



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

10-2002-155

Д-458

На правах рукописи
УДК 519.65; 519.245

ДИКУСАР
Николай Демьянович

**МЕТОДЫ 4-ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
В ЗАДАЧАХ АППРОКСИМАЦИИ И СГЛАЖИВАНИЯ
КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ**

Специальность: 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий
Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Евгений Александрович Гребеников

доктор физико-математических наук, профессор
Яков Михайлович Жилейкин

доктор физико-математических наук, профессор
Алексей Иванович Чуличков

Ведущая организация:

Институт физики высоких энергий, г. Протвино.

Защита диссертации состоится "18" октября.....2002г. на заседа-
нии диссертационного совета Д720.001.04 в Объединенном институте ядерных
исследований (Лаборатория информационных технологий),
141980, г. Дубна Московской области. В 14.00

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института
ядерных исследований.

Автореферат разослан "16" сентября..2002г.

Ученый секретарь совета
кандидат физико-математических наук

Иванченко

З.М. Иванченко

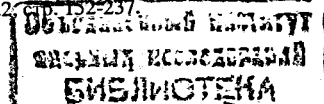
Актуальность проблемы

Теория приближений является краеугольным камнем в задачах анализа эмпи-
рических данных. Как самостоятельная ветвь математики она ведет начало с ра-
бот П.Л. Чебышева*, хотя отдельные вопросы о приближении функций рассмат-
ривались ранее Эйлером, Лапласом, Фурье, Гауссом, Лежандром и другими мате-
матиками 18 и 19 веков. В середине пятидесятих годов 20-го века широкое рас-
пространение в вычислительной практике получили различные "неклассические"
методы приближения, например, сглаживание сплайнами, кусочно-полиномиаль-
ными функциями и т.п. В этом направлении следует отметить труды следующих
авторов: Дж. Алберга (J.H. Ahlberg), К.В.Р. де Боора (C.W.R. de Boor), Ю.С. За-
вьялова, Н.Н. Калиткина, В. Кленшоу (W. Clenshow), Н.П. Корнейчука, Б.А. По-
пова, С.Б. Стечкина, Ю.Н. Субботина, И. Шёнберга (I. Schoenberg), С. Уолда (S.
Wold) и других.

В последние десятилетия стали бурно развиваться теория и методы непарамет-
рического сглаживания, хотя непараметрический подход использовался в качест-
ве основного метода анализа данных еще в середине 19-го века. Такое развитие
обусловлено в основном двумя причинами: отсутствием необходимой гибкости
классических параметрических методов сглаживания и стремительным развитием
вычислительной техники. В настоящее время непараметрические методы широко
используются в математике, технике, экономике, биологии и во многих других
областях исследований.

В параметрических методах постулируется аналитическая структура связи, зави-
сящая от параметров, а в непараметрических методах такая структура заранее не
фиксируется и подбирается в процессе решения поставленной задачи. Основными
преимуществами непараметрических методов являются их гибкость при исследо-
вании соотношений между двумя переменными и возможность предсказания на-
блюдений (прогноз) без привязки к фиксированной параметрической модели.

*Чебышев П.Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением
функций, Собр. соч. М.-Л., 1947, т.2, стр.152-237.



Кроме того, эти методы позволяют выявлять ложные наблюдения («плохие точки») путем изучения влияния изолированных точек.

Существенный вклад в разработку методов непараметрического сглаживания внесли И.А. Ибрагимов, Е.А.Надарая (Nadaraya E.A.), А.С. Немировский, Е. Парзен (E. Parzen), Б.Т. Поляк, М. Розенблатт (M. Rosenblatt), Дж. Тьюки (J.W. Tukey), Дж. Фридман (J.H. Friedman), В. Хардле (W. Härdle), А.Б. Цыбаков и другие.

Круг задач, рассматриваемых в диссертации, связан с разработкой нового подхода к проблемам кусочно-полиномиальной аппроксимации (включая случай равноотстоящих точек) и сглаживания функций на отрезке конечной длины. Рассмотрены вопросы создания и разработки эффективных методов и алгоритмов приближения и сглаживания поверхностей и кривых в режиме адаптации. Предложенные в диссертации методы можно отнести к *глобальным непараметрическим методам с локальным параметрическим сглаживанием*. Этот подход дает возможность создавать алгоритмы обработки, ориентированные на системы реального времени, в том числе в режимах информационной проходки (data mining).

Целью диссертационной работы является:

- Анализ преимуществ и недостатков известных методов сглаживания (параметрических и непараметрических) с точки зрения их эффективности в рамках требований современной вычислительной практики.
- Поиск нового математического аппарата для эффективного решения задач аппроксимации и сглаживания кривых и поверхностей, ориентированных на обработку "стохастических" данных (задачи распознавания контуров, трековые задачи, цифровая обработка сигналов и т.п.).
- Разработка численных методов аппроксимации, сглаживания и фильтрации, основанных на 4-точечных преобразованиях и ориентированных на работу в режиме адаптации.
- Создание алгоритмов на основе полученных методов и их исследование.
- Создание программных пакетов, реализующих разработанные алгоритмы для их практического применения.

Научная новизна и практическая ценность

В диссертации предложен новый подход к решению задач аппроксимации и сглаживания кривых и поверхностей. Суть этого подхода состоит в использовании идеи известного в проективной геометрии ангармонического (двойного, сложного) отношения системы четырех коллинеарных точек для построения прямых и обратных 4-точечных преобразований над точками кривой. Предложен специальный алгоритм вычисления функций сложного отношения и исследованы их свойства. На основе этого алгоритма впервые введена операция типа свертки над точками кривой, заданной формулой или таблицей, и исследованы её свойства. Среди них наиболее важными являются: понижение на два степени полинома, аппроксимирующего кривую, и квадратичное подавление аддитивной ошибки. Применение 4-точечного преобразования к степенным функциям позволило получить рекуррентную формулу для построения нового базиса в виде моносплайнов степени n , в котором координаты двух точек из четверки используются в качестве непрерывных параметров. На основе этого базиса разработаны простые в вычислении методы и алгоритмы сглаживания с эффективным подавлением ошибок и возможностью адаптации к локальным изменениям формы кривой или поверхности.

Суть 4-точечного подхода к сглаживанию состоит из трех основных этапов. Первый этап связан с расчленением общей полиномиальной модели на сумму двух составляющих – фиксированную и свободную, в которой число параметров меньше, чем в исходной модели. На втором этапе формулируется критерий выбора узлов фиксированной составляющей, исходя из условий устойчивости метода к ошибкам. На третьем этапе по выбранным узлам строятся веса для фиксированной составляющей и базисные функции для свободной составляющей модели. По сравнению с традиционными классическими методами, этот подход позволяет создавать эффективные алгоритмы анализа и обработки зашумленных данных, ориентированные на работу в режиме поступления данных в реальном времени.

Для локальной параметризации кривой или поверхности предлагается использовать ограниченный набор фиксированных (репер \mathcal{R}) и свободных (Θ) параметров. При этом оценки свободных параметров определяются с использованием реперных точек путем эффективного подавления ошибок. Для этого предложен

специальный алгоритм построения весовых функций, на основе которого введена новая операция над точками кривой – операция 4-точечных, или дискретных проективных преобразований (DPT).

Применение DPT к исходным (зашумленным) данным и их свойство подавлять ошибки, позволило заметно упростить вычислительные процедуры нахождения оценок свободных параметров, с последующим использованием этих оценок для коррекции “реперных параметров”.

4-точечные преобразования оказались эффективным математическим инструментом для решения задач приближения и сглаживания кривых и поверхностей. Новые базисные функции, полученные с их помощью, имеют структуру моносплайнов n -й степени $S_n(x; \lambda, L)$ и могут использовать непрерывные параметры в качестве граничных точек отрезка, а разложение функции $f(x) \in C[a, b]$ по $S_n(x; \lambda, L)$ дает равномерное распределение невязки по всему промежутку, повышает устойчивость вычислений при $x \rightarrow 0$ и качественно отличается от тейлоровского разложения функции в окрестности точки x_0 .

Предложенные в диссертации методы аппроксимации и сглаживания кривых и поверхностей позволяют создавать простые в вычислениях и устойчивые к входным ошибкам алгоритмы обработки для решения практических задач в различных областях научных исследований и технологических разработок. Введение управляющих параметров в базисные функции расширяет границы применения классических методов и позволяет решать многие задачи в режиме реального времени. Эти качества весьма актуальны как для алгоритмов быстрого предварительного анализа в системах обработки больших потоков экспериментальных данных, так и в системах идентификации статических характеристик технологических объектов или процессов, функционирующих в различных режимах (задача кусочной аппроксимации сложных зависимостей).

Особую актуальность предложенные методы могут найти в задачах управления динамическими объектами**. Как правило, нужный закон управления динамическим объектом отыскивается адаптивным регулятором в процессе его рабо-

* А.А. Дорофеюк, А.Г. Дмитриев. Методы кусочной аппроксимации многомерных кривых. Автоматика и телемеханика, 12, 1984 г.

** В.Н. Фомин и др. Адаптивное управление динамическими объектами, М., Наука, 1981 г.

ты по реакциям объекта на поданные управляющие воздействия, т.е. система адаптируется в условиях, когда ряд существенных параметров и факторов, определяющих ее поведение, неизвестны. Применение средств вычислительной техники создает большие возможности для реализации различных алгоритмов адаптации, основанные на методах аппроксимации и сглаживания. Такого рода задачи возникают при решении ряда проблем авиационной и космической техники, в задачах управления технологическими процессами, в автоматизированных системах управления в различных отраслях. Обычно значения существенных параметров неизвестны и в законе управления объектом вместо точных значений существенных параметров используются их “приближенные” значения, получаемые тем или иным способом. При таком подходе к задачам адаптации вопрос о получении “приближенных” значений неизвестных параметров становится центральным. Методы и алгоритмы, полученные в диссертации, могут быть применены при синтезе адаптивных систем, например, в рекуррентных процедурах локального адаптивного прогноза или для определения минимума функции по ее значениям, наблюдаемым в условиях случайных помех.

В прикладных задачах функции часто задаются не формулой, а с помощью какого-либо вычислительного процесса. Например, функции могут являться результатом численного интегрирования дифференциального уравнения на заданном отрезке или же вычисляться по сложной итерационной схеме и т.п. Значения таких функций известны с заданной точностью, однако их явный вид заранее не известен, так же, как и их общие свойства. Все операции над такими функциями могут выполняться только посредством вычисления значений самой функции. Более сложные ситуации возникают при обработке эмпирических данных, получаемых в измерениях при наличии посторонних шумов, например, в системах автоматической обработки контурных изображений, в системах адаптивного управления динамическими объектами, при цифровой обработке сигналов и т.п. Анализ данных в таких системах в основном выполняется в режиме реального времени, при котором существуют жесткие ограничения и противоречивые требования к алгоритмам обработки. Такие алгоритмы должны обеспечивать заданную точность и высокую скорость вычисления параметров при ограниченных ресурсах памяти и быть устойчивыми к фону и ошибкам. Эти требования существенно ограничивают применение классических методов адаптивной фильтрации,

например рекурсивного алгоритма наименьших квадратов (РНК) высокого порядка или оптимального калмановского оценивания из-за их вычислительной сложности и неустойчивости. Методы, основанные на 4-точечных преобразованиях, повышают эффективность сглаживающих алгоритмов по таким параметрам, как *вычислительная сложность, точность, устойчивость к ошибкам и адаптивность*. Эти качественные характеристики обеспечиваются за счет *понижения степени полиномов, равномерного распределения ошибок аппроксимации, реперной привязки к кривой, параметризации базисных функций, эффективного подавления входных ошибок и высокой скорости сходимости процесса адаптации*, которая составляет $O(n^{-3})$. Известно, что теоретическая скорость сходимости в методах стохастической аппроксимации не превышает $O(n^{-1})$ *

Работоспособность методов и алгоритмов, предложенных в диссертации, была проверена при обработке реальных данных со спектрометра Epsilon (ЛНФ, ОИ-ЯИ), а также показана на выборках данных, максимально моделирующих реальные. Вычислительные эксперименты на различных модельных примерах и при обработке реальных данных показали высокую эффективность в плане конкурентоспособности известным непараметрическим сглаживающим алгоритмам. Это подтверждено программно путем сравнения результатов обработки одних и тех же выборок данных различными процедурами сглаживания, такими, как Supersmoother, Kernel, Loess, Spline из статистического пакета S-PLUS и процедурами вейвлетного анализа (WPA) из пакета Matlab.

На защиту выдвигаются следующие результаты:

1. Предложен новый 4-точечный подход к решению задач аппроксимации и сглаживания кривых и поверхностей, в рамках которого впервые:
 - Введена операция 4-точечного преобразования.
 - Получена рекуррентная формула для построения полиномов равномерного приближения, зависящих от непрерывных параметров.
 - Создан новый класс адаптивных проективных фильтров для обнаружения и распознавания трековых сегментов.

2. Разработан метод непрерывной параметризации функций координатами опорных точек. На основе этого метода:
 - Построена параметрическая модель локального трехточечного кубического сплайна с одним свободным параметром.
 - Проведено сравнение точности приближения основных элементарных и тригонометрических функций в базисе $S_n(x; \lambda, L)$ с дробнолинейными приближениями Паде и многочленами Чебышева.
 - Построена параметрическая бикубическая модель локального приближения и сглаживания поверхностей с реперной привязкой.
3. С помощью 4-точечных преобразований созданы эффективные алгоритмы локальных кубических сглаживателей LOCUS и LOCUS-P с рекуррентным вычислением параметра и эффективным подавлением ошибок, в которых:
 - Предложен рекуррентный метод вычисления по параметрам оценки свободного коэффициента кубической модели.
 - Получен коэффициент усиления, зависящий от параметров и обеспечивающий скорость сходимости не хуже $O(n^{-3})$.
4. Проведено сравнение результатов сглаживания LOCUS'ом и современными методами непараметрического сглаживания (Supersmoother, Kernel, Loess, Spline), включая методы вейвлетного анализа.
5. Создан пакет прикладных программ для аппроксимации и сглаживания поверхностей (среда Maple) и модуль для сглаживания экспериментальных данных (среда Delphi) в программном комплексе по оптимальной настройке детекторов (спектрометр Epsilon).

Реализация результатов работы

Работа выполнена в соответствии с планом научных работ Объединенного института ядерных исследований и Лаборатории информационных технологий. Теоретические и практические результаты работы получили научное признание – на них имеются ссылки в отечественных и зарубежных работах, посвященных данной тематике. Работы автора стимулировали новые исследования других ученых, посвященные использованию предложенных методов.

* М.Т. Вазин. Стохастическая аппроксимация, М., Мир, 1972.

* Cs. Török. 4-Point transforms and approximation, Comput. Phys. Commun. 125 (2000), 154-166.

На основе предложенных в диссертации методов и алгоритмов создан программный пакет в среде Maple 6 для бикубической аппроксимации и сглаживания поверхностей (UBC library Windows). Создан и введен в эксплуатацию программный блок сглаживания (Delphi 5) для программного комплекса оптимальной настройки детекторов спектрометра Epsilon (ЛИФ, ОИЯИ).

Апробация работы

Материалы диссертации докладывались на школе физического факультета МГУ (Красновидово, 1989), на Международном совещании по программированию и математическим методам решения физических задач (г. Дубна, 1993), на 17-й Международной конференции по ядерным трекам в твердых телах (г. Дубна, 1994), на Международной конференции по математическому моделированию и компьютерным методам в физике (г. Дубна, 1996), на конференции "Численные методы и вычислительная механика в науке и инженерии" (г. Мишкольц, 1996, Венгрия), на 1-й и 2-й Международных конференциях по актуальным проблемам вычислительной физики (г. Дубна, 1998, 2000), на семинаре отдела методов нелинейного анализа Вычислительного Центра РАН (2000), в Институте Математического Моделирования РАН (2000), на кафедре математики Строительного факультета Технического Университета в г. Кошице (Словакия, 2001), а также на ряде семинаров и рабочих совещаний физических групп в лабораториях ОИЯИ (ЛВЭ, ЛФЧ, ЛНФ, ЛЯП, ЛВТА-ЛИТ). Работы по методам анализа и обработки трековой информации докладывались на XIII школе по автоматизации научных исследований АН СССР (г. Красноярск, 1980), на 1-й Всесоюзной конференции по автоматическим системам обработки изображений (г. Звенигород, 1983), на 22-й и 23-й Международных конференциях по физике высоких энергий (Рочестерские конференции) (Лейпциг, 1984 и Беркли, 1986).

Программный пакет для сглаживания поверхностей бикубической моделью с использованием реперных точек доступен пользователям на ftp сервере [ftp.tuke.sk](ftp://tuke.sk) из директории `/pub/doc/maple/ubc` (Технический университет, Кошице, Словакия). Подробное описание программы можно найти на сайте ЛИТ, ОИЯИ –

<http://cv.jinr.ru/~tsap/Koi/jinrlib/Xw009.htm>

Публикации. Основным материалом диссертации опубликован в 15 работах. Пять из них написаны с соавторами. Личный вклад автора в этих работах следующий: [6], [9] – разработка методики и создание алгоритма; [7] – методика применения АПФ и их реализация; [11] – разработка бикубической модели и участие в программной реализации; [15] – создание алгоритма сглаживания и его программная реализация.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и двух приложений. Общий объем работы составляет 211 страниц, из них 185 страниц основного текста, включая 65 рисунков и 6 таблиц. Список литературы включает 109 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** дается обоснование актуальности темы и сформулированы основные цели диссертационной работы. Дано краткое содержание диссертации с описанием её основных результатов.

В **первой главе** диссертации дается краткий обзор основных проблем, связанных с применением классических методов и подходов к аппроксимации и сглаживанию функций (кривых). Отмечаются широко известные проблемы теории и практики применения методов полиномиальной аппроксимации функций, среди которых наиболее часто упоминаются: неустойчивость операций интерполяции, производной и разностных схем к случайным ошибкам; неравномерное приближение на отрезке (разложение по Тейлору); плохие аппроксимационные качества полиномов; специальный выбор узловых точек (многочлены Чебышева); трудоемкость вычислений коэффициентов равномерного приближения; накопление ошибок и проблемы плохой обусловленности матриц нормальных уравнений в методе наименьших квадратов (МНК); равноотстоящие точки при полиномиальной интерполяции (пример Рунге); случайное распределение точек на отрезке (потеря отдельных точек); наличие фоновых точек и проблема устойчивости методов сглаживания к "плохим" точкам (робастность); неудачный выбор базисных функций и узлов; сложность управления вычислительным процессом; измерительные ошибки; накопление ошибок и ограниченность разрядной сетки ЭВМ. С учетом этих проблем, задача поиска новых подходов, простых и устойчивых в вычислениях методов и алгоритмов сглаживания, ориентированных, прежде всего на решение задач систем реального времени, весьма актуальна. Об этом также

свидетельствует интенсивные исследования по проблемам аппроксимации и сглаживания функций, проводимые в течение последних десятилетий. Классические методы сглаживания, такие как, метод сплайнов, рекурсивный метод наименьших квадратов (РНК) высокого порядка, калмановская фильтрация и другие обладают большой вычислительной сложностью и неустойчивостью, особенно при сглаживании данных, искаженных ошибками. Ориентация методов сглаживания для работы в режиме реального времени предъявляет новые, часто противоречивые требования и ограничения. Эти методы должны обеспечивать устойчивость к случайным ошибкам, адаптируемость к входной информации и высокую скорость обработки огромных потоков данных при ограниченных ресурсах памяти. Задачи с такими требованиями возникают повсеместно, например, в экспериментальной ядерной физике, в системах распознавания и фильтрации, в задачах управления технологическими процессами, при цифровой обработке сигналов, в приближенных вычислениях и т.п.

В качестве примера таких задач упоминаются трековые задачи в экспериментах по исследованию взаимодействий элементарных частиц (п. 1.2.1). Наряду с другими работами в этой области упоминаются работы, выполненные автором в процессе разработки и создания системы математического обеспечения для массовых измерений снимков с установки 5-метрового магнитного искрового спектрометра ОИЯИ (МИС-5). Эта система обеспечила распознавание и обработку трековых изображений в автоматическом режиме в процессе поточных измерений снимков на сканирующем автомате HPD (около 5×10^5 снимков). На основе последующей обработки результатов этих измерений физиками был обнаружен новый резонанс – возбужденное состояние пиона*, получены новые данные в области физики элементарных частиц**.

В п. 1.3 дается краткий обзор основных методов сглаживания в области прикладной непараметрической регрессии – бурно развивающегося направления в области статистики. К непараметрическим методам относится ядерное сглаживание, оценки k -ближайших соседей, оценки ортогональных разложений, сглаживание сплайнами и др. В разделе 1.4 изложены основная идея и методы вейв-

летного анализа, обладающие устойчивостью и высокими точностными характеристиками. Однако эти методы не оптимизированы по скорости вычислений и объему используемых ресурсов. Примеры результатов сглаживания данных с помощью вейвлетов и сравнение их с результатами 4-точечного сглаживания приводятся в четвертой главе (п. 4.3).

Вторая глава диссертации посвящена изложению нового подхода к разработке методов аппроксимации и сглаживания функций $f(x) \in C[a, b]$ с использованием фиксированных точек кривой (реперной привязки). Такой подход позволяет использовать реперные точки кривой в качестве параметров аппроксиманты, что дает новые возможности для реализации режима адаптации в алгоритмах приближения и сглаживания функций, особенно при наличии посторонних шумов. Для этого вводится новое преобразование точек кривой, основанное на идее известного в проективной геометрии двойного отношения четырех точек, называемых далее 4-точечными, или дискретными проективными преобразованиями (DPT – *Discrete Projective Transformations*).

Основная цель введения таких преобразований первоначально заключалась в построении математического аппарата для упрощения геометрической формы кривой. Однако использование реперной привязки к кривой и ангармонических отношений четырех точек (четвертой выступает текущая точка) позволило получить простой алгоритм вычисления весовых функций, параметризованных абсциссами этой четверки, и построить модель, в которой и ординаты опорных точек входят параметрами. Такая конструкция обладает большой гибкостью при обработке эмпирических данных, так как начальные значения параметров можно выбирать из самих данных, что обеспечивает быструю привязку модели к наблюдениям. Кроме того, использование опорных точек повышает устойчивость вычислений к случайным ошибкам.

Функции двойного (сложного, ангармонического) отношения или CR-функции (от *cross-ratio*) четырех точек прямой (весовые функции преобразования) находятся по следующему алгоритму:

$$\frac{[13] : [23]}{[24] : [14]}, \text{ где } [ab] = x_\beta - x_\alpha, x_\alpha \neq x_\beta. \quad (1)$$

Этот алгоритм отличается от классического выбором порядка точек. При фиксировании первой точки в классическом случае получаем шесть различных функ-

* Письма в ЖЭТФ, т. 34 (9), 1981, с. 511.
 ** Europhysics Letters, 4 (9), 1987, p. 978.

ций двойного отношения, причем их произведение равно 1. В алгоритме (1) появляются попарно совпадающие функции, и в результате мы получаем только три различные CR-функции $p_i, i = 1, 2, 3$, причем они имеют естественную нормировку, так как их сумма равна 1. Как известно, сложное отношение четырех точек является проективным инвариантом*. К. Штаудт называл функции двойного отношения *вурфами* (от *wurf* – бросок, нем.). Феликс Клейн отмечал фундаментальную роль двойного отношения. Системы точек он относил ко второму принципу в геометрических исследованиях и определял их как "... систему аналитических величин, образованных из координат нескольких точек. Она определяет новый геометрический, т.е. не зависящий от системы координат образ, если при всех преобразованиях координат она определенным образом преобразуется в себя**". На рис.1 правило (1) сложного отношения четырех точек представлено схематически, где выделены алгебраические расстояния между точками, используемыми в (1), соответственно для числителей и знаменателей.

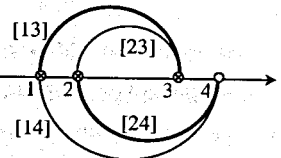


Рис. 1.

Как отмечалось выше, для фиксированной 1-й точки (x_0) можно получить шесть (3!) различных вариантов расположения остальных трех точек, для которых с помощью правила (1) вычисляются шесть значений. С учетом совпадающих пар мы получим только три различные функции двойного отношения. Для их обозначения используется следующая запись:

$$p_1 = \{1234\} = \{1243\}, \quad p_2 = \{1324\} = \{1342\} \quad \text{и} \quad p_3 = \{1423\} = \{1432\}.$$

Обозначим: $[12] \equiv \lambda = x_1 - x_0$, $[13] \equiv L = x_2 - x_0$, $[14] \equiv \tau = x_3 - x_0$.

Тогда $[24] = [14] - [12] = \tau - \lambda$ и $[23] = [13] - [12] = L - \lambda$. Используя (1) и рис.1, найдем, например, функцию $p_3 = \{1423\} = \{0\tau\lambda L\}$:

$$p_3 = \{0\tau\lambda L\} = \frac{[13] \cdot [23]}{[24] \cdot [14]} = \frac{\lambda \cdot (L - \lambda)}{(L - \lambda)(\tau - \lambda)} = \frac{\lambda}{\tau - \lambda}.$$

При перестановке точек $x_0 \leftrightarrow x$ или $0 \leftrightarrow \tau$ алгоритм (1) дает нам новую тройку весовых функций $d_i(\tau; \lambda, L)$, используемую в операции обратного преобразова-

ния. Кроме свойства нормировки CR-функции (1) обладают другими полезными свойствами. Например, существует "ортогональная" связь функций $p_i, i = 1, 2, 3$ с соответствующими четверками ординат точек, расположенными на прямых линиях и квадратичных параболах евклидовой плоскости, т.е. для векторов $P^T = [p_1(\Delta), p_2(\Delta), p_3(\Delta)]$ и $\Delta Y^T = [\Delta y_\lambda, \Delta y_L, \Delta y_\tau]$ справедлива формула

$$(P, \Delta Y) = 0, \tag{2}$$

где символом Δ обозначен набор $\{\tau; \lambda, L\}$, а ΔY – вектор "приращений" соответствующих ординат точек, лежащих на прямой линии или квадратичной параболе относительно базисной точки (x_0, y_0) .

Так как в случае произвольной кривой $f(x) \in C[a, b]$ операция $(\Delta Y, P)$ дает число, отличное от нуля, то на ее основе были построены 4-точечные, или DPT-преобразования (прямое и обратное отображения). Основная идея DPT и их геометрический смысл приведены в п. 2.1.3. Эта операция выполняется по следующей схеме: на кривой $f(x)$ произвольно фиксируются три несовпадающие точки (репер \mathfrak{R}). Тогда текущая (четвертая) точка P_f на кривой f с помощью (2) трансформируется в точку P_{f^c} другой кривой f^c (образ f), и наоборот:

$$P_f \xleftrightarrow{\mathfrak{R}} P_{f^c}.$$

В аналитической форме эти преобразования принимают вид:

$$D[f; \mathfrak{R}] = (P, F) \quad \text{и} \quad D^{-1}[f^c; \mathfrak{R}] = (D, H), \tag{3}$$

где $F^T = [f_\lambda, f_L, f_\tau]$, $H^T = [f_\lambda, f_L, f_\tau^c]$ а $D^T = [d_1, d_2, d_3]$ – весовой вектор обратного преобразования. Символом \triangleleft обозначена операция прямого преобразования $f^c \triangleleft D[f; \mathfrak{R}]$. Эта операция понижает степень полинома на два, причем для $x_0 = 0$ и $\lambda \neq L \neq \tau$ получим $[x^2; \mathfrak{R}]^c = [x; \mathfrak{R}]^c = 0$, а $[C; \mathfrak{R}]^c = C$.

Используя линейность DPT по отношению к конструкции $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$, можно трансформировать точки на кривой $\tilde{f} = f + e$, искаженные аддитивно ошибками $e \sim N(0, \sigma^2)$ в виде

$$(P, \Delta \tilde{F}) = (P, \Delta F + \Delta E) = (P, \Delta F) + (P, \Delta E), \tag{4}$$

* Клейн Ф. Высшая геометрия. – Л., ГОНТИ, 1939.
 ** Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей, т.2, Геометрия, М., Наука, 1987.

где $\Delta E^T = [\Delta e_\lambda, \Delta e_L, \Delta e_r]$ – вектор случайных погрешностей. Известно, что операция численного дифференцирования и разностные схемы в этом случае крайне неустойчивы. Из (2) следует устойчивость DPT к линейно-квадратичной систематике ошибок, так как для четверки e_λ, e_L, e_0, e_r , лежащей на прямой линии или квадратичной параболе, $(P, \Delta E) = 0$. Таким образом, "мера зашумления" может быть выражена уравнением ошибки $\Delta e_r^4 = (P, \Delta E)$, из которого видно, что ΔE преобразуется квадратично через знаменатели CR-функций. Эффективность подавления ошибок зависит от выбора реперных точек \mathfrak{R} (параметров преобразования). Это свойство преобразований по отношению к случайным ошибкам играет важную роль при обработке экспериментальных данных.

В рамках применения 4-точечного подхода к проблеме сглаживания рассмотрена актуальная для физики элементарных частиц задача обнаружения и распознавания треков (раздел 2.2). Обнаружение и распознавание кривых на фоне шумов и потери информации является классической задачей в области распознавания образов и компьютерной обработки изображений. В области физики высоких энергий и ядерной физики общей является проблема нахождения следов (треков) многих типов заряженных частиц в различных установках, работающих на пучках ускорителей.

Для обнаружения и распознавания треков на основе DPT был разработан новый тип адаптивных проективных фильтров (АПФ) (п. 2.2.3). Построен алгоритм для автоматического обнаружения трековых сегментов (TS). Программно исследованы рабочие характеристики алгоритма на моделях многотрековых сцен. Показаны основные преимущества предложенного подхода по сравнению с традиционными методами распознавания треков (п. 2.2.4).

Третья глава диссертации посвящена применению 4-точечных преобразований для разработки простых, устойчивых в вычислениях методов и алгоритмов аппроксимации и сглаживания функций. В п. 3.1 рассмотрен способ непрерывной параметризации мономов $\{x^n\}$ $n = 3, 4, \dots$ на основе операций (3) и приводится вывод формулы 4-точечного преобразования для $\{x^n\}$:

$$[x^n; \mathfrak{R}_n]^4 = \lambda L x \left[\sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{i-1} \sum_{k=1}^{n-i-1} x^{n-i-k-1} L^{k-1} \right], \quad n = 3, 4, \dots,$$

где $\mathfrak{R}_n : \{(\lambda, \lambda^n); (L, L^n); (0, 0)\}$. Отсюда видно, что DPT-образы мономов $\{x^n\}$, $n = 3, 4, \dots$ являются элементарными симметрическими функциями, т.е. однородными функциями относительно λ, L и x степени n . С помощью выражения для $[x^n; \mathfrak{R}_n]^4$ получена рекуррентная формула построения полиномиального базиса $\{G_n(x; \lambda, L)\}$ в виде:

$$G_n = (x + \lambda)G_{n-1} - \lambda x G_{n-2} + L^{n-3}, \quad G_0 = G_1 = G_2 = 0; \quad n \geq 3.$$

На основе G_n строится другой базис $\{S_n(x; \lambda, L)\}$, $n = 3, 4, \dots$ в виде 3-точечных "затуляющих" моносплайнов n -й степени, зависящих от двух непрерывных параметров. Эти базисы качественно отличаются от базиса $\{x^n\}$. Функции $S_n(x; \lambda, L)$ включают демпфирующие добавки, за счет которых при $x \rightarrow 0$, в зависимости от четности n , они имеют первый или второй порядок убывания. Это позволяет повысить устойчивость вычислений для полиномиальных моделей при малых значениях x . Например, полиномиальная модель для $f(x) \in C^{(n)}[a, b]$ с использованием $G_n(x; \lambda, L)$ и $S_n(x; \lambda, L)$ принимает вид:

$$f(x; \mathfrak{R}) = P(x; \mathfrak{R}) + Q(x; \lambda, L) \sum_{j=3}^m \alpha_j G_j(x; \lambda, L) = P(x; \mathfrak{R}) + \sum_{j=3}^m \alpha_j S_j(x; \lambda, L),$$

где $m = M - 2$ – число неизвестных коэффициентов, M – степень полинома, $P(x; \mathfrak{R})$ – парабола, проходящая через реперные точки, а $Q = x(x - \lambda)(x - L)$.

Там же показано, что представление гладкой функции через базис $\{S_n\}$ получает новое качество по сравнению с ее разложением по базису $\{x^n\}$, обеспечивает равномерное распределение ошибок по всему промежутку и придает устойчивость вычислений при $x \rightarrow 0$.

По конструкции базисные функции $\{S_k(x; \lambda, L)\}$ имеют структуру моносплайнов k -й степени и в известном смысле играют в теории аппроксимации ту же роль, что и многочлены Чебышева в классической теории приближения функций. Приведены примеры приближения функций с использованием $S_k(x; -\lambda, \lambda)$. Коэффициенты α_k , $k = 1, 2, \dots$ в таком разложении $f(x)$ определяются из условий:

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k} \Big|_{x=\pm\lambda} = \frac{d^k g(x; \mathfrak{R})}{dx^k} \Big|_{x=\pm\lambda}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

где $g(x; \mathfrak{R}) = \Pi(x; \mathfrak{R}) + \sum_k \alpha_k S_k(x; -\lambda, \lambda)$. Условия (5) позволяют найти коэффициенты α_k путем решения системы алгебраических уравнений. В общем случае производные $f^{(k)}(\cdot)$ можно вычислять и во внутренних точках $x_\mu, \mu = 1, 2$ отрезка $[-\lambda, \lambda]$. Применение такой схемы при $x_0 = 0$ позволяет найти α_k , зависящие от $f^{(k)}(x_\mu)$, $d_i^{(k)}(x_\mu), i = 1, 2, 3$ и $S_{j+2}^{(k)}(x_\mu)$, где $x_\mu \in [-\lambda, \lambda], \mu = 1, 2; k = 1, 2, \dots, n/2, j = 1, 2, \dots, n$. Получено выражение матричных элементов $S_{j+2}^{(k)}(x_\mu)$ через индексы $(j+2)$ и k -е производные $f^{(k)}(x)$. Следует отметить, что выбор значений x_μ позволяет управлять точностью аппроксимации. Рассмотрен пример приближения синуса на $[-\pi, \pi]$ с ошибкой почти на два порядка меньше ошибки разложения синуса по формуле Тейлора для $n=9$ и приведены графики изменения ошибки в зависимости от выбора x_μ .

В п. 3.2.1 строится модель локального трехточечного сплайна (TPS) с одним свободным параметром. Приведен пример применения TPS для приближения функции на отрезке. Полученное решение совпадает с решением, которое дает классический кубический сплайн.

В п. 3.2.3 рассмотрена задача среднеквадратичного кубического приближения $f(x) \in L_2[\lambda, L]$ на основе TPS-модели.

В п. 3.2.5 третьей главы рассмотрена стандартная задача сглаживания точек, рассеянных вблизи кубической кривой с применением TPS-модели. Алгоритм сглаживания кубической кривой на основе TPS использует оценки ординат реперных точек в качестве фиксированных параметров, а оценка свободного параметра находится методом наименьших квадратов по схеме простой линейной регрессии. Сравнение результатов сглаживания стандартной процедурой МНК показало, что при использовании TPS-модели требуется в 3 - 4 раза меньше арифметических операций по сравнению с классической кубической моделью.

Сравнение 4-точечного приближения действительных функций с приближениями, основанными на разложениях Паде, а также с приближениями по многочленам П.Л. Чебышева рассматривается в п. 3.3. На конкретных примерах, путем численных расчетов с использованием пакета Maple показано, что точность DPT-аппроксимант более высокая на границах промежутка и носит равномерный характер на всем интервале по сравнению с Паде-аппроксимантами. Показано, что

DPT-приближения по сравнению с Паде дают меньшую максимальную ошибку на всем промежутке и лишь немного уступают точности классического чебышевского приближения.

В четвертой главе диссертации предложен простой итерационный метод для локального приближения и сглаживания кривых с использованием 3-точечного кубического сплайна. Метод основан на 4-точечных преобразованиях и на рекурсивном методе наименьших квадратов первого порядка. Получен рекуррентный алгоритм цифрового сглаживающего фильтра третьего порядка, в котором оценка свободного параметра TPS-модели определяется по типу известной в теории стохастической аппроксимации процедуры Роббинса-Монро. Степень подавления ошибок и скорость адаптации к локальной форме кривой (коэффициент усиления γ) достигают порядка выше третьего и могут контролироваться параметрами весовых и базисных функций. Алгоритм устойчив к случайным аддитивным ошибкам, прост в реализации, использует небольшие ресурсы памяти и может работать в режиме поступления данных, что актуально для таких задач, как обнаружение и распознавание треков, цифровая обработка сигналов, сглаживание контуров и т.п. Метод может быть использован также для восстановления сложных зависимостей, поиска корней функции и экстремумов. Приведены рабочие характеристики алгоритма.

В разделе 4.1 обсуждается вопрос выбора модели локальной кубической аппроксиманты – трехточечного кубического сплайна (TPS-модель) с одним свободным параметром θ :

$$S(\tau; \mathfrak{R}, \theta) = (\mathbf{R}_0, \mathbf{D}) + \theta Q(\tau; \lambda, L). \quad (6)$$

Три параметра в этой модели совпадают с ординатами реперных точек $\mathbf{R}_0^T = [R_1, R_2, R_0]$, в общем случае заданными с некоторыми ошибками, а их абсциссы λ и L являются параметрами весовых и базисных функций. Особенность модели (6) состоит в том, что ее DPT-образ есть прямая, т.е.:

$$S^*(\tau; \mathfrak{R}, \theta) = \Pi^*(\tau; \mathfrak{R}) + \theta Q^*(\tau; \lambda, L) = S_0 + \theta \Delta L \tau.$$

В п. 4.2.1 обсуждается устойчивость этой трансформации к аддитивным ошибкам. Такая конструкция кривой обладает гибкостью при решении задач сглаживания в условиях помех и при обработке экспериментальных данных в режиме реального времени. Модель оказалась также весьма удобной для работы с вычис-

лимыми функциями и с функциями, задаваемыми формулами, например, при нахождении узлов глобального кубического сплайна.

В разделе 4.2 рассмотрен локально-оптимальный метод сглаживания. Метод работает в два этапа. На первом этапе вычисляются оценка $\hat{\theta}$, число точек n_0 и границы промежутка $[x_b, x_e]$ при фиксированной грубой оценке \bar{R}_0 . Построена итерационная процедура для вычисления $\hat{\theta}$, коэффициент усиления которой зависит от параметров λ и L , что позволяет управлять скоростью сходимости в пределах $O(n^{-3})$ и выше (рис.2). При этом требуется в два раза меньше операций по сравнению с алгоритмом РНК 3-го порядка. На втором этапе значения $\hat{\theta}$ и n_0 используются для коррекции фиксированных параметров по стандартной процедуре МНК.

Возможности метода показаны на примере создания алгоритма для кусочно-кубического приближения (сглаживания) кривой $f(x) \in C$, $x \in [a, b]$, заданной последовательностью N дискретных точек $\{x_k, f_k\}_{k=1}^N$, ($N \gg 4$) в виде суммы M , ($M \geq 1$) локальных кубических сплайнов $S_j(x; \hat{\theta})$:

$$\hat{f}(x) = \sum_{j=1}^M I_j(x) S_j(x; \hat{\theta}), \quad I_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_j \\ 0, & x \notin A_j \end{cases} \quad (7)$$

$$\max_{x \in [x_b, x_e]} |f - S_j| < T_f, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (8)$$

где T_f – заданный порог, $\hat{\theta}$ – оценки параметров для S_j , включая границы отрезка, а $\{A_j\}_{j=1}^M$ – набор отрезков $[x_b, x_e]_j \subseteq [a, b]$, причем $\bigcup_{j=1}^M A_j = [a, b]$.

Быстрое и надежное решение задачи (7) - (8) актуально в системах обработки данных, например, в задачах по распознаванию треков в экспериментах по физике высоких энергий, для сглаживания контуров треков α -частиц в диэлектриках при наличии помех, ошибок оцифровки и т.п.

Как известно, оптимальный выбор узлов при представлении $f(x)$ интерполяционным сплайном является весьма трудной задачей. В случае применения МНК выбор подходящего набора точек разбиения для оценки аппроксимирующего сплайна часто можно определять только методом проб и ошибок. Кроме того, локальное сглаживание при наличии случайных ошибок существенно усложняется

при увеличении их дисперсии σ_ϵ^2 . Разложение (7) - (8) функции $f(x)$, заданной аналитически (формулой), может представлять интерес также с вычислительной точки зрения, например, в задачах поиска локального экстремума или начального приближения корней функции. Табличное задание функции $\{\tilde{f}_k\}$ характерно для систем обработки экспериментальных данных, в которых задача (7) - (8) используется как быстрая процедура вычисления по измерениям параметров или признаков, а также как инструмент для сжатия данных.

"Нарезка" $f(x)$ в виде кубических сплайнов дает возможность получать информацию о локальных особенностях кривой и тем самым сокращать объем вычислений. Например, в задачах распознавания контуров или треков характеристики объекта (длина кривой, площадь и т.п.) можно определять без требования строгой гладкости кривой и ее производных в точках сопряжения сплайнов. Метод позволяет корректировать гладкость сопряжения S_j путем подбора параметров весовых функций, шага квантования и порога точности. Такой метод нахождения оценок может быть использован для разработки простых в вычислениях и экономичных адаптивных сглаживающих алгоритмов (фильтров), ориентированных на обработку данных в режиме их поступления. Это дает преимущество по сравнению с традиционными подходами, использующими заранее известные выборки данных.

Подробно итерационная процедура вычисления $\hat{\theta}$ рассматривается в п. 4.2.2. При известном числе точек n оценка $\hat{\theta}$ находится с помощью критерия МНК для отклонений $\epsilon_k^2 = [\tilde{f}_k - S_k(\lambda, L; \hat{\theta})]^2$. Вычисляя $\hat{\theta}$ сначала по $n-1$, а затем по n точкам, получаем формулу для $\hat{\theta}_n$ в виде:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + \gamma_n [\tilde{\Phi}_n^2 h^{-3} - \hat{\theta}_{n-1} \mu m n], \quad \gamma_n = 6 / \mu m (n+1)(2n+1), \quad \hat{\theta}_0 = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где $n = \tau_n / h$, $\mu = \lambda / h$, $m = L / h$, а h – шаг решетки.

Формула (9) представляет хорошо известную в методе стохастической аппроксимации процедуру Роббинса-Монро, связанную с общим классом рекурсивных алгоритмов, используемых для решения уравнений вида

$$g(\Omega) = E\{G(y, \Omega)\} = 0,$$

где G – известная функция входного сигнала y , Ω – вектор неизвестных параметров, а $E\{\cdot\}$ – символ математического ожидания. Такие алгоритмы применяются, например, для решения задач отыскания корней и экстремумов функций регрессии. В процедуре Роббинса-Монро для корректировки Ω на основе последовательности наблюдений y_k используется соотношение

$$\hat{\Omega}_k = \hat{\Omega}_{k-1} + \gamma_k G[y_k, \hat{\Omega}_{k-1}], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где γ_k – специальным образом подобранная последовательность, которая должна удовлетворять следующим условиям:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty. \quad (11)$$

Второе из этих условий гарантирует достаточное число шагов корректировки, что позволяет близко подойти к искомому решению, тогда как третье условие гарантирует конечность дисперсии накопленного шума. Функция \hat{G} ограничена и является несмещенной оценкой G : $E\{\hat{G}\} = G$, т. е. G – это функция регрессии для случайного процесса \tilde{G} . При выполнении условий (11) процедура (10) сходится как в среднеквадратичном смысле, так и по вероятности.

Методы стохастической аппроксимации (МСА) применяются для решения прикладных задач в области техники, биологии, теории управления, обучения и т.п. Хотя сходимость МСА доказана строго математически, его практическое применение не всегда удовлетворяет решению прикладных задач, так как эта сходимость проявляется при $k \rightarrow \infty$. В практических расчетах необходимо исследовать некоторую окрестность экстремума за небольшое число шагов. Поэтому вопрос выбора коэффициента усиления γ_k , определяющего скорость адаптации и сходимость процедуры (10), является весьма важным. Как известно, на практике чаще всего используется гармоническая последовательность $\{\gamma_k = 1/k^q\}$, $1/2 < q \leq 1$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющая условиям (11). В формуле (9) выражение $\tilde{\phi}_n^a h^{-3} - \hat{\theta}_{n-1} \mu m n$ соответствует $G[y_k, \hat{\Omega}_{k-1}]$. Знаменатель последовательности $\{\gamma_n\}$ изменяется квадратично по n и зависит от параметров μ и m . Это позво-

ляет более чем на два порядка увеличить скорость убывания коэффициента γ_n по сравнению с $1/n$. Для процесса (9) выполняются только первое и третье условия из (11). Второе условие из (11) не выполняется, так как соответствующий ряд сходится. Однако сумма этого ряда достигает своего предела, начиная с $n \approx 10^9$, что вполне достаточно для практического применения метода. Зависимость γ_n от параметров μ и m дает дополнительную возможность влиять на подавление случайных помех. Подходящим выбором этих параметров можно добиться скорости сходимости итераций, значительно превышающей n^{-3} , что и подтверждается графиками на рис. 2 (по обеим осям используется логарифмический масштаб). В п. 4.2.3 строится алгоритм локального кубического сглаживателя (LOCUS) и его структура, а в п. 4.2.4 рассмотрены примеры, на которых демонстрируются возможности этого алгоритма при сглаживании достаточно сложных кривых. Приведены графики динамики процесса сглаживания и адаптации локальной модели к входным данным. Основная трудность в процедуре LOCUS связана со сглаживанием начального сегмента кривой. Как уже отмечалось, для эффективного подавления ошибок полюсные точки должны располагаться как можно дальше слева от базисной точки. В этом случае часть точек между полюсами и базисом не обрабатывается. Для устранения этой проблемы разработана процедура перехода к вычислениям по параметрам.

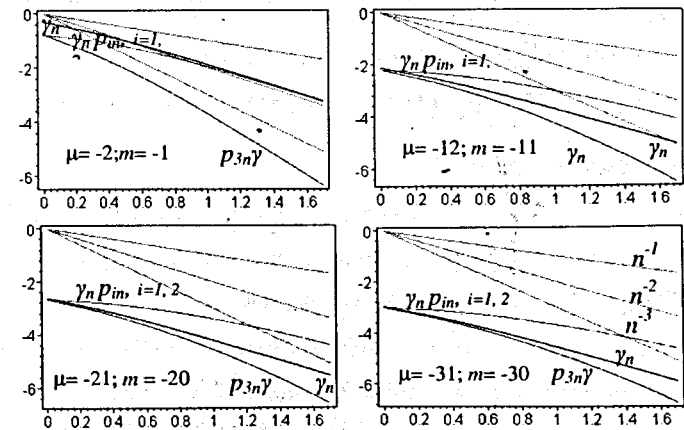


Рис.2. Графики коэффициентов подавления ошибок для различных μ и m .

* А.А. Красовский (ред.). Справочник по теории автоматического управления, М., Наука, 1987.

В разделе 4.3 дается подробное изложение алгоритма LOCUS-P, использующего переход от вычисления по τ к вычислениям по параметрам λ и L . Такой переход возможен в силу непрерывной параметризации весовых функций $Q(\tau; \lambda, L)$ и $d_i(\tau; \lambda, L), i=1,2,3$. Суть этой процедуры состоит в следующем: в силу непрерывной параметризации весовых функций параметры λ и L можно сделать переменными величинами, а независимую переменную τ зафиксировать ($\tau = h$). Такой переход равносильен перемещению нуля системы координат, в которой определена исследуемая кривая, вдоль оси τ без перемещения самой кривой. В результате весовые функции изменяются и приобретают новые свойства. Для перехода к обработке новой точки на кривой достаточно выполнить простой параллельный сдвиг системы координат на заданный шаг h ($\tau' = \tau + h$), выбрать на кривой точку, соответствующую шагу h , и вычислить новые значения весовых функций в точке с координатами (h, λ', L') , где $\lambda' = \lambda - h$, $L' = L - h$. При фиксированном значении h модель (6) принимает следующий вид:

$$S_h(\lambda, L; \mathbf{R}_{0r}, \theta) = (\mathbf{R}_{0r}, \mathbf{D}_h(\lambda, L)) + \theta Q_h(\lambda, L) + e_r,$$

где переменная τ фиксируется, λ и L становятся независимыми переменными, а $\mathbf{R}_{0r}^T = [R_{\lambda_0}^*, R_{L_0}^*, R_{0r}]$, т.е. нулевая, или базисная точка в четверке становится подвижной точкой. При этом веса $d_{ih}(\lambda, L)$, $i=1,2,3$ переходят в дробно-линейные функции от λ и L , а $Q_h(\lambda, L)$ принимает вид квадратичной функции от λ, L .

Оценка $\hat{\theta}$ определяется МНК - рекурсией в виде

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + \gamma_n [\tilde{y}_n - \tilde{\Pi}_n - \hat{\theta}_{n-1} Q_n], \quad \gamma_n = Q_n / \sum_{k=1}^n Q_k^2; \quad \hat{\theta}_0 = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $\tilde{\Pi}_n(\mathbf{R}_{0r})$ - "реперная парабола".

Важно отметить, что сглаживание в этой процедуре можно начинать с первых точек выборки, а оценка параметра θ определяется при грубых оценках других параметров модели. На рис.3 показаны графики коэффициентов подавления ошибок для текущей (γ_n) и реперных точек ($w_{in}\gamma_n$) при старте с первой четверки. Видно,

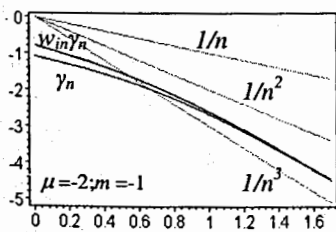


Рис. 3.

что уже на стартовой фазе для первых пяти точек все ошибки подавляются лучше

n^{-3} , а затем поведение графиков практически одинаково и они располагаются ближе к n^{-3} .

В заключительном разделе четвертой главы приведены результаты сравнения алгоритма LOCUS по точности восстановления кривых по входным данным с другими известными непараметрическими сглаживателями, такими, как Super smoother, Kernel, Loess, Spline, включенными в статистический пакет S-PLUS. Кроме того, тестовые данные были обработаны также пакетом вейвлетного анализа (Wavelet Packet Analysis) из пакета Matlab. В качестве тестовых данных взяты выборки точек рассеянных, на дугах кубической кривой, эллипса, гауссоподобного сигнала и других при различных значениях дисперсии шума, сгенерированного с помощью процедуры псевдослучайных чисел.

Результаты сравнений подтвердили высокие характеристики алгоритма LOCUS и LOCUS-P в точности восстановления кривых по сравнению с другими сглаживателями на тестовых данных, максимально приближенных к реальным.

В пятой главе диссертации предложен новый подход к задаче полиномиального сглаживания поверхностей бикубической моделью с использованием реперных точек поверхности. Рассматривается модель для регрессионной задачи вычисления в заданной точке (x, y) оценки \hat{F} некоторой функции $F(x, y)$ по ее измененным значениям $\{\tilde{F}_i\}$.

Как известно, сглаживание функций двух и более переменных характеризуется повышенной трудоемкостью и сложностью, в том числе из-за увеличения размерности матрицы системы нормальных уравнений.

При использовании полиномиальной модели число коэффициентов, подлежащих определению, заметно растет с увеличением порядка приближения. Известны также трудности, связанные с плохой обусловленностью полиномиальных моделей регрессии для полиномов степени шесть и выше. В случае равномерно заданного узлов, регрессионная матрица такой модели становится плохо обусловленной. Для локального сглаживания поверхности здесь предлагается использовать кубическую по каждой переменной модель, в которой одна часть параметров (биквадратная) выбирается на поверхности в виде реперных точек, а другая часть (бикубическая) включает свободные параметры. Такая конструкция

позволяет более чем в два раза понизить размерность матрицы системы нормальных уравнений.

Базисные функции предлагаемой бикубической модели зависят от координат узлов 9-точечной прямоугольной реперной сетки и выражаются через одномерные весовые функции 3-точечного кубического сплайна, предложенного в четвертой главе диссертации. В этом случае мы получаем неполную бикубическую полиномиальную модель (НБМ), в которой коэффициент при x^3y^3 равен нулю. Реперная привязка НБМ к поверхности позволяет ослабить вычислительные трудности, связанные с плохой обусловленностью системы нормальных уравнений при увеличении порядка аппроксимирующего полинома, и почти в три раза повысить скорость вычислений. Эти качественные характеристики весьма актуальны при использовании модели для решения практических задач, особенно в системах реального времени.

Необходимость в алгоритмах аппроксимации и сглаживания поверхностей возникает в ряде научных и прикладных задач при замене сложной функциональной зависимости более простой (полиномиальной) для сглаживания экспериментальных данных, в частности при обработке изображений, исследовании поверхностей отклика, анализе зависимостей магнитных структур и др.

В разделе 5.1 рассматривается конструкция неполной бикубической модели (НБМ) поверхности с девятью реперными точками, а в п. 5.2.1 рассмотрена полная бикубическая модель (БМ) с шестнадцатью опорными точками. Девять опорных точек НБМ выбираются в узлах прямоугольной сетки. Значения приближаемой или сглаживаемой поверхности в этих точках берутся в качестве ее фиксированных параметров. Остальные шесть параметров остаются свободными и подлежат определению. Окончательно НБМ принимает вид:

$$C(u, v) = \sum_{i,j=1}^3 \phi_{ij} w_{ij}(u, v; \Lambda_{uv}) + \sum_{m=1}^6 \theta_m \omega_m(u, v; \Lambda_{uv}) = S_q(u, v; \mathfrak{R}) + S_c(u, v; \Lambda_{uv}), \quad (12)$$

где θ_m — приведенные свободные коэффициенты. Функции $S_q(u, v; \mathfrak{R})$ и $S_c(u, v; \Lambda_{uv})$ представляют, соответственно, биквадратную и бикубическую составляющие аппроксиманты $C(u, v; \mathfrak{R})$. Поверхность (12) представляет локальный бикубический сплайн, так как в узлах сетки и функция $C(u, v; \mathfrak{R})$, и ее производные остаются непрерывными.

Базисные функции $\omega_m(u, v; \Lambda_{uv})$ определяются через произведения одномерных базисных функций, используемых в модели НБМ: $d_i(u; \Lambda_u)Q(v; \Lambda_v)$, $d_j(v; \Lambda_v)Q(u; \Lambda_u)$, ($i, j = 1, 2$), $Q(u; \Lambda_u)$ и $Q(v; \Lambda_v)$. Эти функции обращаются в нуль в узлах выбранной сетки, т.е. $\omega_m(u_i, v_j) = 0$, ($m = 1, 2, \dots, 6$; $i, j = 1, 2, 3$).

Если значения опорных координат заданы без ошибок, то число неизвестных параметров в модели (12) будет почти в два с половиной раза меньше, чем в классической модели бикубического интерполяционного сплайна (КБМ) или простого дважды кубического сплайна $s(x, y)$.

Использование модели (12) для локального приближения функции $F(x, y)$ имеет преимущество перед классической моделью $s(x, y)$ тогда, когда значения функции в опорных точках заданы с повышенной точностью, а сами опорные точки располагаются в узлах прямоугольной сетки. На практике эти ограничения не слишком жесткие. Они сводятся к выбору узлов реперного прямоугольника и более тщательному измерению опорных точек по сравнению с остальными, чего можно добиться, например, повторными измерениями. Эти требования являются основными ограничениями при работе с НБМ. Следует отметить, что благодаря этим ограничениям существенно возрастает эффективность процедуры сглаживания, так как размерность матрицы системы нормальных уравнений сокращается более чем в два раза. Это улучшает обусловленность системы, повышает устойчивость и увеличивает скорость вычислений. При решении задачи полиномиальной аппроксимации $F(x, y)$, заданной аналитически в прямоугольнике, модель $C(u, v; \mathfrak{R})$ может служить удобной бикубической аппроксимантой, в которой более половины коэффициентов (реперные точки) могут быть вычислены заранее с очень хорошей точностью по значениям $F(x, y)$ в узлах сетки.

В разделе 5.2 (п. 5.2.1) на основе НБМ рассматривается МНК процедура для локального сглаживания (аппроксимации) поверхностей бикубическими полиномами в прямоугольной области. На основе численных расчетов сделаны сравнения результатов обработки одних и тех же выборок с использованием моделей $C(u, v; \mathfrak{R})$ и $s(x, y)$, когда $a_{33} = 0$.

В заключении пятой главы приведены примеры расчетов, выполненных на тестовых данных с использованием различных моделей (п. 5.2.2).

Результаты сглаживания, полученные для НБМ, сравнивались с результатами обработки одних и тех же выборок на основе классической регрессионной модели (КБМ) с 15 параметрами. Для каждой модели вычислялись:

а) максимальное отклонение $r_{\max} = \max_{x,y \in R_k} |F - \hat{F}|$;

б) значение определителя матрицы нормальных уравнений $\det = \det(\Omega^T \Omega)$;

в) глобальная относительная ошибка $r_e = \sqrt{\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k - \hat{F}_k)^2} / \sqrt{\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^2}$;

г) время t_R (с), затраченное на вычисление $\hat{\Theta}$ и $\{\hat{F}_k\}$;

д) распределение остатков $r_k = \tilde{F}_k - (\tilde{S}_{qk} + \hat{S}_{ck})$, где $\hat{S}_{ck} = \sum_{m=1}^7 \hat{\theta}_m \omega_m(x_k, y_k)$.

Результаты расчетов показали, что предложенный подход к построению бикубической модели для сглаживания поверхности с привязкой к ее опорным точкам позволяет существенно повысить скорость и устойчивость вычислений и более чем в два раза сократить размерность матрицы системы нормальных уравнений. Эти качественные характеристики являются актуальными для разработки алгоритмов глобальной аппроксимации и сглаживания поверхностей.

В **Приложении I** приведено описание программного пакета для вычисления оценок параметров поверхностей бикубической моделью с использованием реперных точек. Приводится программа (Maple), форматы входных данных и примеры выдачи результатов. Четыре файла **UBC7.m**, **UBC7_Use.mws**, **Data DP.txt** и **Data PP9.txt** доступны для пользователей на ftp сервере <ftp.tuke.sk> из директории **/pub/doc/maple/ubc**. Файл **UBC_Use.mws** в среде Maple 6 (Windows) демонстрирует использование **UBC.m** библиотеки Maple процедур, выполняющих процедуру сглаживания для модели (12).

В **Приложении II** приведено описание программного комплекса для настройки детекторов дифрактометра Epsilon (Delphi 5) и пример выдачи результатов обработки рабочих измерений с детекторов спектрометра.

В заключение сформулированы основные результаты и выводы, полученные в диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Н.Д. Дикусар. Дискретные проективные преобразования на координатной плоскости, Математическое моделирование, 10(3)(1991), 50-64.
2. N.D. Dikoussar. Adaptive projective filters, Commun. of JINR, E5-93-314, Dubna, 1993, 22p.
3. N.D. Dikoussar. Adaptive projective filters for track finding, Comput. Phys. Commun. 79(1994), 39-51.
4. Н.Д. Дикусар. Аппроксимация и сглаживание функций методом 4-точечных преобразований, Сообщения ОИЯИ, P5-95-285, Дубна, 1995, 24с.
5. N.D. Dikoussar. The adaptive algorithm for track finding, Radiation Measurements, 25(1-4)(1995), 761-764.
6. Cs. Török, N.D. Dikoussar. Approximation with DPT, Proc. of Conf. Numerical Methods and Computational Mechanics in Science and Engineering, Miskolc, p.76, 1996 (Hungary).
7. M.V. Avdeev, N.D. Dikoussar. Spline approximation and smoothing using the adaptive projective filters, Proc. Of 9th Intern. Conf. Computational Modeling and Computing in Physics, JINR, D5, 11-97-112, Dubna, 1997, 82-90.
8. N.D. Dikoussar. Function parametrization by using 4-point transforms, Comput. Phys. Commun. 99 (1997), 235-254.
9. Cs. Török, N.D. Dikoussar. Approximation with Discrete Projective Transformation, Comput. & Math. with applications, 38(1999), 211-220.
10. Н.Д. Дикусар. Кусочно-кубическое приближение и сглаживание кривых в режиме адаптации, Сообщения ОИЯИ, P10-99-168, Дубна, 1999, 18с.
11. Н.Д. Дикусар, Ч. Торок. Об одном подходе к сглаживанию поверхностей, Сообщения ОИЯИ, P10-99-223, Дубна, 1999, 12с.
12. N.D. Dikoussar. A Local Cubic Smoother, In: Second Inter. Conf. Modern Trends in Comput. Physics, Book of Abstracts, D11-2000-155, Dubna, 2000.
13. N.D. Dikoussar. A Four-Point Transform Approach to Curve Approximation and Smoothing, In: Second Inter. Conf. Modern Trends in Computational Physics, Book of Abstracts, D11-2000-155, Dubna, 2000.
14. N.D. Dikoussar. A Local Cubic Smoothing in an Adaptation Mode, E10-2001-48, Dubna, 2001, 21p. (Submit. to Comp. Phys. Commun.).

15. Н.В. Астахова, К. Вальтер, Н.Д. Дикусар, И.М. Саламатин, А. Фришбуттер, К. Шеффцюк. Комплекс программ для оптимальной настройки детекторов дифрактометра Epsilon, Сообщ. ОИЯИ, P13-2002-94, Дубна, 2002, 8с.

Работы, не вошедшие в диссертацию:

1. Н.Н. Говорун, Н.Д. Дикусар, Т.Л. Тханг. Математическое обеспечение сканирующей системы НРД с использованием спецпроцессора для обработки данных с магнитных искровых спектрометров, Сообщения ОИЯИ, 10-81-389, Дубна, 1981, 12с.
2. А.Д. Волков, В.И. Мороз, Т.Л. Тханг. Комплекс программ для спецпроцессора в сканирующей системе НРД ОИЯИ. Сообщения ОИЯИ, 10-81-390, Дубна, 1981, 12с.
3. Н.Н. Говорун, Н.Д. Дикусар, Т.Л. Тханг. О параметрической настройке спецпроцессора, Сообщения ОИЯИ, 10-82-295, Дубна, 1982, 16с.
4. A.T. Abrosimov, E. Albini, V.V. Antipov, D. Bellini, L.P. Chernenko, M. di Corato, N.D. Dikoussar, et al. Investigation of inclusive processes $\pi\text{-A} \rightarrow \pi\text{-X}$ and $\pi\text{-A} \rightarrow p_{\text{backwards}}\text{X}$ at 40 GeV/c, In: 22nd International Conference on High-energy Physics – 22nd Rochester Conference, Leipzig, 19 - 25 Jul. 1984, 8p.
5. Н.Д. Дикусар. Метод определения параметров кривой второго порядка с помощью антисимметричного тензора. Сообщения ОИЯИ, 310-86-385, Дубна, 1986, 11с.
6. M.A. Ananieva, A.A. Belozerova, N.D. Dikoussar, V.P. Lobanova, L.K. Lytkin, V.I. Nikanorov, F.Palombo, K.P. Vishnevskaya, V.V. Vishniakov. Double charge exchange of negative pions in inclusive reactions on nuclei at 40 GeV/c, 23rd Int. Conf. High Energy Physics Berkeley, CA, USA. in: Proc. S. C. Loken World Sci., Singapore, 1987.
7. M.A. Ananieva, A.A. Belozerova, N.D. Dikusar, P.L. Frabetti et al. Double-Charge Exchange of Negative Pions in Inclusive Reactions on Nuclei at 40 GeV/c, Europhysics Letters, 4(9)(1987) 978-996.
8. Н.Д. Дикусар, М. Шпытко. Анализатор фортранного текста программных систем, Сообщения ОИЯИ, P10-88-458, Дубна, 1988, 11с.