

10844

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



Ц8406
В-485

12/11-77

10 - 10844

4946/2-77

Г.В.Винель, В.М.Цупко-Ситников, Г.Элер

ПРОГРАММА ЭПОС

ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ γ -СПЕКТРОВ
ОТ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ДЕТЕКТОРОВ

Часть II. Основные алгоритмы программы

1977

10 - 10844

Г.В.Винель, В.М.Цупко-Ситников, Г.Элер

ПРОГРАММА ЭПОС

ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ γ -СПЕКТРОВ
ОТ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ДЕТЕКТОРОВ

Часть II. Основные алгоритмы программы

Бинель Г.В., Цупко-Ситников В.М., Элер Г.

10 - 10844

Программа ЭПОС для автоматической обработки γ -спектров от полупроводниковых детекторов. Часть II. Основные алгоритмы программы

В работе описываются следующие алгоритмы программы полностью автоматизированной экспрессной обработки спектров (ЭПОС): поиска пиков; деления спектра на участки, подлежащие независимой обработке; вычитания фона; подгонки пиков по статистическому методу минимизации функции χ^2 .

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯН.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Введение

Создание программы, ориентированной на быструю автоматическую обработку большого объема спектрометрической информации, требовало разработки простых в математическом отношении алгоритмов, дающих вместе с тем достаточную для экспериментатора точность результатов. В основу программы был положен предложенный Г.Элером метод статистической подгонки^{/1/}. Алгоритм, реализующий этот метод, при хорошей точности результатов позволяет существенно сократить время обработки спектров и, не требуя большого объема памяти ЭВМ, может быть применен в измерительных центрах, оснащенных малыми машинами. Существенное повышение скорости, с которой извлекается физическая информация в ходе эксперимента, должно быть достигнуто за счет максимальной автоматизации процесса обработки данных, что означает минимум входной информации, не требующей предварительного просмотра спектров.

Ниже дано описание основных алгоритмов программы ЭПОС, удовлетворяющей этим требованиям. Вариант программы на языке АЛГОЛ отлажен на ЭВМ БЭСМ-6 и опробован на γ -спектрах от полупроводниковых детекторов, снятых на аппаратуре отдела ядерной спектроскопии и радиохимии Лаборатории ядерных проблем.

2.1. Автоматический поиск пиков

Спектр является последовательностью дискретных отсчетов в отдельных каналах анализатора, подверженных статистическим флюктуа-

циям. Представленный графически спектр зрительно воспринимается как некоторое количество пиков над фоновой линией. В местах расположения пиков число отсчетов превышает по величине среднее значение такого же числа отсчетов в соседних с пиком участках. Этот факт можно использовать для организации простого алгоритма поиска пиков.

Участок поиска берется приблизительно равным ширине пика у его основания /или некоторой ее части, но не меньше половины этой ширины/. Функцию поиска / f / определим как площадь пика /или некоторую ее часть/ и будем вычислять как разность суммы / S / значений отсчетов / eks / в каналах, принадлежащих области поиска / $2 \times n_j$ каналов, и площади фоновой части / t / , которую будем вычислять как площадь трапеции, ограниченной значениями отсчетов крайних каналов участка поиска и соединяющей их прямой /см. рис. I/.

Значения такой функции поиска, вычисленной при последовательном движении по спектру, как функции номера канала / k /

$$f(k) = S(k) - t(k) \quad , \text{ где}$$

$$S(k) = \sum_{j=k-n_j}^{k+n_j} eks_j \quad ,$$

/I/

$$t(k) = \frac{(2n_j + 1)}{2} (eks_{k-n_j} + eks_{k+n_j}) \quad ,$$

будут иметь характер колебаний около некоторого среднего значения, величина которого обусловлена статистическими флуктуациями отсчетов eks_j . В области пика значение $f(k)$ будет резко возрастать и будет иметь максимальное значение в канале, соответствующем максимуму пика, после чего, быстро убывая, опять начнет колебаться около среднего значения. Коридор колебаний функции поиска можно вычислить, оценив ошибку $f(k)$ с учетом того, что значения eks имеют ошибку \sqrt{eks} . Тогда

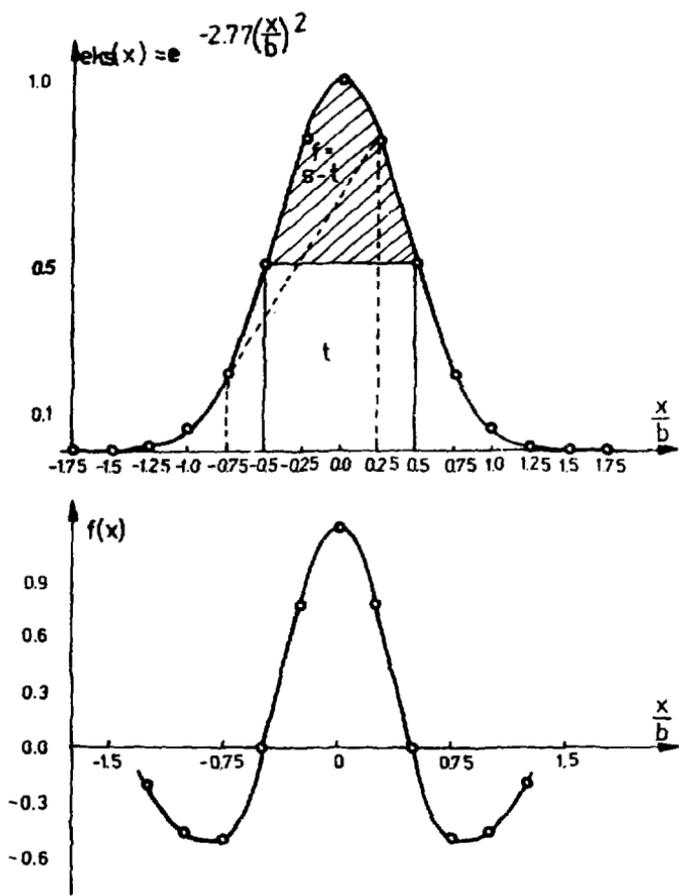


Рис.1

$$\Delta f(k) = \sqrt{\frac{S + (2n_j + 1) - 4}{2} t}.$$

В программе при вычислении функции $f(k)$ проверяются следующие условия:

$$f(k) > 0,$$

$$f(k) > f(k-1),$$

$$f(k) > f(k+1),$$

выполнение которых указывает на возможное обнаружение пика и ведет к тесту

$$f(k) > c_2 + \Delta f(k).$$

Если и это условие выполнено, то данный участок спектра идентифицируется как пик и вычисляется положение максимума пика. c_2 является фактором, задающим величину доверительной вероятности

$f(k)$ при оценке верхнего предела возможных ошибок. С помощью c_2 можно регулировать величину порога чувствительности программы к выявлению пиков. Выбирая c_2 согласно требованиям эксперимента, надо, однако, учитывать, что большая величина c_2 ведет к пропуску малых пиков, ухудшая тем самым точность обработки соседних с ними пиков. При малом c_2 , хотя и будет обнаружено значительное число ложных пиков, точность обработки будет лучше, а ложные пики будут по различным критериям отброшены.

2.2. Деление спектра на независимые участки /интервалы/

Деление спектра на интервалы происходит после определения программой приближенных значений полуширин $/b_i/$ всех найденных пиков и вычисления средней для спектра полуширины $/b_0/$. Соответствующий алгоритм описан в работе^{/3/} и остался в данном варианте ЭПОС без изменений.

Считается, что если расстояние между соседними пиками превышает $3 \cdot ss \cdot b_0$ /где $ss = 1$ /, то влиянием друг на друга соседних пиков можно пренебречь и в данном месте спектр можно разделить на независимые участки. Т.к. значение полуширины по спектру меняется иногда очень заметно / например, от 2,5 до 6 каналов/, то для более точной оценки независимости участков тест расстояния между пиками проводится с учетом некоторой средней для данного участка полуширины, вычисленной по соответствующим b_i . Границы соседних участков вычисляются на расстоянии 1,5 средней на данном участке полуширины от крайних на участке пиков.

Обработка участков с большим числом пиков ввиду сложности проведения фоновой линии на таких участках и снижения в результате этого точности, а также ввиду увеличения времени обработки больших участков нежелательна. Поэтому, если на участке оказалось более 6 пиков, то величина ss полагается равной 0,9, затем 0,8 и 0,7 и процесс разбиения на участки для этих пиков повторяется. В этом случае в качестве границ соседних участков выбирается канал с минимальным значением отсчета между крайними пиками участков.

Границы соседних участков выбирается неперекрывающимися, т.к. дальнейшая их обработка предполагает вычитание фона. По мере вычитания фона для последовательно расположенных участков экспериментальные значения для них будут изменены и не смогут служить для определения фоновой линии последующих участков.

Описанный алгоритм деления спектра на интервалы, как видно из примера обработки /ч. I настоящей работы /8/, дает в общем удовлетворительные результаты. Однако, когда деление происходит с уменьшенным фактором ss для получения числа пиков на интервале меньше 6, бывают случаи неудачного разбиения. Очевидно, при анализе ситуации на сложных участках необходимо выбрать другой критерий разбиения на интервалы.

2.3. Вычитание фоновой части спектра

Регистрация γ -лучей с помощью полупроводниковых детекторов происходит за счет фотоэффекта, комптоновского рассеяния и образования электронных пар. В аппаратном спектре существенную роль играют также эффекты суммирования импульсов как в самом детекторе, так и в аналоговой аппаратуре. В результате аппаратный спектр можно рассматривать как суперпозицию непрерывно спадающего фона с приподнятыми краями комптоновских распределений /комптоновских ступенек/ и резко выделяющимися пиками γ -лучей. Обычно при обработке спектра заранее неизвестны энергии всех γ -линий, и поэтому рассчитать положение комптоновских ступенек нельзя. Описание же обрабатываемых участков некоторой математической моделью без учета характера комптоновского распределения приводит к ошибкам в обработке.

В программе ЭПОС для проведения фоновой линии были использованы идеи, изложенные в работе J.C.Philippot^{17/}. Пусть S -площадь одиночного пика, расположенного на некотором фоне, которую мы вычислим каким-либо образом. Участку пика принадлежат точки, которым присвоим индекс i , пробегающий значение от 1 до n . И пусть S_i -часть площади пика, вычисленная по тому же способу, как и S , но для спектра на участке от первой до i -ой точки. Предположим, что краевые точки участка лежат в области фона и им соответствуют значения спектра $fon(1)$ и $fon(n)$. Фон в i -ой точке участка определим как

$$fon(i) = fon(1) - \frac{S_i}{S} (fon(1) - fon(n)). \quad /4/$$

Изменение значений фона на участке возможно в пределах от $fon(1)$

до $\text{fon}(n)$. Вычисляя по формуле /4/ фон итерационным способом и беря в качестве начальных приближений значения S и S_j для случая линейной зависимости фона на участке, получаем фон под пиком, который учитывает характер формы пика наилучшим образом.

В случае наличия комптоновской ступеньки под пиком такой фон будет повторять ее форму, а в случае постоянного фона под пиком ступенька исчезает. Для перекрывающихся пиков на участке ступенька будет возникать под каждым пиком и будет пропорциональна вкладу этих пиков в сумму их площадей. Как должен пройти фон на сложном участке, без введения дополнительной информации о наличии на нем комптоновских ступенек определить невозможно. Но тогда описание его с помощью итерационной формулы /4/ внесет меньше искажения, чем описание линейной зависимостью.

Исходя из этих соображений, за основу алгоритма определения фоновой линии в программе была взята формула /4/. Есть случаи, когда итерационный процесс /4/ не ведет к сходимости решения, тогда фон на участке описывается линейной зависимостью. /Примеры работы алгоритма вычитания фона см. в ч. I работы^{/8/}/.

Выбор граничных точек интервала, определяющих $\text{fon}(1)$ и $\text{fon}(n)$ в /4/, происходит по следующему алгоритму. Анализируются экспериментальные значения на краях интервала в пределах расстояния, равного $1,5 * b_0$, и находится минимальное значение суммы трех соседних отсчетов. Средняя величина этих отсчетов принимается в качестве значения фона на границе интервала, а соответствующая граничная точка фона берется в точке минимального отсчета.

Не допускаются случаи, когда под фоновой линией может оказаться более трех подряд расположенных экспериментальных значений. Описание ответственной за это части алгоритма здесь не приводится, чтобы не загромождать текст.

После определения фоновой линии на обрабатываемых участках спектра фон вычитается. Тем самым сокращается число подлежащих определению параметров спектра при подгонке. Вопрос об ошибках, вносимых при таком подходе к обработке спектра, является дискуссионным. По результатам обработки /см. ч. I настоящей работы^{18/} видно, что площади для большого числа пиков / $\sim 90\%$ /, вычисленные при двух различных подходах - вычитании фона перед подгонкой пиков /ЭПОС/ и при подгонке пиков вместе с фоном /КАТОК/, - совпадают в пределах их ошибок.

Этот факт дает основание считать, что при предварительном вычитании фона в большинстве случаев вносимые этим погрешности лежат в пределах ошибок, присущих самим экспериментальным значениям. С другой стороны, та часть информации о спектре /до 10%/, в которой ошибки, вносимые вычитанием фона, ведут к неудовлетворительным результатам, очевидно, может оказаться сравнимой с такой же частью информации при другом подходе.

2.1. Метод статистической подгонки

Задача определения параметров спектра на обрабатываемом участке формулируется следующим образом. Для n пар экспериментальных значений X_i, Y_i надо определить L параметров p_L теоретической модели спектра, заданной некоторой функцией $F(x_i, p_1 \dots p_L)$, которая наилучшим образом аппроксимирует экспериментальные значения. Такой набор параметров $p_1 \dots p_L$ находят при выполнении требования сведения к минимуму суммы взвешенных квадратов отклонений теоретических значений от экспериментальных:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n v_i^2 \longrightarrow \min, \text{ где}$$

/5/

$$v_i = (F(x_i, p_1 \dots p_L) - y_i) / \Delta y_i,$$

что, в свою очередь, требует обращения в ноль частных производных функции Φ по искомым параметрам и ведет к системе L уравнений для L неизвестных. Т.к. форма линий спектра не позволяет в качестве теоретической модели взять полином, требование /5/ приводит к системе нелинейных уравнений. Эти уравнения, кроме того, неточны, т.к. экспериментальные значения подвержены статистическим ошибкам, оцениваемым как $\sqrt{y_i}$. Обычно теоретической моделью, достаточно хорошо описывающей пик спектра, считают функцию Гаусса, а фон под пиком описывают полиномом невысокой степени:

$$F(x_i, A, x, b, a_0, b_0) = A * e^{-\frac{c(x-x_i)^2}{b^2}} + a_0 + b_0 * x_i, /6/$$

где A , x , b - соответственно амплитуда, положение и полуширина пика, a_0 , b_0 - коэффициенты полинома фона, константа

$c = -2,772587$. При решении нелинейной системы уравнений задачи /5/ по методу наименьших квадратов функцию $F(x_i, p_1 \dots p_L)$ разлагают в ряд Тейлора в окрестности точки $p_1^0 \dots p_L^0$ начального приближения, ограничиваясь линейными членами. Т.к. полученная система уравнений выполняется только приближенно, то нередки случаи расходимости решения, получаемого итерационным способом. Поэтому даже при различных модификациях итерационного процесса требуется довольно точное задание начальных приближений, а также точное задание числа пиков на обрабатываемом участке.

Описанный ниже метод статистической аппроксимации для решения задачи /5/ дает хорошие результаты также в том случае, когда приближенные значения параметров $p_1^0 \dots p_L^0$ известны не очень точно. Расходимость в этом методе принципиально невозможна, а при наличии побочных минимумов функции Φ с большой вероятностью возможен выход из них.

Запишем задачу в векторной форме. Начальный набор параметров $p_1^{(0)} \dots p_l^{(0)}$ обозначим вектором $P^{(0)}$, а решение - вектором P . /Знак вектора для удобства будем опускать/. Метод статистической аппроксимации позволяет итерационным способом найти P при задании $P^{(0)}$. На практике нулевое приближение определяется не точно, начальное значение $\Phi^{(0)}$ может на несколько порядков превосходить минимальное. В окрестности нулевого приближения /точка $P^{(0)}$ на рис.2/ рассмотрим l -мерную область пространства, заданную вектором $B^{(0)}$ с положительными компонентами. Назовем ее областью поиска решения. С помощью генератора случайных чисел выбираются W_i точек в этой области, которые могут быть описаны вектором P , лежащим в пределах

$$P^{(0)} - B^{(0)} \leq P \leq P^{(0)} + B^{(0)} . \quad /7/$$

Величина области поиска $B^{(0)}$ задается тем больше, чем больше начальное значение $\Phi^{(0)}$, т.е. чем дальше лежит решение P от начального $P^{(0)}$.

$$B^{(0)} = \Psi(\Phi^{(0)}) . \quad /8/$$

Из W_i точек P выбираются две, соответствующие наименьшему $P_i(1)$ и наибольшему $P_m(1)$ значениям Φ . Образуется вектор

$$R(1) = P_i(1) - P_m(1) ,$$

который имеет преобладающую компоненту в направлении $\text{grad } \Phi$ в рассматриваемом месте l -мерной области. Шаг наибольшего приближения к решению в области поиска можно охарактеризовать вектором

$$D(1) = P_i(1) - P^{(0)} ,$$

который также обладает значительной компонентой в направлении $\text{grad } \Phi$. Из векторов $R(1)$ и $D(1)$ образуем вектор асимметрии $A(1)$, определяющий направление сдвига области поиска

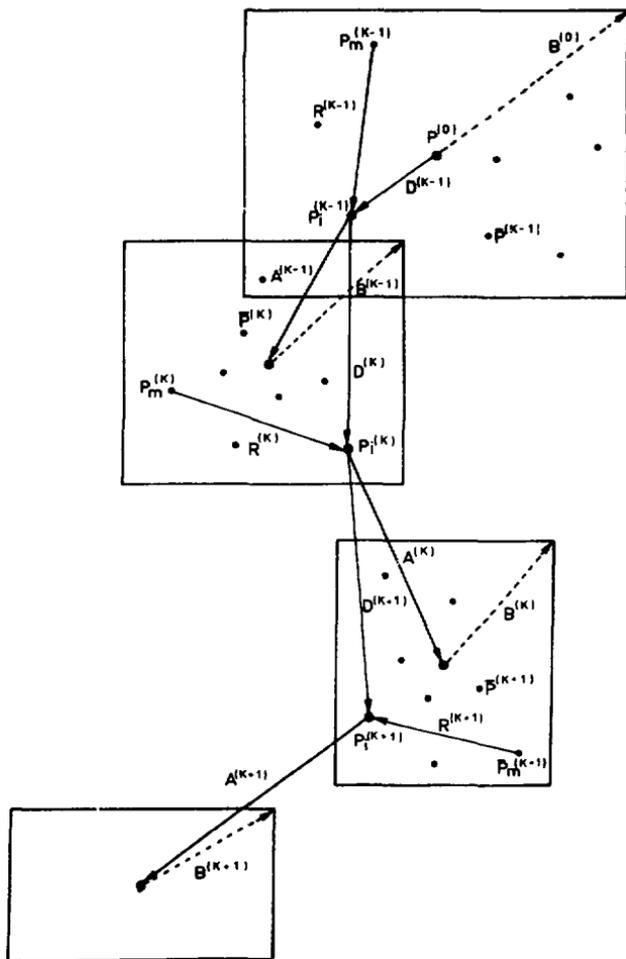


Рис. 2

на следующем шаге итерации, а также выбор средней точки этой области.

Итерационный процесс статистической подгонки представлен на рис. 2. Поясним его далее на примере двух шагов итерации: k -ого и $(k+1)$ -ого. Поиск $(k+1)$ -ого приближения происходит в области поиска, задаваемой точкой $P_i^{(k)} + A^{(k)}$ и вектором $B^{(k)}$:

$$P_i^{(k)} + A^{(k)} - B^{(k)} \equiv P^{(k+1)} \equiv P_i^{(k)} + A^{(k)} + B^{(k)}, \quad /9/$$

при случайном выборе точек W_i . Тем самым новая область поиска выбирается асимметрично относительно лучшего из найденных приближений $P_i^{(k)}$. Вектор $A^{(k)}$ является комбинацией двух векторов, $D^{(k)}$ и $R^{(k)}$:

$$A^{(k)} = g_1 \frac{(\Phi^{(k)})^2}{\Phi^{(0)} \Phi_m^{(k)}} R^{(k)} + g_2 \frac{2\Phi^{(k)}}{\Phi^{(k)} + \Phi^{(k-1)}} D^{(k)} \quad /10/$$

Весовые факторы этой комбинации являются функциями от Φ . Факторы g_1 и g_2 в простейшем случае могут являться числами. Задав их как некоторые простые аналитические функции, можно при выборе новой области поиска усилить /или ослабить/ вклад асимметрии $A^{(k)}$ для каждого следующего шага итерации, облегчая тем самым выход из подобных минимумов.

Фактор перед вектором $R^{(k)}$ уменьшает асимметрию $A^{(k)}$, если на текущем шаге итерации достигнуто значительное улучшение вектора $P(\Phi^{(k)} \ll \Phi^{(0)})$ /улучшение понимается здесь и дальше в смысле $\Phi \rightarrow \Phi_{\min}$, $P^{(0)} \rightarrow P$ / или если в k -ой области величина $\text{grad } \Phi$ оказалась большой / $\Phi^{(k)} \ll \Phi_m^{(k)}$ /. Коэффициент перед вектором $D^{(k)}$ зависит только от уменьшения величины Φ на предыдущем шаге итерации, его вклад в асимметрию тем меньше, чем большее улучшение достигнуто. Следовательно, суммарное назначение

вектора асимметрии $A^{(k)}$ состоит в следующем:

а/ ограничить сдвиг области поиска $B^{(k)}$, когда возможен крутой спуск по гиперповерхности функции Φ или когда достигнуто хорошее приближение P относительно $P^{(0)}$;

б/ увеличить сдвиг области поиска $B^{(k)}$ по отношению к предыдущему шагу итерации тем больше, чем на более пологом участке гиперповерхности Φ мы находимся и чем незначительнее достигнутое улучшение.

Область поиска $B^{(k)}$ на каждом шаге итерации сужается в зависимости от точности приближения, достигнутого на предыдущем шаге. Чтобы исключить сильную зависимость от каждого отдельного шага, вводим вектор инерции:

$$W^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k D(j) \quad /11/$$

Новая область выбирается как

$$B^{(k)} = \sqrt{g_3 B^{(0)} + g_4 |W^{(k)}| + g_5 |A^{(k)}|} \quad /12/$$

Весовые факторы g_3 , g_4 , g_5 позволяют изменять влияние отдельных слагаемых и выбираются оптимальным образом при отладке метода. Первое слагаемое представляет нормировку на начальную область поиска и препятствует слишком быстрому уменьшению компонент $B^{(k)}$. Второе слагаемое действует в направлении уже достигнутого улучшения. Т.к. общий объем l -мерной области на каждом шаге итерации уменьшается, последнее слагаемое позволяет, уменьшая одни компоненты $B^{(k)}$, значительно увеличивать другие. Тем самым достигается при выборе компонент $B^{(k)}$ учет формы гиперповерхности Φ . Фактор $\sqrt{\quad}$ выбирается из условия относительного изменения объемов $G^{(k)}/G^{(0)}$, соответствующих областям поиска $B^{(k)}$ и $B^{(0)}$.

$$G^{(k)}/G^{(0)} = (\Phi^{(k)}/\Phi^{(0)})^{g_5 l} \quad /13/$$

$$\text{где } G^{(0)} = \prod_{i=1}^l b_i^{(0)},$$

$$G^{(k)} = \prod_{i=1}^l b_i^{(k)} = \sqrt[l]{\prod_{i=1}^l (g_3 b_i^{(0)} + g_4 |w_i^{(k)}| + g_5 |a_i^{(k)}|)}, \quad /14/$$

$$\eta = \frac{\Phi^{(k)}}{\Phi^{(0)}} = \frac{g_6}{\left[\frac{\prod_{i=1}^l (g_3 b_i^{(0)} + g_4 |w_i^{(k)}| + g_5 |a_i^{(k)}|)}{G^{(0)}} \right]^{\frac{1}{l}}}. \quad /15/$$

Итак, сходимость в описанном алгоритме статистической подгонки при решении задачи $\Phi^{(k)} \rightarrow \Phi_{\min}$ и $\rho^{(k)} \rightarrow P$ достигается благодаря следующим приемам.

а/ l -мерная область поиска в окрестности k -го приближения $\rho^{(k)}$ строится асимметрично точке $\rho^{(k)}$, симметрично точке $\rho_i^{(k)} + A^{(k)}$. При этом вектор асимметрии выбирается с преобладающей компонентой в направлении $\text{grad } \Phi$, а его величина зависит от достигнутого улучшения значения функции Φ и пропорциональна величине $\text{grad } \Phi$.

б/ Объем l -мерной области поиска $B^{(k)}$ уменьшается, если при случайном выборе W_i точек в области $B^{(k)}$ найдена такая, для которой выполняется условие $\Phi^{(k)} < \Phi^{(k-1)}$. Благодаря уменьшению объема, а также одновременному учету при выборе компонент $B^{(k)}$ структуры, и поверхности Φ , повышается вероятность дальнейшего улучшения приближения $\rho^{(k)}$ к решению.

Описанный алгоритм ведет к хорошей сходимости решения также и в случае, когда нулевое приближение найдено далеко от решения P .

Тогда для достижения заданной точности требуется большее число итераций, а также задание большей начальной области поиска $B^{(0)}$.

Начальными параметрами подгонки являются результаты предварительной обработки ЭПОС-I. Начальная область поиска выбирается

в зависимости от значений подгоняемых параметров и начального $\Phi^{(0)}$ специальным алгоритмом. Функция Φ определена в алгоритме поиска как

$$\Phi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (F(x_i, p_1 \dots p_l) - y_i)^2 / \Delta y_i^2,$$

Процесс подгонки заканчивается после заданного числа итерационных шагов или обрывается раньше, по достижении некоторого, наперед заданного, значения Φ , называемого Φ_{crit} , которое выбирается в зависимости от условий задачи и от желаемой точности результатов.

Достигнутое в процессе подгонки значение $\sqrt{\Phi}$ приводится в таблице результатов в колонке *chi* /см.рис.3,ч.І настоящей работы/8/. Отрицательный знак перед *chi* является указанием экспериментатору на неудовлетворительный результат подгонки.

Заключение

В данной части сообщения описаны те алгоритмы программы ЭПОС, которые изменились за период после выхода работ /1-6/. Не описаны алгоритмы, носящие вспомогательный или организующий характер.

Алгоритмы предварительного определения полуширин пиков, определения зависимости полуширины пиков от номера канала и поиска соответствия вводимых в программу энергий найденным пикам, используемые для режима внутренней калибровки, описаны в /5/.

Авторы выражают большую признательность за дискуссии по проблемам обработки П.М.Гопычу, а также за предоставление алгоритмов для проведения калибровок по энергиям и интенсивности В.Выловой, Ц.Вылову, М.Гонусеку.

Л и т е р а т у р а

1. Г.Элер, ОИЯИ, РИ-6816, 1972, Дубна.
2. Г.Элер, П.М.Гопыч, Г.В.Винель, В.Хабенихт, Л.А.Вылова, ПТЭ, 5, 253, 1973.
3. Г.Элер, П.М.Гопыч, Г.В.Винель, В.Хабенихт, Л.А.Вылова, ОИЯИ, Р10-7364, 1973, Дубна.
4. П.М.Гопыч, Г.Элер, Г.В.Винель, В.Хабенихт, Л.А.Вылова, XXIX совещание по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра, Харьков, 1974, стр.479, Л., "Наука", 1974.
5. Г.Элер, П.М.Гопыч, Г.В.Винель, В.Хабенихт, Л.А.Вылова, Р10-6819, Р10-6818, 1972, Дубна.
6. Г.Элер, П.С.Гопыч, Г.В.Винель, В.Хабенихт, Л.А.Вылова, ОИЯИ, Р10-7365, Р10-7366, Р10-7367, 1973, Дубна.
7. J.F. Philippot, IEEE, Transactions on Nuclear Science, N S-17, 203, 1970.
8. Г.В.Винель, В.М.Цупко-Ситников, Г.Элер, ОИЯИ, 10-10843, Дубна, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 августа 1977 года.