

✓
СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



Ц 840 а

К-63

3/III-75

1 - 8501

851/2-75

С.Н.Комарова, Г.И.Копылов, Э.И.Мальцев,
В.Н.Пенев, Ю.П.Петухов, А.И.Шкловская

СИСТЕМА ПРОГРАММ МОДЕЛИРОВАНИЯ
ИНКЛЮЗИВНЫХ П N -ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

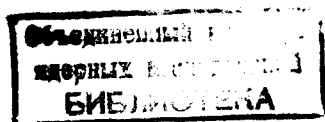
1974

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1 - 8501

С.Н.Комарова, Г.И.Копылов, Э.И.Мальцев,
В.Н.Пенев, Ю.П.Петухов, А.И.Шкловская

СИСТЕМА ПРОГРАММ МОДЕЛИРОВАНИЯ
ИНКЛЮЗИВНЫХ П N -ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ



ВВЕДЕНИЕ

В последнее время широкое распространение получил так называемый инклюзивный подход к исследованию процессов множественного рождения частиц в сильных взаимодействиях.

Экспериментально известные спектры по множественности вторичных заряженных частиц n_{ch} , а также средние значения $\langle n_0 \rangle$ множественности некоторых нейтральных частиц при заданных n_{ch} позволяют моделировать в едином ансамбле события с переменной множественностью, то есть воспроизвести условия инклюзивного подхода. Первый шаг в этом направлении был сделан в работе /1/, где генерировались инклюзивные реакции как сумма эксклюзивных реакций, протекающих по мультипериферической схеме.

В настоящей работе описывается система программ, позволяющая моделировать фазовый объем и произвольные модели, основанные на лестничной диаграмме, в рамках инклюзивного подхода. Генерированные события записываются на магнитные ленты в принятом формате (DST). Обслуживающая программа DISK позволяет строить любые распределения полученных физических величин.

В первом разделе кратко описаны основные алгоритмы программ и границы их применимости, в разделе 2 приводятся характеристики, полученные при исследовании эффективности программ. В третьем разделе иллюстриру-

ется работа программ путем сравнения некоторых моделированных распределений с экспериментальными данными. Наконец, в 4 разделе дана краткая инструкция пользователям по работе с программами INFORS и INMULT.

В приложении показаны таблица и графики некоторых используемых величин, а также обсуждаются возможности перехода к моделированию произвольного XY-взаимодействия.

1. ОСНОВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРОГРАММ. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ

Описываемые программы INFORS и INMULT генерируют события с переменной множественностью вторичных частиц в интервале n_{tot} от 3 до 20. Основной алгоритм конструирования события (на примере π^-p взаимодействия) заключается в следующем:

1. По заданному распределению множественности вторичных заряженных частиц dN/dn_{ch} разыгрывается n_{ch} - количество заряженных пионов + протон.

2. Для полученного значения n_{ch} по закону Пуассона при заданном среднем $\langle n_0 \rangle_{ch}$ разыгрывается n_0 - количество нейтральных пионов.

3. В заданном проценте всех событий вторичный протон заменяется нейтроном.

4. При моделировании фазового объема все вторичные частицы равноправны и разыгрываются в постоянной последовательности. При моделировании мультипериферической диаграммы фиксируется лидирующая частица и нуклон мишени, остальные частицы перемешиваются случайным образом.

После определения количественного и качественного состава события производится розыгрыш всех кинематических параметров вторичных частиц по алгоритмам, выработанным в работах /3,4/ для программы INFORS, и в работе /2/ при моделировании мультипериферической диаграммы.

Программы INFORS и INMULT моделируют инклюзивные реакции типа

$$\begin{aligned} \pi^- + p(n) &\rightarrow \pi^- + \dots \\ \pi^+ + \dots & \\ \pi^0 + \dots & \\ p(n) + \dots & \end{aligned} \quad (1)$$

В расчётах можно учитывать ферми-движение нуклонов (при моделировании взаимодействия на ядрах).

В программе INFORS предусмотрены два способа нивелирования весов - ультррелятивистский /3/ и нерелятивистский /4/, для любых значений энергии первичной частицы. Кроме того, в расчёт можно вводить некоторое искажение фазового объема, а именно - нарушать изотропию углового распределения вторичных частиц и задавать матричный элемент, отличный от константы.

В программе INMULT применен наиболее эффективный способ /2/ моделирования лестничной диаграммы - УБК-2. При розыгрыше по этому способу кинематических параметров вторичных частиц необходимо вычислять ряд рекуррентных интегралов, которые являются функциями энергии и масс первичной и вторичных частиц. Интегрирование возможно только численными методами и требует много времени. Предварительное табулирование данных функций значительно увеличивает быстродействие программы, но приводит к необходимости пренебрегать разностью масс заряженных и нейтральных пионов и разностью масс нуклонов и, кроме того, накладывает ограничение на интервал энергий первичной частицы из-за потерь в точности при интерполяциях. В существующем варианте программы INMULT подготовлены таблицы для πN -взаимодействий в интервале энергий от 1 до 100 ГэВ.

В программе заложен матричный элемент вида $P_e^{\rho t}$, при использовании матричных элементов иного вида пользователь программирует соответствующую формулу (см. раздел 4).

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОГРАММ

Исследование эффективности программ проводилось для случая $\pi^- p$ -взаимодействия при 40 ГэВ/с, что позволило сопоставить результаты моделирования с имеющимися экспериментальными данными, полученными на 2-метровой пропановой камере ^{/5/}. Под эффективностью программ подразумевается отношение числа событий, прошедших браковку, к полному числу генерированных событий. Получена зависимость эффективности от множественности вторичных частиц при различных физических условиях. Рассчитаны также эффективности, усредненные по множественности, которые мы назвали "инклюзивными".

Метод нивелирования весов, применяемый при моделировании фазового пространства в нерелятивистском пределе, оказался достаточно хорошим для исследуемого случая. Эффективность программы INFORS меняется от $\approx 90\%$ для множественности k вторичных частиц, равной 3, до $\approx 50\%$ при $k = 20$. Инклюзивная эффективность программы равна $\approx 60\%$. Распределения относительных весов событий в этом методе розыгрыша представлены на рис. 1 и 2.

Проблема нивелирования весов при моделировании мультипериферических моделей является более трудной. Предложенный в работе ^{/2/} метод, хотя и наиболее эффективен из всех существующих в настоящее время, все же недостаточно хорош для больших множественностей вторичных частиц. На рис. 3 показана зависимость эффективности программы INMULT от множественности при наклоне $\rho = 7$ в матричном элементе вида $\sum e^{\rho t}$ (простая лестничная диаграмма) для двух значений коэффициента ν , нивелирующего распределение по квадратам переданного импульса. Видно, что зависимость очень сильная; предложенный способ малоэффективен для больших множественностей. Расчёты, проведенные для такого матричного элемента в широких интервалах значений



Рис. 1. Распределение относительных весов событий для реакции $\pi^- p \rightarrow \pi \pi p$ (фазовый объем).

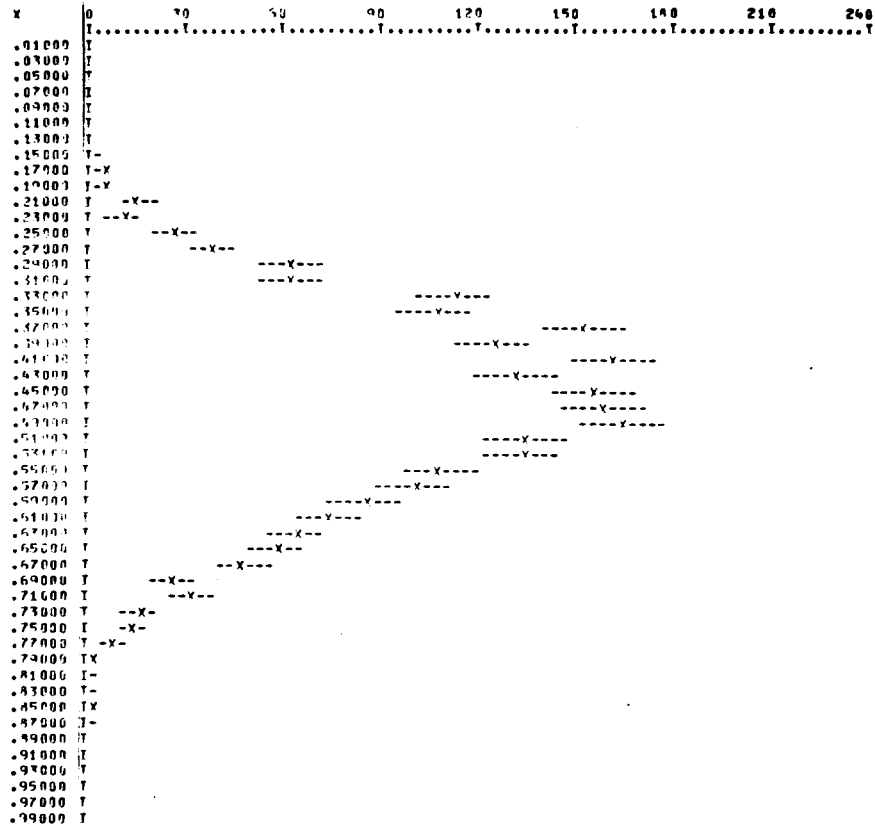


Рис. 2. Распределение относительных весов событий для реакции $\pi^- p \rightarrow 15(\pi) + p$ (фазовый объем).

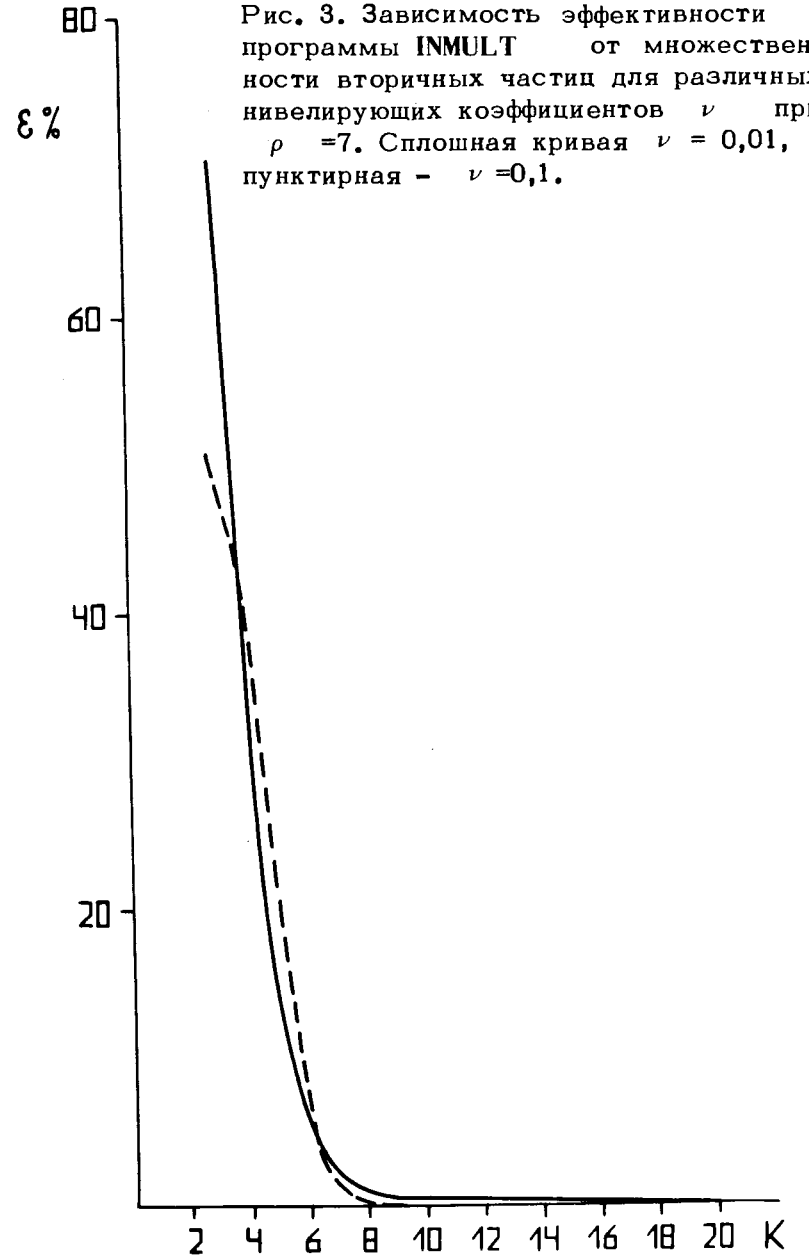


Рис. 3. Зависимость эффективности программы INMULТ от множественности вторичных частиц для различных нивелирующих коэффициентов ν при $\rho = 7$. Сплошная кривая $\nu = 0,01$, пунктирная - $\nu = 0,1$.

$\rho (1 \leq \rho \leq 10)$ и $\gamma (0 \leq \gamma \leq 0,5)$, показали, что инклюзивная эффективность ϵ слабо зависит от этих коэффициентов. Среднее значение ϵ составляет $\approx 9\%$.

При моделировании других диаграмм с использованием определенных матричных элементов значение инклюзивной эффективности всегда меньше, чем для "чистой" лестничной диаграммы. Здесь очень важно подобрать оптимальные величины ρ в множителе

$$K' = \frac{|M|^2}{\sum_e \rho^t}, \quad (2)$$

входящем в выражение для веса события (см. формулу (50) работы ^{/2/}). Для простой лестничной диаграммы $K' \approx 1$, при других матричных элементах необходимо соответствующим подбором значений ρ добиваться максимального приближения этого отношения к постоянной величине. Исследования проводились на модели LPM ^{/6/} с матричным элементом вида

$$|M|^2 = \exp\left(A(t_1 + t_N) - \sum_{i=2}^{N-1} \frac{p_{\perp i}^2}{R}\right), \quad (3)$$

где t_1 и t_N - квадраты переданных импульсов лидирующему π -мезону и нуклону соответственно, а $p_{\perp i}$ - перпендикулярные составляющие импульсов всех остальных частиц; коэффициенты A и R равны:

$$A = 1,5 (\text{ГэВ/с})^{-2} \quad R = \frac{1}{4} (\text{ГэВ/с})^2. \quad (4)$$

Эти исследования показали, что подбором параметра ρ можно повысить инклюзивную эффективность в несколько раз ($\epsilon = 4\%$ при $\rho = 2$ и $\epsilon \approx 1\%$ при $\rho = 7$).

Число событий, эффективность розыгрыша которых низка ($\approx 0,2\%$), может отличаться от того, которое следует из спектра множественности, т.к. число случайных испытаний при браковке по необходимости конечно. Если у моделированных событий спектр множественности

не совпадает с истинным, приходится увеличивать число испытаний. Удобно привести значения скорости набора статистики программами INFORS и INMULT в единицах события/час. Для ЭВМ СДС-6200 при моделировании фазового объема получается около 130000 событий/час, простой лестничной диаграммы - 1500+2000 событий/час, при моделировании модели с лидирующими частицами (LPM) - 500+1000 событий/час. Разброс двух последних значений обусловлен выбором различных параметров, описывающих данные модели.

3. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Для иллюстрации работы программ мы провели сравнение с экспериментальными импульсными распределениями вторичных протонов, π^+ и π^- -мезонов, возникающих в π -p взаимодействии при 40 ГэВ/с^{/5/}. Сравнение проводилось в рамках инклюзивного подхода для случаев моделирования чистого фазового объема, мультипериферической диаграммы с матричным элементом вида $\sum_e \rho^t$ и для LPM-модели, в которой был использован матричный элемент, определяемый формулой (3). Полученные распределения представлены на рис. 4, 5 и 6. Экспериментальный импульсный спектр протонов в значительной степени неточен из-за методических трудностей идентификации нуклонов в пузырьковых камерах при малых и больших импульсах и может рассматриваться только как определенное приближение к действительности. Из рисунков видно, что наилучшее согласие с экспериментальными данными для протонов получается в мультипериферическом описании, а спектры π -мезонов достаточно хорошо описываются и в рамках LPM-модели. Отметим здесь следующее. Не претендуя на строгий теоретический анализ инклюзивных процессов, мы можем, однако, подчеркнуть то обстоятельство, что они удовлетворительно описываются простыми моделями, преимуществом которых является малое число параметров.

Рис. 4. Экспериментальный импульсный спектр протонов из π^-p -взаимодействия при 40 ГэВ/с; штрихованная кривая - результат моделирования LPM-модели, сплошная - моделирование простой лестничной диаграммы.

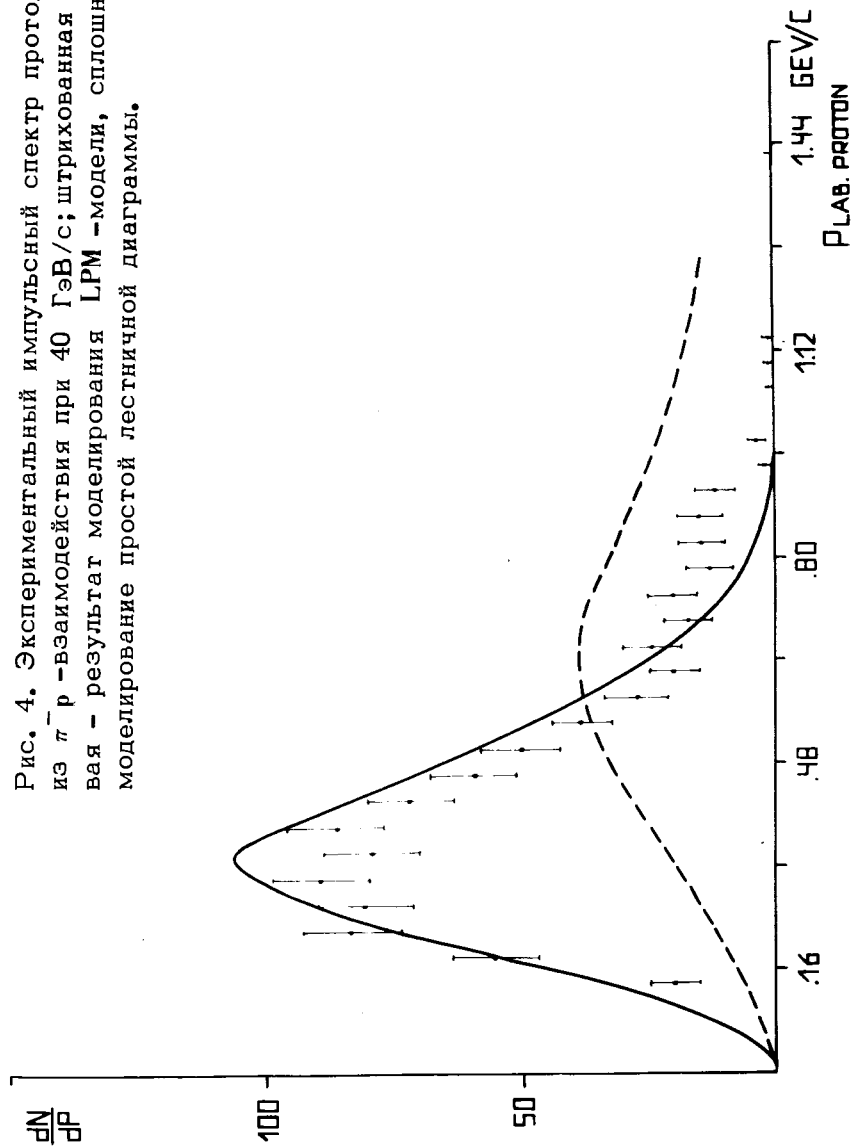
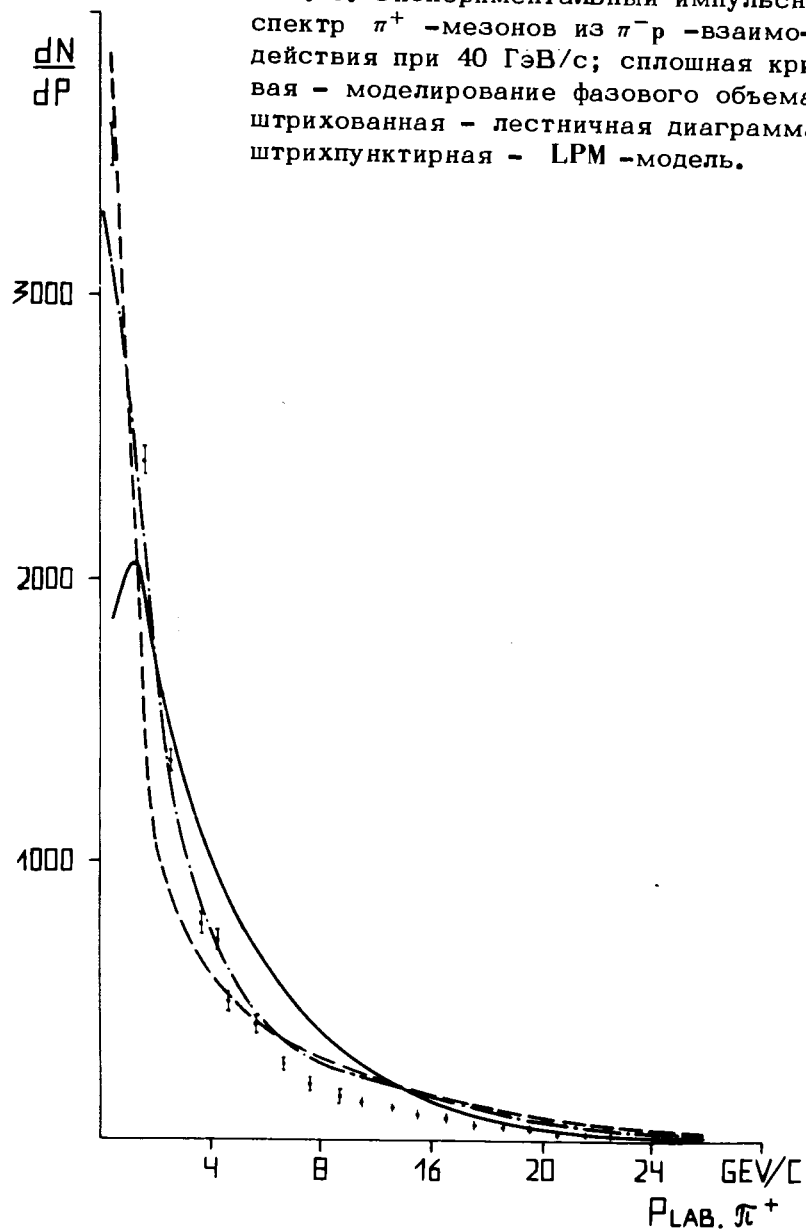
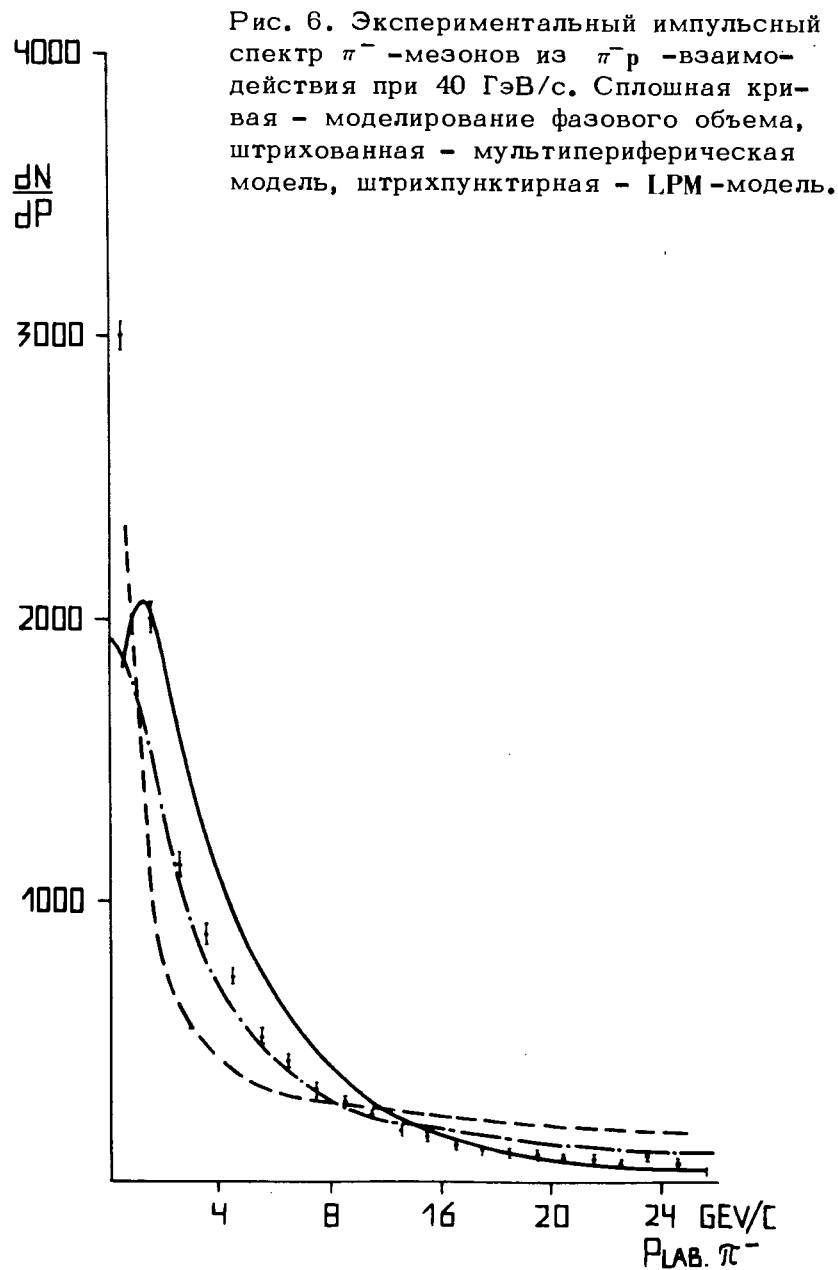


Рис. 5. Экспериментальный импульсный спектр π^+ -мезонов из π^-p -взаимодействия при 40 ГэВ/с; сплошная кривая - моделирование фазового объема, штрихованная - лестничная диаграмма, штрихпунктирная - LPM-модель.





Кроме того, видно, что при моделировании инклюзивных реакций можно не включать в состав вторичных частиц возможные резонансы и каскадно распадающиеся системы.

4. КРАТКАЯ ИНСТРУКЦИЯ ПО РАБОТЕ С ПРОГРАММАМИ INFORS, INMULT

Для работы с системой описываемых программ необходимо в программе INFORS(INMULT) задать условия моделирования, а для программы DISK написать подпрограмму пользователя USER, в которой конструируются необходимые распределения, и задать условия на построение и печать гистограмм.

Часть программы, формируемая пользователем, состоит из собственно программы INFORS(INMULT), в которой задаются условия моделирования, и подпрограммы MATEL, где в случае необходимости конструируется матричный элемент.

Условия расчёта задаются в собственно программе INFORS(INMULT) и включают в себя следующие массивы и переменные (массивы удобно задавать через оператор "DATA"):

1) CHARGE(9) - экспериментальный или теоретический спектр множественности вторичных заряженных частиц (9 значений соответствуют $n_{ch} = 0, 2, 4, 6, \dots$ для π^-p событий и $n_{ch} = 1, 3, 5, 7, \dots$ для π^-p -взаимодействия).

2) PIONO(9) - средние значения числа рождающихся π^0 -мезонов (экспериментальные или теоретические) для каждого значения множественности заряженных частиц.

3) AJOR(20) - максимальные веса для значений полной множественности от 3 до 20 (первые два элемента не используются). Если их необходимо выработать в данном расчёте, то они сначала "зануляются". Если же они выработаны заранее, то задаются имеющиеся значения.

4) KEY(10) - управляющие переключатели.

KEY	INFORS	INMULT
1	1 - нерелятивистское нивелирование 2 - ультрарелятивистское нивелирование	свободен
2	0 - без учёта ферми-движения 1 - с учётом ферми-движения	то же, что в INFORS
3	0 - $ M ^2 = 1$ 1 - матричный элемент пользователя	0 $ M ^2 = \Pi e^{\rho t}$ 1 - матричный элемент пользователя
4-8	свободны	свободны
9	0 - нет записи выборки на МЛ 1 - есть запись выборки	то же, что в INFORS
10	0 - нет записи рабочих событий на МЛ 1 - есть запись рабочих событий	то же, что в INFORS

5) SL(5) - массив ρ -коэффициентов для пяти типов частиц (π^+ , π^- , p , π^0 , n) в матричном элементе вида $|M|^2 = \Pi e^{\rho t}$ (только в INMULT).

SN(5) - массив коэффициентов (для пяти типов частиц), применяемых в способе УБК-2 для нивелирования распределения по передачам (только в INMULT).

6) TLIMIT - запас времени в секундах (в десятичной системе). Задается на 20-30 секунд меньше заказа

времени в управляющей карте (примерно такое время уходит на трансляцию программы и печать результатов).

7) NSAMPLE - интегральная статистика для определения максимальных весов для каждой множественности (обычно достаточно 10 000 событий).

8) NMODEL - требуемая статистика генерируемых событий.

9) NPRINT - задает печать названий вторичных частиц для событий с порядковым номером, кратным NPRINT. Если такая информация не нужна, то NPRINT задается большим, чем NMODEL.

10) PO - импульс первичной частицы в ГэВ/с.

11) NGO и NGT - коды первичной частицы и нуклона мишени по DST.

12) CHANGE - доля событий с перезарядкой нуклона.

13) NCOLL - признак участника сотрудничества по DST.

14) NTYPE - тип события по DST.

15) ASI - в программе INFORS коэффициент анизотропии углового распределения вторичных частиц (для чистого фазового объема равен 1).

Кроме этих величин, для работы программы необходимо задать в качестве числовых данных массив табулированных кривых для розыгрыша кинетических энергий. Необходимо помнить, что массивы разные для разных способов моделирования (нерелятивистское и ультрарелятивистское нивелирование весов, способ УБК-2).

Заметим, что программа пишет на ленту события с весом 1.

Если необходимо записать события с соответствующими весами (т.е. без браковки); то надо "занулить" мажоранты AJOR (1 ÷ 20) = 0 и положить NSAMPLE равным нулю.

Коды частиц по DST

π^+ - 5, π^- - 6, p - 7, π^0 - 8, n - 9.

В заключение мы благодарим В.Г.Гришина за постоянный интерес к работе и многочисленные обсуждения, Н.С.Ангелова – за любезно предоставленные блоки, вошедшие в программу **DISK**, Ю.И.Шелонцева – за полезные советы по математическому обеспечению программ, Н.М.Капитонову – за большую помощь в технической части работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

п. 1. Формулы и таблица, используемые при розыгрыше кинетических энергий.

а) Моделирование фазового объема.

Используемые способы моделирования фазового объема отличаются законом розыгрыша кинетических энергий

T_{k-1}
Нерелятивистский способ:

$T_{k-1} = T_k \xi_{k-1}$, где ξ_{k-1} – корень уравнения

$$C_{k-1}(\xi_{k-1}) = a_{k-1} \quad (5)$$

а функция

$$C_k(\xi_k) = \frac{\int_0^{\xi_k} d\xi_k \xi_k^{\frac{3k-5}{2}} (1-\xi_k)^{\frac{1}{2}}}{\int_0^1 d\xi_k \xi_k^{\frac{3k-5}{2}} (1-\xi_k)^{\frac{1}{2}}}$$

табулирована для $k = 2, \dots, 20$. Графический вид такой функции показан на рис. 7.

Ультрарелятивистский способ:

$T_{k-1} = T_k \sqrt{\xi_{k-1}}$, где ξ_{k-1} – корень уравнения

$$(k-1) \xi_{k-1}^{k-2} - (k-2) \xi_{k-1}^{k-1} = a_{k-1} \quad (6)$$

Здесь и в (5) a_{k-1} – случайное число.

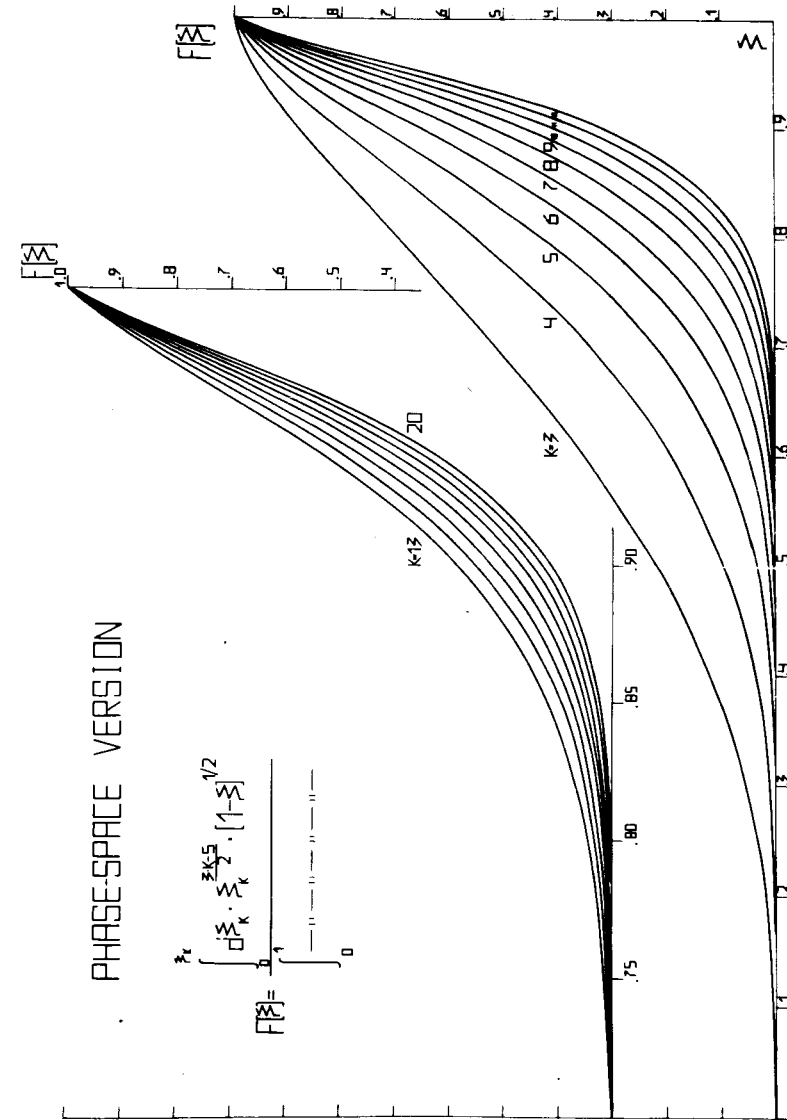


Рис. 7. Графическое представление закона розыгрыша кинетических энергий частиц при моделировании фазового пространства для π^+N -реакций с числом вторичных частиц $k = 3+20$.

При моделировании фазового объема ультрарелятивистским способом необходимо учитывать тот факт, что на границах фазового пространства веса событий стремятся к бесконечности. Для выбора мажорант нужно провести анализ распределения весов и исключить граничные значения.

б) При моделировании мультипериферических моделей использовалась формула

$$S_k(T_{k-1}) = a_{k-1} S_k(T_k), \quad (7)$$

где

$$S_k(T_k) = \int_0^{T_k} \frac{2M_{k-1} d T_{k-1}}{M_{k-1}^2 - m_a^2} \cdot S_{k-1}(T_{k-1}) \quad (8)$$

($k = 3 \dots 20$) при условии, что $S_2(T_2) \equiv 1$.

Рассчитанные зависимости показаны на рис. 8. Представленные значения для наглядности нормированы на $S_k(T_k)^{\max}$, которые равны:

k	3	4	5	6	7	8
$S_k(T_k)^{\max}$	7,50	26,17	57,25	89,08	105,5	99,55
k	9	10	11	12	13	14
$S_k(T_k)^{\max}$	77,20	50,33	28,08	13,61	5,79	2,19
k	15	16	17	18	19	20
$S_k(T_k)^{\max}$,742	,228	,0688	,0165	,00394	,00088

УВК2 АЦ21181

УВК1
С18Х

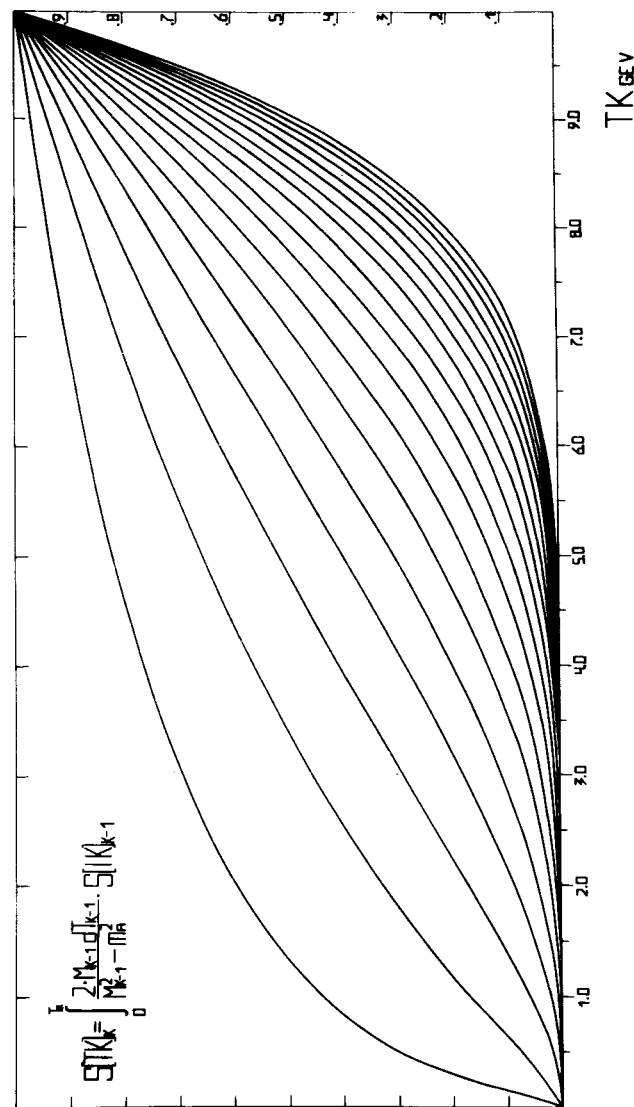


Рис. 8. Графики рекуррентных интегралов для случая π^-N - взаимодействия при $E_0 \leq 60$ ГэВ для множественности вторичных частиц от 3 до 20. Кривые нормированы на максимумы.

п.2. Возможности расширения области применения программ

Существующие варианты программ моделируют только π^-N -взаимодействия. Для перехода к моделированию π^+N и NN требуется небольшое изменение алгоритмов идентификации вторичных частиц в подпрограмме MONTEKA .

В случае моделирования мультипериферического NN -взаимодействия, кроме указанного изменения, необходимо пересчитывать таблицы рекуррентных интегралов (8), зависящих, в частности, от массы первичной частицы.

ЛИТЕРАТУРА

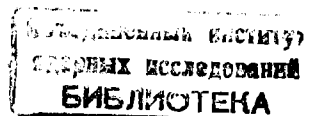
1. Г.И.Копылов, В.Н.Пенев, А.И.Шкловская. Сообщения ОИЯИ, P1-7696, Дубна, 1974.
2. G.I.Kopylov, V.N.Penev, Yu.V.Tevzadze, A.I.Shklovskaya. Nucl.Phys., B30, 398 (1971).
3. В.Е.Комолова, Г.И.Копылов. Препринт ОИЯИ, P-2027, Дубна, 1965.
4. В.Е.Комолова, Г.И.Копылов. Препринт ОИЯИ, P11-3193. Дубна, 1967.
5. А.У.Абдурахимов и др. (Сотрудничество: Алма-Ата-Будапешт-Бухарест-Варшава-Дубна-Краков-Москва-Серпухов-София-Ташкент-Тбилиси-Улан-Батор-Ханой). Препринт ОИЯИ, P1-7103, Дубна, 1972.
6. W.Wojcik. Preprint DPh PE 73-10, Saclay, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1974 года.

P5 - 8500

А.Б.Борисов

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $GL(4, R)$
В БАЗИСЕ ПОДГРУППЫ $O(4)$



1. Введение

В предыдущей работе /2/ мы нашли унитарные представления $GL(3, R)$ в пространстве представлений ортогональной группы. Цель этого сообщения - обобщить использованные ранее методы на унитарные представления группы $GL(4, R)$.

Группа $GL(4, R)$ состоит из всех линейных преобразований четырехмерного пространства:

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

Ее алгебра содержит генераторы группы вращений $M_{ij} = -M_{ji}$ и собственных линейных преобразований:

$$\frac{1}{i} [M_{\mu\nu}, M_{\rho\tau}] = \delta_{\mu\rho} M_{\nu\tau} - \delta_{\mu\tau} M_{\nu\rho} - (\mu \leftrightarrow \nu),$$

$$\frac{1}{i} [M_{\mu\nu}, R_{\rho\tau}] = \delta_{\mu\rho} R_{\nu\tau} + \delta_{\mu\tau} R_{\nu\rho} - (\mu \leftrightarrow \nu),$$

$$\frac{1}{i} [R_{\mu\nu}, R_{\rho\tau}] = \delta_{\mu\rho} M_{\nu\tau} + \delta_{\mu\tau} M_{\rho\nu} + (\mu \leftrightarrow \nu).$$

Поскольку группа $O(4)$ является прямым произведением группы $O(3)$ на группу $O(3)$, ее базис в пространстве представления является прямым произведением пространств представления группы $O(3)$.

В следующей части мы получим явный вид генераторов представления в этом базисе и классификацию возможных представлений. Некоторые промежуточные выкладки для удобства вынесены в приложение.

2. Унитарные представления $GL(4, \mathbb{R})$

Обобщая метод индуцированных представлений /1/, использованный нами в группе $GL(3, \mathbb{R})$ /2/, реализуем представление в пространстве функций $f(u)$ ($u \in O(4)$)

$$g \rightarrow T_g : \quad T_g f(u) = \alpha(k') f(k'),$$

$$\alpha(k) = (k_{11})^a (k_{22})^b (k_{33})^c (k_{44})^d, \quad /1/$$

k - верхняя треугольная матрица, а матрицы u и k' находятся из разложения

$$ug = k' u'.$$

Рассмотрим случай, когда g - симметричная матрица. Соответствующими инфинитезимальными операторами являются R_{ik} . Выделим из них тензорный оператор T_{pp}^{11} , преобразующий относительно группы $O(4)$, как прямое произведение тензорных операторов первого ранга относительно соответствующих групп $O(3)$, входящих в разложение группы $O(4)$. Известно, что любая функция $f(u)$ ($u \in O(4)$) разлагается по ортонормированной системе функций

$$f(u) = \sum_{\ell_1, m_1, n_1} \sum_{\ell_2, m_2, n_2} \frac{1}{\sqrt{2\ell_1+1}} \frac{1}{\sqrt{2\ell_2+1}} b_{m_1 n_1 m_2 n_2}^{\ell_1 \ell_2} \times$$

$$\times D_{m_1 n_1}^{\ell_1}(\theta_1, \phi_1, \psi_1) D_{m_2 n_2}^{\ell_2}(\theta_2, \phi_2, \psi_2) \quad /2/$$

Вычислим действие тензорного оператора T_{pp}^{11} на базис

$$|m_1, \ell_1, n_1; m_2, \ell_2, n_2\rangle = N(a, b, c, d, m_1, m_2) \times$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\ell_1+1}} \frac{1}{\sqrt{2\ell_2+1}} D_{m_1 n_1}^{\ell_1}(\theta_1, \phi_1, \psi_1) D_{m_2 n_2}^{\ell_2}(\theta_2, \phi_2, \psi_2) \quad /3/$$

где множитель $N(a, b, c, d, m_1, m_2)$ определяется ниже из условия унитарности.

Явный вид операторов T_{11}^{11} и T_{-1-1}^{11} определен в приложении. Используя базис /3/, находим:

$$i) T_{pp}^{11} |m_1, \ell_1, n_1; m_2, \ell_2, n_2\rangle = \sum_{\alpha=-1}^1 \sum_{\beta=-1}^1 \left[\frac{1}{2} (-m_1 - m_2 -$$

$$-a + b) C_{\ell_1, 1; m_1, 1}^{\ell_1 + \alpha, m_1 + 1} C_{\ell_2, 1; m_2, 1}^{\ell_2 + \beta, m_2 + 1} |m_1 + 1, \ell_1 + \alpha, n_1 + p; m_2 + 1,$$

$$\ell_2 + \beta, n_2 + p'\rangle = \frac{N(m_1, m_2)}{N(m_1 + 1, m_2 + 1)} + \frac{1}{2} (m_1 - m_2 - a + b) \times$$

$$\times C_{\ell_1, 1; m_1, -1}^{\ell_1 + \alpha, m_1 - 1} C_{\ell_2, 1; m_2, -1}^{\ell_2 + \beta, m_2 - 1} \frac{N(m_1, m_2)}{N(m_1 - 1, m_2 - 1)} |m_1 - 1,$$

$$\ell_1 + \alpha, n_1 + p; m_2 - 1, \ell_2 + \beta, n_2 + p'\rangle + \frac{1}{2} (-m_1 + m_2 + c - d) \times$$

$$\times C_{\ell_1, 1; m_1, -1}^{\ell_1 + \alpha, m_1 - 1} C_{\ell_2, 1; m_2, 1}^{\ell_2 + \beta, m_2 + 1} \frac{N(m_1, m_2)}{N(m_1 - 1, m_2 + 1)} |m_1 - 1, \ell_1 + \alpha,$$

$$n_1 + p; m_2 + 1, \ell_2 + \beta, n_2 + p'\rangle + \frac{1}{2} (m_1 - m_2 + c - d) \frac{N(m_1, m_2)}{N(m_1 + 1, m_2 - 1)} \times$$

$$\times C_{\ell_1, 1; m_1, 1}^{\ell_1 + \alpha, m_1 + 1} C_{\ell_2, 1; m_2, -1}^{\ell_2 + \beta, m_2 - 1} |m_1 + 1, \ell_1 + \alpha, n_1 + p; m_2 - 1, \ell_2 + \beta,$$

$$n_2 + p'\rangle = -\frac{1}{4} [2(1+k) - a(\ell_1 + \frac{a+1}{2}) -$$

$$-\beta(l_2 + \frac{\beta+1}{2})] \times C_{l_1, 1; m_1, 0}^{l_1+a, m_1} C_{l_2, 1; m_2, 0}^{l_2+\beta, m_2} |m_1, l_1+a,$$

$$n_1+p; m_2, l_2+\beta, n_2+p'] C_{l_1, 1; n_1, p}^{l_1+a, n_1+p} C_{l_2, 1; n_2, p'}^{l_2+\beta, n_2+p'} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)}}{\sqrt{(2(l_1+a)+1)(2(l_2+\beta)+1)}}, \quad /4/$$

где $N(a, b, c, d, m, m) \equiv N(m_1, m_2)$.
Здесь a, b, c, d - комплексные числа и

$$k = \frac{1}{4}(-a - b + c + d).$$

Оператор растяжения $D = R_{\mu\mu}$ в этом представлении диагонален

$$D |m_1, l_1, n_1, m_2, l_2, n_2\rangle = \frac{1}{i}(a+b+c+d) |m_1, l_1, n_1, m_2, l_2, n_2\rangle.$$

Условие унитарности представления

$$(T_{pp'}^{11})^+ = (-1)^p (-1)^{p'} T_{-p-p'}^{11}, D^+ = D, \quad /5a/$$

приводит к уравнениям для нормы состояний

$$1 = \frac{[a(l_1 + \frac{a+1}{2}) + \beta(l_2 + \frac{\beta+1}{2}) + 2(1+k)]^*}{[a(l_1 + \frac{a+1}{2}) + \beta(l_2 + \frac{\beta+1}{2}) - 2(1+k)]}$$

$$\left| \frac{N(m_1, m_2)}{N(m_1-1, m_2-1)} \right|^2 = \frac{(m_1 + m_2 + k_1 - 2)^*}{m_1 + m_2 - k_1},$$

$$\left| \frac{N(m_1, m_2)}{N(m_1+1, m_2+1)} \right|^2 = \frac{(m_1 + m_2 - k_1 + 2)^*}{m_1 + m_2 + k_1}, \quad /56/$$

где $k_1 = a - b$.

$$\left| \frac{N(m_1, m_2)}{N(m_1-1, m_2+1)} \right|^2 = \frac{(m_1 - m_2 + k_2 - 2)^*}{m_1 - m_2 - k_2},$$

/6/

$$\left| \frac{N(m_1, m_2)}{N(m_1+1, m_2-1)} \right|^2 = \frac{(m_1 - m_2 - k_2 + 2)^*}{m_1 - m_2 + k_2},$$

$$-(a+b+c+d) = (a+b+c+d)^*,$$

где $k_2 = c - d$.

Здесь введено сокращенное обозначение:

$$N(m_1, m_2) \equiv N(m_1, m_2, l_1, l_2, a, b, c, d).$$

Для упрощения уравнений введем переменные $g_1 = m_1 + m_2$; $g_2 = m_1 - m_2$. Тогда $N(m_1, m_2) = N(g_1) N(g_2)$ и соответствующие уравнения имеют вид:

$$\left| \frac{N(g_i)}{N(g_i-2)} \right|^2 = \frac{(g_i + k_i - 2)^*}{g_i - k_i}, \quad /7/$$

$$\left| \frac{N(g_i)}{N(g_i+2)} \right|^2 = \frac{(g_i - k_i + 2)^*}{g_i + k_i},$$

где $i = 1, 2$.

Уравнения /7/ для $N(g_i)$ совпадают с уравнениями /23/ в /2/, поэтому классификация представлений $GL(4, R)$ является "прямым произведением" классификаций по $GL(3, R)$.

Для всех представлений из условий /5a/, /56/ следует

$$1 + k = i\rho, \quad a + b + c + d = i\omega,$$

где ρ и ω - действительные. Существует всего девять серий представлений, обозначаемых $D_{A_i} \times D_{A_j}^2$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Серия $D_{A_i}^a$ ($a = 1, 2$) называется

a/ главной, если $k_a = 1 + ik_a$;

б/ дополнительной, k_α - вещественное, не равное целому;

в/ дискретной, если $2k_\alpha$ - целое число.

Так, в "дважды главной" серии $k_1 = 1 + i\kappa_1$, $k_2 = 1 + i\kappa_2$. В представлениях этой серии существует четыре инвариантных подпространства, начинающихся соответственно с циклических векторов

$$|0,0,0,0,0\rangle, |0,0,0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n\rangle, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n, 0, 0\rangle, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n_1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n_2\rangle.$$

Явный вид матричных элементов представления следует из /4/, если положить там $N(m_1, m_2) = 1$. Явный вид матричных элементов остальных восьми серий, нахождение инвариантных подпространств и эквивалентных представлений являются прямым обобщением /2/ и представляются читателю.

Автор благодарен В.И.Огневцекому за предложенную задачу и стимулирующие обсуждения.

Приложение

Генераторы $GL(4, R)$ в пространстве функций на подгруппе $O(4)$

Следуя методу индуцированных представлений /1,2/, запишем преобразования $GL(4, R)$ в конечном виде на функциях от ортогональной матрицы $u \in O(4)$:

$$Tgf(u) = a(k')f(u'), \quad /П1/$$

где верхняя треугольная матрица k и ортогональная матрица u' находятся из разложения

$$g' = ug = k' u'.$$

Такое разбиение матрицы g в четырехмерном пространстве на верхнюю треугольную и ортогональную выполняется элементарно, с учетом соотношения ортогональности

$$u_{is} \cdot u_{js} = \delta_{ij}.$$

$$k'_{44}{}^2 = g'_{4s} \cdot g'_{4s},$$

$$u'_{4s} = g'_{4s} (k'_{44})^{-1}; \quad k'_{33}{}^2 = g'_{3s} \cdot g'_{3s} - g'_{3s} \cdot g'_{4s} \cdot k'_{44}{}^{-1},$$

$$u'_{3s} = [g'_{3s} - g'_{4s} \cdot u'_{4\alpha} \cdot u'_{4\alpha}] k'_{33}{}^{-1} \quad /П2/$$

и т.д.

$$k'_{22}{}^2 = g'_{2s} \cdot g'_{2s} - g'_{2s} \cdot u'_{3s} \cdot g'_{2\alpha} \cdot u'_{3\alpha} - g'_{2s} \cdot u'_{4s} \cdot g'_{2\alpha} \cdot u'_{4\alpha},$$

$$u'_{2s} = k'_{22}{}^{-1} (g'_{2s} - g'_{2\alpha} \cdot u'_{3\alpha} \cdot u'_{3s} - g'_{2\alpha} \cdot u'_{4\alpha} \cdot u'_{4s}) \quad /П3/$$

и т.д.

Не все элементы матрицы u независимы, она имеет только 6 независимых элементов. Параметризуем матрицу 6 углами Эйлера:

$$u = e^{iM_3\phi_1} e^{iM_1\theta_1} e^{iM_3\psi_1} e^{iK_3\phi_2} e^{iK_1\theta_2} e^{iK_3\psi_2},$$

где выбрано матричное представление для генераторов

$$M_i = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \ell_{imn} M_{mn} + M_{i4} \right),$$

$$K_i = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \ell_{imn} M_{mn} - M_{i4} \right),$$

$$i, m, n = 1, 2, 3.$$

Нетрудно выразить углы Эйлера через элементы матрицы u_{ik} :

$$\cos \frac{\theta_1}{2} = \frac{1}{2} \left[(u_{43} - u_{34})^2 + (u_{33} + u_{44})^2 + (u_{31} + u_{42})^2 + (u_{41} - u_{32})^2 \right]^{1/2},$$

$$\cos \frac{\theta_2}{2} = \frac{1}{2} [(u_{43} - u_{34})^2 + (u_{33} + u_{44})^2 + (u_{41} + u_{32})^2 + (u_{31} - u_{42})^2]^{\frac{1}{2}};$$

$$\phi_1 = \arcsin \frac{u_{21} - u_{12}}{2 \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2}} - \arccos \frac{u_{32} - u_{41}}{2 \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2}};$$

$$\phi_2 = \arcsin \frac{u_{21} - u_{12}}{2 \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2}} - \arccos \frac{u_{41} + u_{32}}{2 \sin \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1}{2}};$$

/П4/

$$\psi_2 = \arcsin \frac{u_{43} + u_{34}}{2 \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2}} + \arccos \frac{u_{32} - u_{41}}{2 \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2}};$$

$$\psi_1 = \arccos \frac{u_{41} + u_{32}}{2 \sin \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1}{2}} - \arcsin \frac{u_{43} + u_{34}}{2 \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2}}.$$

Поскольку закон преобразования k' и u' в уравнении /П1/ нам известен /см. /П2-П3//, уравнение /П4/ позволяет определить закон преобразования углов Эйлера ϕ_1, \dots, ψ_2 . Ограничимся инфинитезимальными преобразованиями групп на функциях $f(\phi_1, \dots, \psi_2)$. Элементарными, но утомительными выкладками получаем дифференциальный оператор R_{12} :

$$iR_{12} = \sin \theta_2 \left[\frac{1}{2} \cos(\psi_1 + \psi_2) \frac{1}{\sin \theta_1} \partial \psi_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin(\psi_1 + \psi_2) \partial \theta_1 - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta_1 \times \right.$$

$$\times \cos(\psi_1 + \psi_2) \partial \phi_1] + \sin \theta_1 \left[\frac{1}{2} \cos(\psi_1 + \psi_2) \times \right.$$

$$\times \frac{1}{\sin \theta_2} \partial \psi_2 + \frac{1}{2} \cos \theta_2 \sin \theta_1 \sin(\psi_1 + \psi_2) \partial \theta_2 -$$

$$\left. - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta_2 \cos(\psi_1 + \psi_2) \partial \phi_2 \right] + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \cos^2 \frac{\theta_2}{2} \times$$

$$\times [\sin(\phi_1 + \phi_2 + \psi_1 + \psi_2)(-a+b) + \cos(\phi_1 + \phi_2 + \psi_1 + \psi_2) \times$$

$$\times (\partial \phi_1 + \partial \phi_2)] + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \sin^2 \frac{\theta_2}{2} [\sin(\phi_1 - \psi_1 + \phi_2 - \psi_2) \times$$

$$(a-b) + \cos(\phi_1 + \phi_2 - \psi_1 - \psi_2)(-\partial \phi_1 - \partial \phi_2)] + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \times$$

$$\cos \frac{\theta_2}{2} [\sin(\phi_1 - \psi_1 - \phi_2 - \psi_2)(-c+d) + \cos(\phi_1 - \psi_1 -$$

$$- \phi_2 - \psi_2)(\partial \phi_1 - \partial \phi_2)] + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta_1}{2} \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \times$$

$$\times [\sin(\phi_2 - \psi_2 - \phi_1 - \psi_1)(-c+d) + \cos(\phi_2 - \phi_1 -$$

$$- \psi_1 - \psi_2)(-\partial \phi_1 + \partial \phi_2)] + \frac{1}{4} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \times$$

$$\times \sin(\psi_1 + \psi_2)(-a-b+c+d).$$

/П5/

Мы интересуемся неприводимыми представлениями $O(4)$, которые реализуются на функциях

$$\sqrt{2\ell_1+1} \sqrt{2\ell_2+1} D_{m_1 n_1}^{\ell_1}(\phi_1, \theta_1, \psi_1) D_{m_2 n_2}^{\ell_2}(\phi_2, \theta_2, \psi_2)$$

$$\equiv |m_1, \ell_1, n_1, m_2, \ell_2, n_2\rangle$$

$$(-\ell_i \leq m_i, n_i \leq \ell_i, i=1,2).$$

Удобно разложить и оператор R_{ik} на неприводимые тензорные операторы T_{pp}^{11} , ($p, p' = 1, 0, -1$):

$$R_{12} = i \frac{1}{2} (T_{11}^{11} - T_{-1-1}^{11}).$$

Явный вид генератора R_{12} /П5/ позволяет непосредственно определить матричные элементы T_{11}^{11} , T_{-1-1}^{11} и, следовательно, T_{pp}^{11} , в базисе $|m_1, \ell_1, n_1, m_2, \ell_2, n_2\rangle$.

Литература

1. М. Наймарк. Труды Международной школы по теоретической физике в Ялте. "Наукова Думка", Киев, 1967, 184.
2. А. Б. Борисов. Сообщение ОИЯИ, P2-8493, Дубна, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1974 года.