac{\partial A}{\partial \delta_k} = \sum_{i=k}^{N^*} \sum_{q=1}^{N^*} \sigma^{-1} \left(\sum_{i^q} \Delta s_{\kappa} - \frac{1}{2} (\Delta s_{\kappa}) \right) \left(d \sum_{j=1}^q \Delta s_j - f \right),$$

$$\frac{\partial A}{\partial \eta_k} = \sum_{i=k}^{N^*} \sum_{q=1}^{N^*} \sigma^{-1} \left(d \sum_{i^q} \Delta s_j - f \right),$$

$$\frac{\partial A}{\partial \epsilon_k} = \sum_{q=1}^{N^*} \sigma^{-1} \left(d \sum_{k^q} \Delta s_j - f \right),$$

где $d = a_1 / \Delta, f = b_1 / \Delta, \Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$ (см. (12)).

(При вычислении дисперсии величины T₀ следует положить $d = b_2 / \Delta$)

Определяя α и β из (1) и используя (13), (14), найдем выражения для среднеквадратичных ошибок углов α и β в лабораторной системе:

$$\sigma_{\beta}^2 = \frac{1}{(1-p^2)(1-p_0^2)^2 (1+A_x^2 + A_z^2)^3} \times$$

$$\times \{ [(\ell_0 m - \ell m_0)(n A_x - \sqrt{\ell^2 + m^2}) A_x - (\ell_0 \ell + m_0 m)(1 + A_x^2)]^2 \sigma_{A_x}^2 +$$

$$+ [(\ell_0 \ell + m_0 m) A_x A_z - (\ell_0 m - \ell m_0)(\sqrt{\ell^2 + m^2} A_x + n(1 + A_x^2))]^2 \sigma_{A_x}^2 \},$$

$$\sigma_{\alpha}^2 = \frac{1}{(1-p_0^2)(1+A_x^2 + A_z^2)^3} \{ [n A_x + \sqrt{\ell^2 + m^2} A_x A_z]^2 \sigma_{A_x}^2 + [\sqrt{\ell^2 + m^2}(1+A_x^2) - n A_x]^2 \sigma_{A_x}^2 \},$$

где $\sigma_{A_x}^2$, $\sigma_{A_z}^2$ определяются формулами (1-П2).

П р и л о ж е н и е 3

Из выражений, определяющих величины $\sigma_{A_x}^2$ (см. 1-П2), следует, что точность восстановления направления трека зависит от расположения точек на треке (зависимость от Δs_x), которое, в свою очередь, определяет вклад ошибок из-за многократного рассеяния и ошибок измерения.

Для выбора оптимального расстояния между точками трека для случая двухточечных измерений воспользуемся следующими рассуждениями.

Смещение первой точки трека определяется только измерительной ошибкой, т.е.

$$\Delta x_1^{-2} = \epsilon^{-2}.$$

Смещение второй точки будет определяться еще и смещением из-за кулоновского рассеяния, т.е.:

$$\Delta x_2^{-2} = \epsilon^{-2} + \frac{1}{6} D \Delta s_1^3,$$

где Δs_1 -расстояние между 1-ой и 2-ой точками, D - дается формулой (9). Среднее значение ошибки угла, определяемого по первым двум точкам, можно записать в виде:

$$\bar{\Delta b} = \frac{1}{\Delta s_1} \sqrt{2 \epsilon^{-2} + \frac{1}{6} D \Delta s_1^3}.$$

Из условия минимума ($\bar{\Delta b}$) находим

$$\Delta s_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{3}{D} 24 \epsilon^{-2}}. \quad (1-13)$$

Л и т е р а т у р а

1. Г.А.Емельяненко, К.П.Ломов, Г.И.Макаренко, В.И.Мороз, И.С.Сайтов, А.П.Стельмах. Определение методом максимума правдоподобия параметров заряженной частицы, движущейся в тормозящей рассеивающей среде, помещенной в неоднородное магнитное поле. Препринт ОИЯИ Р-2828, Дубна, 1986 г.
2. И.М.Граменицкий, Л.А.Тихонова, П.В.Шляпников. Новый метод учета кулоновского рассеивания при обработке камерных треков. Препринт ОИЯИ Р-2146, Дубна, 1985г.
3. И.М.Иванченко, Н.А.Круткова, В.И.Мороз, Т.Г.Останевич, Г.Н.Тентюкова. Восстановление пространственных координат точек треков по двум стереопроекциям. Препринт ОИЯИ Р-2889, Дубна, 1986г.
4. Д.Росси, К.Грейзен. Взаимодействие космических лучей с веществом. ИЛ, Москва, 1946 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 декабря 1987 года.

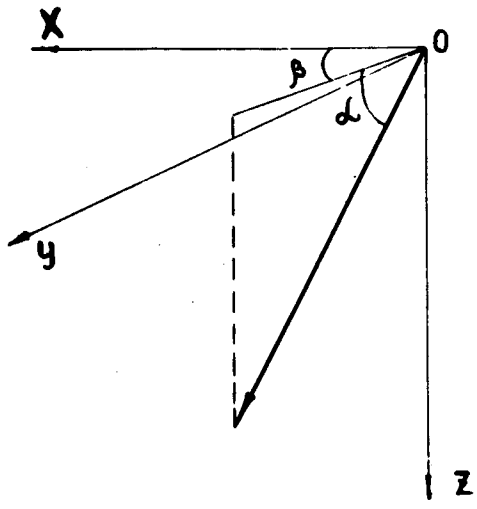


Рис.1. Определение углов α и β в лабораторной системе координат.

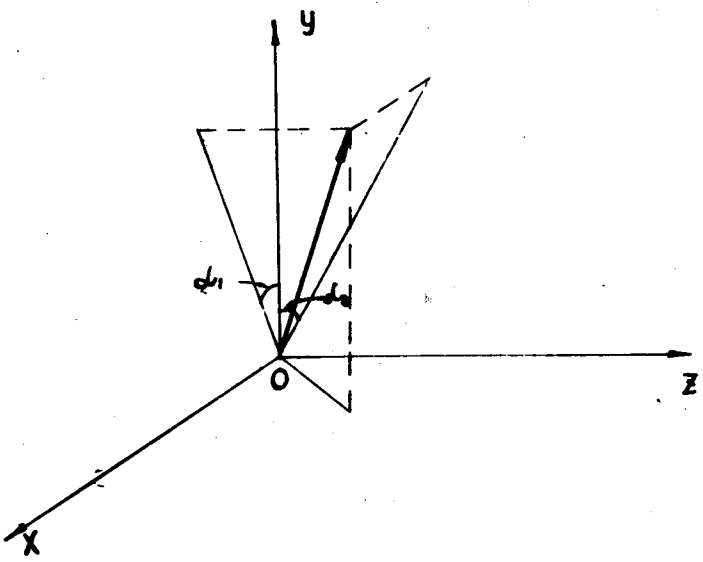


Рис.2. Система координат, в которой направление трека приблизительно совпадает с осью OY ; α_1, α_2 - углы между проекциями трека на координатные плоскости XOY , ZOY и осью OY , соответственно.

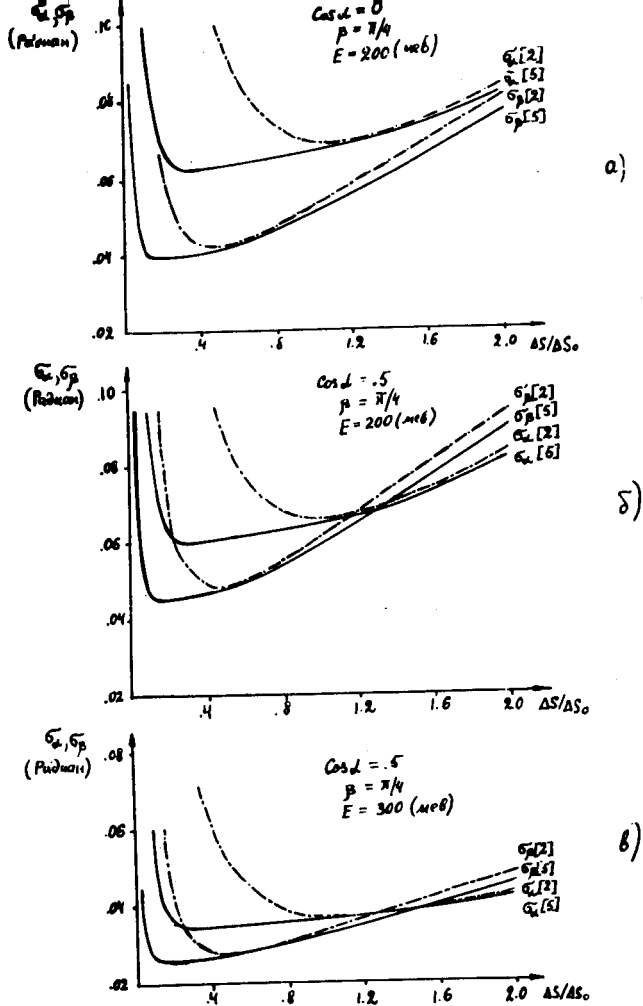


Рис.3. Зависимость среднеквадратичных ошибок углов α и β от числа измеренных точек на следе и расстояния между ними.

$\sigma_{\alpha} [2]$ - зависимость среднеквадратичной ошибки восстановления угла α при измерении на следе двух точек, расположенных друг от друга на расстоянии Δs .

$\sigma_{\alpha} [5]$ - зависимость среднеквадратичной ошибки восстановления угла α при измерении на следе пяти точек, расположенных друг от друга на расстоянии Δs .

$\sigma_{\beta} [2]$ - среднеквадратичные ошибки угла β .

$\sigma_{\beta} [5]$ для двух и пяти точек, измеренных на треке, соответственно.

β - начальная энергия π - мезона, тормозящегося в жидком ксеноне.

Δs_0 - оптимальная длина, определяемая формулой (1-ПЗ).

Рис.а), б), в) отличаются друг от друга энергией π - мезона и значением угла α .

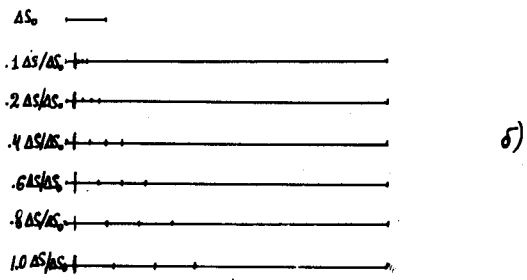
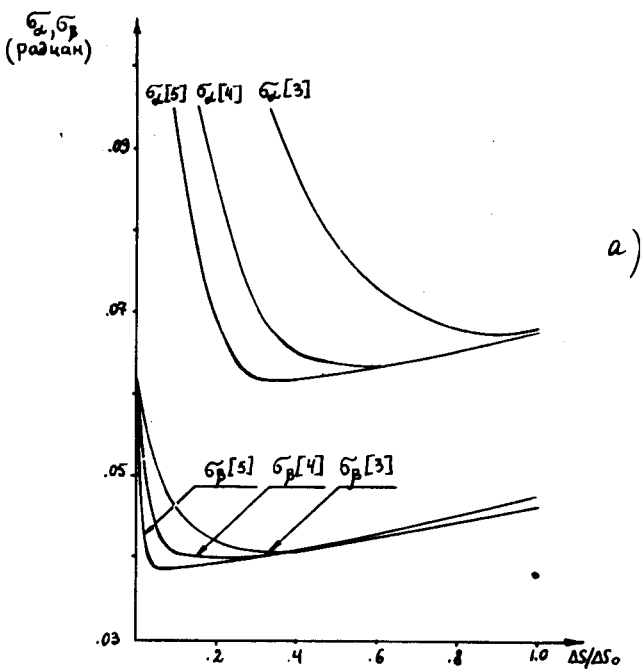
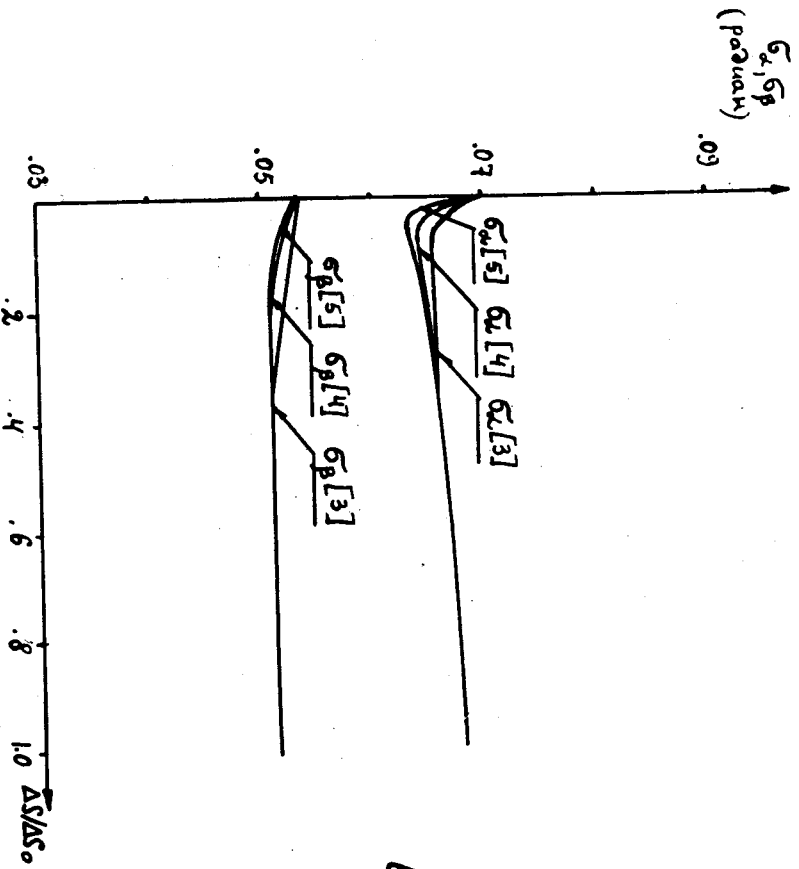


Рис.4. Зависимость среднеквадратичных ошибок углов β и α от числа измеренных точек и их взаимного расположения.

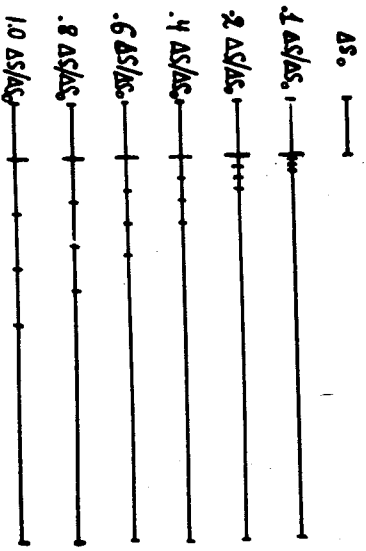
$\left. \begin{matrix} \sigma_{\beta} [i] \\ \sigma_{\alpha} [i] \end{matrix} \right\}$ - среднеквадратичные ошибки восстановления углов β и α при измерении на трекке " i " точек.

Δs - расстояние между точками,
 Δs_0 - оптимальная длина, определяемая формулой (1-ПЗ).
 Кривые на рис.4 рассчитаны для начальной энергии π -мезонов, равной 200 Мэв и $\alpha = \beta = 0$.

Рис.а),в),д) отличаются расстоянием между первой и второй точками на трекке.
 Взаимное расположение пяти точек на следе для случаев а),в),д) изображено на рис.б),г),е) соответственно.
 Взаимное расположение трех (четырех) точек на трекке аналогично расположению точек на рис.б),г),е), если в последних отбрасывать две (одну) точки.



6)



2)

Рис. 4. (продолжение)

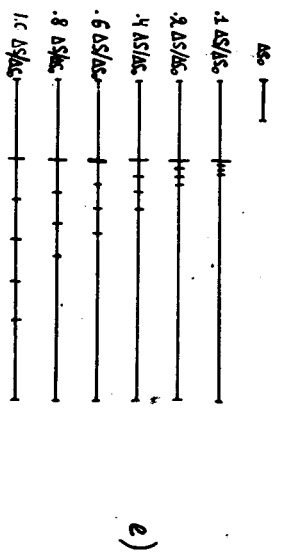
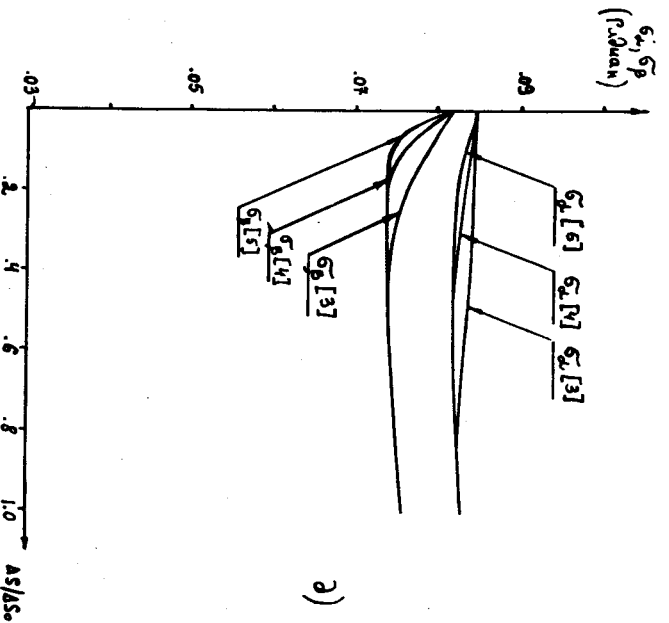


Рис.4. (продолжение)