СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

1 - 8358

В.С.Ставинский

ТРАНСМИССИОННЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ПОЛНЫХ СЕЧЕНИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1 - 8358

В.С.Ставинский

ТРАНСМИССИОННЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ПОЛНЫХ СЕЧЕНИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Ставинский В.С. 1 - 8358

Трансмиссионный метод измерения полных сечений взаимодействия

В работе проводится анализ трансмиссионного метода измерения полных сечений взаимодействия при высоких энергиях.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1974

Трансмиссионный метод, или метод пропускающих счетчиков, - наиболее распространенный способ измерения ослабления пучка частиц рассеивателем. Подавляющее число мировых данных по полным сечениям взаимодействия частиц с веществом получено трансмиссионным методом. Идея метода по существу заимствована из работ по измерению коэффициента экстинкции в области частот оптического спектра [1,2]. На рис. 1 показана принципиальная схема такого опыта. Источник исследуемого излучения /Т/ помещается в фокальной плоскости объектива $Л_1$. Призма П, объектив $Л_2$ и щель $Д_1$ образуют монохроматор. На участке между объективами $Л_3$ и $Л_4$, образующими пучок параллельных лучей, помещается исследуемое вещество P_1. В фокусе объектива $Л_4$ необходимого диаметра диафрагма $Д_2$ определяет область чувствительности регистрации интенсивности излучения. По ослаблению интенсивности света введенным в пучок образцом /исследуемое вещество/ можно определить коэффициент экстинкции.

Измерение полных сечений взаимодействия в физике элементарных частиц трансмиссионным методом осуществляется аналогичным образом. Только теперь П /рис. 1/. означает анализирующий по импульсу магнит, $Д_1$ - импульсный коллиматор, $Д_2$ - сцинтилляционный /трансмиссионный/ счетчик, диаметр которого определяет телесный угол из центра рассеивателя /P_2 /, помещенного всегда после объектива $Л_4$. Иногда сохраняется и участок параллельного пучка, необходимый для сепарации частиц по массам /скорости/ при фиксированном импульсе, которая осуществляется дифференциальным черенковским счетчиком /С/, разрешение которого по скорости в значительной степени определяется угловым разбросом частиц в пучке.

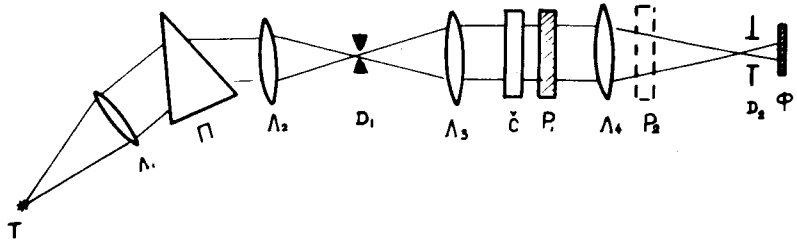

Рис. 1. Схема опыта по измерению коэффициента экстинкции в области оптического спектра и полных сечений взаимодействия при высоких энергиях.

Теоретическому обоснованию трансмиссионного метода посвящено большое количество работ /3,4,5,6/. Авторы практически каждой новой экспериментальной работы с уменьшением ошибки измерения вносят свои соображения относительно основ метода и необходимых поправок к измеряемым величинам, определяющих систематические погрешности при оценке полных сечений взаимодействия.

Среди всех факторов, ограничивающих точность измерения трансмиссионным методом, можно выделить группу, не связанную с самой идеей метода. Сюда относятся:

а/ быстродействие электронной аппаратуры, ее разрешающее и просчетное время;

б/ геометрическая определенность и стабильность во времени мишени-рассеивателя.

Сами по себе эти факторы могут играть существенную роль при выборе технических средств, но, поскольку трансмиссионный метод, как правило, базируется на методике сцинтилляционных и черенковских счетчиков, а техника производства мишеней достигла очень высокого уровня /7/, то указанные факторы не доминируют в суммарной систематической ошибке измерения полных сечений взаимодействия.

Главные трудности в измерениях полных сечений взаимодействия трансмиссионным методом связаны с решением следующих вопросов:

1. Выделение в измеряемых величинах чисто ядерного взаимодействия /процедура электромагнитных поправок/;

2. Экстраполяция в "нулевой телесный угол". Конечные размеры трансмиссионного счетчика приводят к тому, что часть провзаимодействовавших частиц попадает в апертуру счетчика: мишень сама становится источником /"светимость рассеивателя"/. Экстраполяция в нулевой телесный угол соответствует перемещению этого источника в бесконечность.

В дальнейшем будем рассматривать только эти два вопроса. Но прежде чем рассматривать общий случай, решим задачу в простейшем варианте, варианте "точечной геометрии".

Точечная геометрия

Будем называть геометрию трансмиссионного опыта точечной, если длина рассеивателя, содержащего n центров на квадратный сантиметр, равна нулю /что практически соответствует размещению мишени до объектива $Л_4$ /рис. 1// и распределение частиц /M/ по координате, перпендикулярной оси пучка (ρ), дельта-функциональное:

$$\frac{dM(\rho)}{d\rho} = M_0 \delta(\rho). \qquad /1/$$

В этом случае отсчеты детектора без рассеивателя /M/ и с рассеивателем (N) связаны с полным сечением взаимодействия (σ_{tot}) соотношением

$$\sigma_{tot} - \int_0^{t_i} \frac{d\sigma_Я}{dt} dt + \int_{t_i}^{\infty} \frac{d\sigma_{Э.М.}}{dt} dt = \frac{1}{n} \ln \frac{M}{N_i}, \qquad /2/$$

где t - максимальный четырехмерный квадрат переданного импульса i-ого трансмиссионного счетчика; $\frac{d\sigma_Я}{dt}$ - эффективное ядерное дифференциальное сечение, соответствующее неупругому "инклюзивному" процессу и упругому рассеянию; $\frac{d\sigma_{Э.М.}}{dt}$ - дифференци-

альное сечение электромагнитных взаимодействий. Функцию $\frac{d\sigma_я}{dt}$ можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\sigma_я}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}(0)e^{-bt} + \alpha^2 \frac{d\sigma}{dt}(0)e^{-Bt} + \frac{d\sigma_{in}}{dt}. \qquad /3/$$

Первые два числа в этом выражении описывают упругое рассеяние, третье - неупругие взаимодействия. Параметры B и b характеризуют зависимость действительной и мнимой частей амплитуды рассеяния от переданного четырехимпульса; α - отношение этих амплитуд при $t=0$; $\frac{d\sigma}{dt}(0)$ - квадрат мнимой части амплитуды рассеяния /при $t=0$ /, связанной с полным сечением взаимодействия соотношением /оптическая теорема/

$$\frac{d\sigma}{dt}(0) = \frac{\sigma^2_{tot}}{16\pi}. \qquad /4/$$

Используя аналитическую зависимость /3/, можно вычислить "светимость источника", обусловленную упругим рассеянием:

$$\int_0^{t_i} \frac{d\sigma_я}{dt} dt = \frac{d\sigma}{dt}(0)\left\{ \frac{1-e^{-bt_i}}{b} + \alpha^2 \frac{1-e^{-Bt_i}}{B} \right\}.$$

Поскольку величина $\frac{d\sigma}{dt}(0)$ измеряется экспериментально /соотношение /4//, то неопределенность в величине этого интеграла связана с неопределенностью в коэффициентах B, b, α. Можно показать, что при $t \sim 10^{-2}$ /ГэВ/с/^{2} величина интеграла составляет 400 *мкбарн*, а его неопределенность ~10 *мкбарн* и эта погрешность связана в основном с ошибкой в параметре b / $\Delta b \sim 2$ /ГэВ/с /^{2} /.

Вообще говоря, геометрия опыта может быть выбрана так, что трансмиссионный счетчик не будет регистрировать неупругие события. Действительно, помещая за рассеивателем дополнительную призму-монохроматор, в значительной степени можно уменьшить вероятность регистрации неупругих взаимодействий.

"Светимость источника", обусловленная неупругим рассеянием, определяется дифференциальным сечением "инклюзивного" процесса $\frac{d^2\sigma}{dx\,dp_\perp^2}$, в общем случае зависящим от трех переменных: масштабной переменной $x = p/p_{max}$, перпендикулярной составляющей импульса вторичной частицы $p_\perp$ и первичного импульса p_0. Если условия эксперимента таковы, что трансмиссионный счетчик, регистрирующий вторичные частицы в интервале углов от нуля до θ_i, имеет энергетический порог регистрации вторичных частиц x_{min}, то поправка к полным сечениям взаимодействия может быть записана в виде

$$\Delta\sigma_{in} = \int_{x_{min}}^{1} dx \int_0^{(p\theta_i)^2} \frac{d^2\sigma}{dx\,dp_\perp^2} d(p\theta_i)^2.$$

Если дифференциальное сечение неупругого процесса факторизуется:

$$\frac{d^2\sigma}{dx\,dp_\perp^2} = F(x, p_0)G(p_\perp^2),$$

и функция $G(p_\perp^2)$ имеет экспоненциальный характер:

$$G(p_\perp^2) \simeq \exp\{-b_{in}p_\perp^2\},$$

то поправка $\Delta\sigma_{in}$ может быть приведена к виду

$$\Delta\sigma_{in} = t_i\left\{ \int_{x_{min}}^{1} x^2 F(x, p_0)dx - \frac{b_{in}t_i}{2}\int_{x_{min}}^{1} x^4 F(x, p_0)dx + \ldots \right\},$$

где $t_i = (p_{max}\theta_i)^2$.

В случае предельной фрагментации /большие энергии/ функция $F(x, p_0)$ не зависит от импульса p_0 и поправка к полным сечениям, обусловленная неупругими взаимодействиями, зависит только от параметров t_i и x_{min}:

$$\Delta\sigma_{in} = t_i\left\{ \int_{x_{min}}^{1} x^2 F(x)dx - \frac{b_{in}t_i}{2}\int_{x_{min}}^{1} x^4 F(x)dx + \ldots \right\}.$$

Следует заметить, что зависимость $\Delta\sigma_{in}$ от параметра наклона b_{in} более слабая по сравнению с зависимостью $\Delta\sigma_{e\ell}$ от $b_{e\ell}$, так как

$$\frac{\int_{x_{min}}^{1} x^4 F(x)\,dx}{\int_{x_{min}}^{1} x^2 F(x)\,dx} < 1.$$

Поправку, обусловленную электромагнитным взаимодействием $\int_{t_i}^{\infty} \frac{d\sigma_{Э.М}}{dt}\cdot dt$, также легко вычислить. Функция $\frac{d\sigma_{Э.М.}}{dt}$ содержит два члена. Один соответствует интерференции кулоновской амплитуды с действительной частью ядерной:

$$2\alpha g \sqrt{\frac{d\sigma}{dt}(0)}\cdot \frac{1}{t} e^{-\frac{B}{2}t} F_N(t),$$

где $F_N(t)$ - формфактор рассеивателя и константа g равна $5{,}12\cdot 10^{-16}$ *см /ГэВ/с/*. Другой член в функции $\frac{d\sigma_{Э.М.}}{dt}$ обусловлен чисто электромагнитным рассеянием. Теория этого процесса для необходимых приложений разработана в работе Мольера /8/. Экспериментальная проверка этой теории в интервале углов от однократного до многократного рассеяния содержится в работе Hanson et al. /9/. Согласно экспериментальным данным для $t \lesssim (2\div 3)\langle t\rangle$ преобладает многократное рассеяние

$$\frac{d\sigma_{Э.М.}}{dt} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\langle t\rangle} e^{-\frac{t}{\langle t\rangle}},$$

где $\langle t\rangle$ - четырехмерный переданный импульс, соответствующий среднеквадратичному углу многократного рассеяния. При больших переданных импульсах хорошим приближением является функция

$$\frac{d\sigma_{Э.М.}}{dt} = \frac{g^2}{t^2}\left(1+\frac{r_1}{t}\right),$$

описывающая однократное и двукратное рассеяние. Параметр $r_1 \sim (1\div 2)\langle t\rangle$. Поскольку чисто электромагнитное рассеяние существенно только при малых величинах t, мы будем полагать формфактор $F_N(t)$ равным единице.

Таким образом, функция $\frac{d\sigma_{Э.М.}}{dt}$ может быть взята в виде

$$\frac{d\sigma_{Э.М.}}{dt} = 2\alpha\frac{g}{t}\sqrt{\frac{d\sigma}{dt}(0)}\,F_N(t)\,e^{-\frac{B}{2}t} + \begin{cases} \frac{1}{n\langle t\rangle} e^{-\frac{t}{\langle t\rangle}} & \text{при } t < t_k, \\ \frac{g^2}{t^2}\left(1+\frac{r_1}{t}\right) & \text{при } t > t_k. \end{cases} \qquad /5/$$

Параметр t_k определяется из условия сшивания. Теперь интеграл $\int_{t_i}^{\infty}\frac{d\sigma_{Э.М.}}{dt}dt$ можно легко вычислить. Его часть, связанная с интерференцией ($\Delta\sigma_n$), равна:

$$\Delta\sigma_n = -2\alpha g\sqrt{\frac{d\sigma}{dt}(0)}\,Ei\left(-\frac{B}{2}t_i\right), \qquad /6/$$

где $Ei\left(-\frac{B}{2}t_i\right)$ - интегральная показательная функция /см.Приложение/. При малых значениях аргумента имеет место приближение

$$\Delta\sigma_n = 2\alpha g\sqrt{\frac{d\sigma}{dt}(0)}\,\ln\frac{1}{1.781\,\frac{B}{2}t_i}. \qquad /7/$$

Вклад в интеграл $\int_{t_i}^{\infty}\frac{d\sigma_{Э.М.}}{dt}dt$ от чисто электромагнитного взаимодействия вычисляется элементарно:

$$\Delta\sigma_k(t_i > t_k) = \frac{g^2}{t_i}\left(1+\frac{r_1}{2t_i}\right). \qquad /8/$$

Как правило, условие $t_i > t_k$ выполняется.

Оценим порядок величины систематической ошибки при вычислении электромагнитных поправок к полным сечениям взаимодействия по формулам /6/ и /8/.

Очевидно, что поправка на чисто электромагнитное взаимодействие может быть сделана с той точностью, с какой известна сама величина t_i. Принципиальную неопределенность в оценку этой поправки может внести неопределенность в знании величин электромагнитных формфакторов взаимодействующих частиц. Эта неопределенность, например, для πN -взаимодействия при варьировании радиуса пиона в пределах

$$0 \leq r_\pi \leq 0{,}8\ Ф,$$

составляет около 3 *микробарн*. Следовательно, в пределах такой точности формфакторы частиц не влияют на точность вычислений электромагнитной поправки к полным сечениям взаимодействия.

Рассмотрим поправку к полным сечениям, связанную с интерференцией действительной части ядерной и кулоновской амплитуд. Согласно соотношению /6/ "интерференционная" поправка содержит два неизвестных параметра: отношение действительной части ядерной амплитуды рассеяния к мнимой (α) и параметр наклона $\frac{B}{2}$. Неопределенность в этих величинах и определяет систематическую погрешность в вычислении поправки к полным сечениям взаимодействия. Систематическая погрешность в вычислении поправки к полным сечениям, обусловленная неопределенностью в величине α, равна

$$2\Delta\alpha g\sqrt{\frac{d\sigma}{dt}(0)}\,\ell n\,\frac{1}{1.781\frac{B}{2}t_i},$$

где $\Delta\alpha$ - абсолютная ошибка в определении величины α. Для πN -взаимодействия при энергиях порядка 10 *ГэВ* погрешность $\Delta\alpha \sim 0{,}02$ и, следовательно, систематическая ошибка в определении поправки к полным сечениям не превышает 10 *микробарн*.

Оценим теперь систематическую ошибку в определении поправки к полным сечениям взаимодействия, обусловленную неопределенностью в параметре наклона действительной части амплитуды рассеяния ($\frac{B}{2}$). Из соотношения /7/ имеем:

$$2\alpha g\sqrt{\frac{d\sigma}{dt}(0)}\,\frac{\Delta B}{B}.$$

Таким образом, эта неопределенность вообще не зависит от аргумента t_i.

В настоящее время отсутствуют экспериментальные данные по параметру наклона $B/2$. Ситуация усложняется еще и тем, что t -зависимость "интерференционного" члена - определяется еще и формфактором $F_N(t)$ /соотношение /5//. Аппроксимируя формфактор экспоненциальной зависимостью и включая неопределенность параметра экспоненциальной зависимости в неопределенность параметра наклона B, получаем

$$\Delta B \simeq 3\ /ГэВ/с/^2.$$

Такая неопределенность в выборе формфактора в предположении, что величина α не зависит от $t(B=b)$, дает систематическую погрешность в вычислении "интерференциальной" поправки к полным сечениям взаимодействия порядка 15 *микробарн*.

Вообще говоря, для полноты картины следует рассмотреть поправку, обусловленную мнимой частью кулоновской амплитуды. Однако для переданных четырехимпульсов $t_i > 5\cdot 10^{-3}\ /ГэВ/с/^2$ эта поправка не превышает 4 *микробарн* и не может вносить заметный вклад в величину полных сечений взаимодействий.

В таблице просуммированы основные рассмотренные выше вклады в систематическую ошибку полных сечений / πN -взаимодействия, в частности/.

Таблица

Неопределенность	$\Delta b = 2\ /ГэВ/с/^2$	$\Delta\alpha = 0{,}02$	$\Delta B = 3\ /ГэВ/с/^{-2}$
Систематическая ошибка в микробарнах	10	10	15

Таким образом, можно сделать общий вывод: в случае точечной геометрии

$$\frac{dM(\rho)}{d\rho} = M_0 \delta(\rho)$$

измерения полных сечений взаимодействия по измерению величины сечения при одном значении переданного четырехимпульса /один трансмиссионный счетчик/ можно найти полное сечение взаимодействия введением известных поправок на "светимость источника". При этом возможная систематическая ошибка в полном сечении взаимодействия будет порядка 20 *микробарн.*

Протяженная геометрия трансмиссионного опыта

В протяженной геометрии опыта интегралы в выражении /2/ необходимо усреднить по длине рассеивателя (ℓ), если он размещен за объективом $Л_4$ /рис. 1/, и провести усреднение по распределению первичных /мониторных/ частиц

$$w(\rho) = \frac{dM}{d\rho}(\rho).$$

В распределении $w(\rho)$ можно выделить в основном три фактора: "аппаратурный", "фоновый" и "распадный". Аппаратурная часть распределения $w_A(\rho)$ определяется аберрациями магнитной оптики и, в первом приближении, описывается экспоненциального вида распределением

$$w_A(\rho) = \frac{C_1}{\langle \rho_A \rangle} e^{-\frac{\rho}{\langle \rho_A \rangle}} . \qquad /9/$$

В реальной постановке трансмиссионного эксперимента всегда присутствует на пути частиц постороннее /помимо рассеивателя/ вещество /счетчики, воздух и т.д./. "Светимость" этого постороннего вещества определяет "фоновое распределение" $w_Ф(\rho)$, которое также можно взять в виде

$$w_Ф(\rho) = \frac{C_2}{\langle \rho_Ф \rangle} e^{-\frac{\rho}{\langle \rho_Ф \rangle}} , \qquad /10/$$

где константа C_2 есть полное число фоновых взаимодействий $(n_Ф \sigma_Ф)$, а $\langle \rho_Ф \rangle^{-1}$ - параметр наклона рассеяния на фоновом веществе.

В случае измерения полных сечений взаимодействия нестабильных частиц /пионы, каоны/ возникает "распадная" компонента распределения мониторных частиц:

$$w_p(\rho) = \frac{C_3}{2\rho_{max}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}}} . \qquad /11/$$

Коэффициент C_3 есть просто доля распадов /примесь мюонов в первичном пучке/, а ρ_{max} - максимально возможный по кинематике распада квадрат переданного четырехимпульса:

$$\rho_{max} = \left(\frac{m}{\mu} p\right)^2 , \qquad /12/$$

где m - масса распадающейся частицы, μ - масса мюона и p - импульс мюона в системе покоя распадающейся частицы. Для пионов и каонов величина ρ_{max} равна соответственно $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ и 1,2 */ГэВ/с/*^{2}.

В экспериментах по измерению полных сечений практически всегда мюонная компонента, отфильтрованная ядерным поглотителем, включается на антисовпадение к трансмиссионному детектору и, следовательно, коэффициент C_3 необходимо умножить на неэффективность исключения мюонной компоненты указанным методом:

$$C_3 = C_3^{(0)} (1 - \epsilon_\mu).$$

Вообще говоря, все три рассмотренных фактора, формирующих результирующее распределение $w(\rho)$, действуют одновременно. Однако, в первом приближении, суммарное распределение $w(\rho)$ будем считать равным

$$w(\rho) = w_A(\rho) + w_Ф(\rho) + w_p(\rho). \qquad /13/$$

При этом коэффициент C_1 будем определять из условия нормировки на единичный мониторный отсчет:

$$\int_0^\infty w(\rho)\,d\rho = 1 .$$

Отличие протяженной геометрии опыта от точечной состоит в том, что в соотношении /2/, соответствующем парциальному сечению взаимодействия σ_i, необходимо усреднить отсчеты M и N_i по распределению $w(\rho)$. Мы будем полагать, что отсчеты на "пустой" мишени N(П) распределены по закону

$$w(\rho) = \frac{dN(П)}{d\rho} = \sum \frac{C_j}{\langle\rho_j\rangle} e^{-\frac{\rho}{\langle\rho_j\rangle}}, \qquad /14/$$

где $\langle\rho_1\rangle = \langle\rho_A\rangle$ и $\langle\rho_2\rangle = \langle\rho_\Phi\rangle$. Очевидно, что i -ый трансмиссионный счетчик, соответствующий максимальному значению параметра ρ_i, в случае "пустой" мишени зарегистрирует N_i (П) отсчетов:

$$N_i(П) = \int_0^{\rho_i} \frac{dN(П)}{d\rho}\,d\rho = \sum C_j\left(1 - e^{-\frac{\rho}{\langle\rho_j\rangle}}\right). \qquad /15/$$

Вещество рассеивателя изменяет распределение частиц. Если дифференциальное сечение на веществе рассеивателя имеет экспоненциальный вид

$$\frac{d\sigma_Я}{d\tau} = A e^{-a\tau}, \qquad /16/$$

то распределение частиц $\frac{dN_Я(P)}{d\rho}$ после "включения" ядерного рассеяния, очевидно, будет иметь следующий вид:

$$\frac{dN_Я(P)}{d\rho} = e^{-\sigma_t n}\frac{dN(П)}{d\rho} + \int_0^n e^{-\sigma_t x}dx \int_0^\infty \frac{dN(П)}{d\rho'}\,d\rho' \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A e^{-a\tau}\,d\phi, \qquad /17/$$

где $\tau = \rho + \rho' - 2\sqrt{\rho\rho'}\cos\phi$ и σ_t - полное сечение ядерного взаимодействия.

Распределение $\frac{dN_Я(P)}{d\rho}$ необходимо усреднить еще и по многократному электромагнитному рассеянию, которое

при малых углах рассеяния описывается экспоненциальной функцией

$$\frac{d\sigma_k}{d\tau} = \frac{1}{\langle t\rangle} e^{-\frac{\tau}{\langle t\rangle}},$$

где $\langle t\rangle$ - среднее значение четырехимпульса, соответствующее среднеквадратичному углу многократного рассеяния. Таким образом, суммарное распределение частиц при "включении" ядерного и многократного взаимодействий будет иметь вид:

$$\frac{dN(\rho)}{d\rho} = \int_0^\infty \frac{dN_Я(P)}{d\rho''}\,d\rho'' \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\langle t\rangle} e^{-\frac{\tau'}{\langle t\rangle}}\,d\phi, \qquad /18/$$

где $\tau' = \rho + \rho'' - 2\sqrt{\rho\rho''}\cos\phi$.

Соотношение /17/ легко интегрируется:

$$\frac{dN(P)}{d\rho} = e^{-\sigma_t n}\Big\{\sum \frac{C_j}{\langle\rho_j\rangle + \langle t\rangle} e^{-\frac{\rho}{\langle\rho_j\rangle + \langle t\rangle}} + \frac{A}{a}\,\frac{1 - e^{-\sigma_t n}}{\sigma_t}\sum \frac{C_j}{\frac{1}{a} + \langle\rho_j\rangle + \langle t\rangle} \times$$

$$\times\, e^{-\frac{\rho}{\frac{1}{a} + \langle\rho_j\rangle + \langle t\rangle}}\Big\}, \qquad /19/$$

и, следовательно, i -й трансмиссионный счетчик зарегистрирует число отсчетов, равное

$$N_i(P) = e^{-\sigma_t n}\Big\{\sum C_j\left(1 - e^{-\frac{\rho_i}{\langle\rho_j\rangle + \langle t\rangle}}\right) + \frac{A}{a}\,\frac{1 - e^{-\sigma_t n}}{\sigma_t}\sum C_j\left(1 - e^{-\frac{\rho_i}{\frac{1}{a} + \langle\rho_j\rangle + \langle t\rangle}}\right)\Big\}. \qquad /20/$$

Парциальное сечение σ_i для соответствующего счетчика в случае протяженной геометрии /П.Г./, зависящее от величин σ_t, n, A, a, $\langle t\rangle$, $\langle\rho_j\rangle$, по определению, равно:

$$\sigma_i^{П.Г.} = \frac{1}{n}\,\ln\frac{N_i(П)}{N_i(P)}. \qquad /21/$$

В случае точечной геометрии /Т.Г./ парциальное сечение $\sigma_i^{Т.Г.}$ может быть найдено из соотношения /21/ при $\langle\rho_j\rangle \equiv 0$. В дальнейшем, чтобы выяснить влияние геометрии опыта на величину предела последовательности парциальных сечений σ_i /получаемого с помощью аналитической функции регрессии/ при стремлении ρ_i к нулю на конечном экспериментально заданном интервале $\rho_{min} \div \rho_{max}$, мы рассмотрим разницу:

$$\Delta\sigma_i = \sigma_i^{Т.Г.} - \sigma_i^{П.Г.} = \qquad /22/$$

$$= \frac{1}{n}\,\ell n\,\frac{\Sigma C_j\left(1-e^{-\frac{\rho_i}{\langle\rho_j\rangle+\langle t\rangle}}\right)+\frac{A}{a}\,\frac{1-e^{-\sigma_t n}}{\sigma_t}\,\Sigma C_j\left(1-e^{-\frac{\rho_i}{\frac{1}{a}+\langle\rho_i\rangle+\langle t\rangle}}\right)}{\left[1-e^{\frac{\rho_i}{\langle t\rangle}}+\frac{A}{a}\,\frac{1-e^{-\sigma_t n}}{\sigma_t}\left(1-e^{-\frac{\rho_i}{\frac{1}{a}+\langle t\rangle}}\right)\right]\Sigma C_j\left(1-e^{-\frac{\rho_i}{\langle\rho_j\rangle}}\right)}.$$

Очевидно, что предел последовательности величин $\Delta\sigma_i$, получаемый с помощью аналитической функции регрессии, выбранной для фитирования величин $\sigma_i^{П.Г.}$ /для заданного интервала $\rho_{min} \div \rho_{max}$/, определяет систематическую погрешность процедуры экстраполяции, связанную с протяженностью геометрии опыта. Следует подчеркнуть, что этот предел не равен нулю при $\rho_i \to 0$.

В опубликованных работах по измерению полных сечений взаимодействия, выполненных методикой трансмиссионных счетчиков, не исследуется влияние неточечности геометрии опыта на экстраполяционную процедуру. С другой стороны, имеются экспериментальные данные [10,11] работ по измерению полных сечений взаимодействия протонов с протонами и дейтерием при одном и том же импульсе первичных частиц /3 *ГэВ/с*/, в которых наблюдается необъяснимая /в пределах ошибок эксперимента/, как утверждается в работе [12], разница в измеренных величинах σ_t:

$$\Delta\sigma_{pp} = 140 \pm 70 \text{ микробарн},$$
$$\Delta\sigma_{pd} = 1090 \pm 90 \text{ микробарн}.$$

Согласно условиям эксперимента работы [10] и [11] существенно различаются по коэффициенту C_2 /соотношение /10//, то есть по количеству фонового вещества. В работе [10] $C_2 = 10^{-2}$, в работе [11] $C_2 = 10^{-1}$. Все остальные необходимые параметры в выражении /22/ одного порядка.

Оценим влияние неточечности геометрии на процедуру экстраполяции экспериментальных данных в нулевой телесный угол. Дифференциальное ядерное рассеяние возьмем в виде суммы неупругого и упругого взаимодействий:

$$\frac{d\sigma}{dt} = A_{in}\,e^{-a_{in}t} + B_{e\ell}\,e^{-a_{e\ell}t}.$$

Параметры этой функции имеют следующие значения [11]: для pp -взаимодействия $A_{in} = A_{e\ell} = 110$ *мбарн//ГэВ/с/*^{2}, $a_{in} = a_{e\ell} = 8$ */ГэВ/с/*$^{-2}$; для pd -взаимодействия $A_{in} \sim 220$ *мбарн//ГэВ/с/*^{2}, $A_{e\ell} \sim 440$ *мбарн//ГэВ/с/*^{2}, $a_{in} = 8$ */ГэВ/с/*$^{-2}$ и $a_{e\ell} = 35$ */ГэВ/с/*$^{-2}$.

На рис. 2 приведены результаты вычислений разницы величин $\Delta\sigma_i$ /соотношение /22// для геометрии эксперимента работ [10,11] с параметрами распределения частиц в первичном пучке $\langle\rho_A\rangle = 5\cdot 10^{-4}$ */ГэВ/с/*$^{-2}$, $\langle\rho_\Phi\rangle = 10^{-2}$ */ГэВ/с/*$^{-2}$. Сплошные кривые дают результат вычислений по соотношению /22/, пунктирные есть результат экстраполяции с помощью функции регрессии вида

$$\Delta\sigma_i = A + Bt + Ct^2$$

в точку $t=0$. Как видно из рисунка, экстраполяция в нулевой телесный угол дает разницу для pp -взаимодействия порядка 180 *микробарн* и для pd -взаимодействия порядка 400 *микробарн*. Таким образом, учет неточечности геометрии полностью объясняет разницу в полных сечениях pp-взаимодействия /140±70 *микробарн*/ и значительную часть разницы в pd -взаимодействии. Следует подчеркнуть следующее обстоятельство. Из рис. 2 видно, что зависимость $\Delta\sigma_i$ от четырехимпульса t не может быть описана квадратичным полиномом по t. По-видимому, именно это обстоятельство приводит к тому, что результат экстраполяции экспериментальных данных σ_i протяженной геометрии не является устойчивым относительно изменения интервала $t_{min} \div t_{max}$.

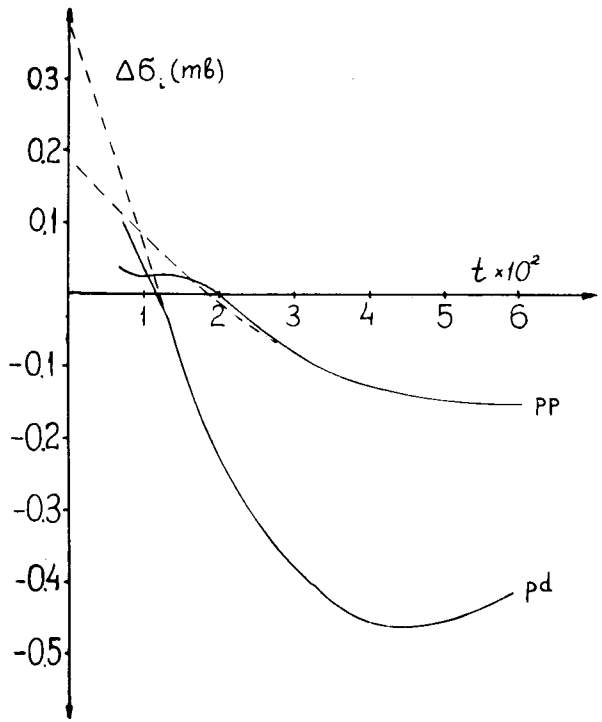

Рис. 2. Поправка к полным сечениям взаимодействия в зависимости от четырехмерного переданного импульса для протяженной геометрии опыта.

С другой стороны, поскольку параметры, характеризующие распределение частиц в пучке ($<\rho_j>, C_j$), строго говоря, не известны в конкретной постановке трансмиссионного эксперимента, а сама поправка $\Delta\sigma$ и ее зависимость от аргумента t существенно меняются при варьировании этих параметров, то можно думать, что именно эта поправка вносит наибольшую неопределенность в измерения полных сечений взаимодействия с помощью метода трансмиссионных счетчиков.

Точный расчет рассмотренных поправок /по методу Монте-Карло/ возможен, если достаточно хорошо известны параметры пучка, т.е. функция распределения $w(\rho)$.

Обычно функция $w(\rho)$, часто называемая "профилем пучка", в трансмиссионных экспериментах находится экспериментально с помощью узкого сцинтилляционного счетчика. Следует подчеркнуть, что рассмотренная поправка в интервале переданных четырехимпульсов $10^{-2} \div 5\cdot 10^{-2}$ соответствует счету в "профиле пучка" $10^{-2} \div 10^{-3}$ по отношению к счету в максимуме.

Как можно видеть из рисунка, рассмотренная поправка дает существенно разный вклад в величины полных сечений взаимодействия в зависимости от области переменной t, где проводятся измерения. Это обстоятельство усложняет процедуру экстраполяции к нулевым значениям t.

Экстраполяционная процедура

Экстраполяционная процедура в методе трансмиссионных счетчиков состоит в нахождении предела последовательности экспериментально измеряемых величин /после вычитания вклада электромагнитных взаимодействий/

$$\frac{1}{n}\ln\frac{M}{N_i} - \int_{t_i}^{\infty}\frac{d\sigma_{Э.М.}}{dt}\,dt = \sigma(t_i)$$

при стремлении t_i к нулю методом максимума правдоподобия:

$$\sigma_t = \lim \sigma(t_i).$$

Обычно экстраполяционная процедура сводится к нахождению функции регрессии, наилучшим образом описывающей зависимость величин $\sigma(t_i)$ /либо их логарифмов/ от аргумента t_i. В качестве функции регрессии выбирается, как правило, полином вида

$$\sigma(t_i) = \sum_{k=1}^{m} a_k t_i^{k-1}. \qquad /23/$$

Задача экстраполяционной процедуры состоит в нахождении коэффициентов разложения a_k. Очевидно, что $\sigma_{tot} = a_1$ и максимальное число коэффициентов разложения не должно превышать число экспериментальных точек: $m \le i_{max}$.

Прежде всего рассмотрим простейший случай: $m = i_{max}$.

Коэффициенты разложения a_k можно найти, решая систему линейных уравнений. Пусть для простоты $t_i = i t_1$. Тогда имеем:

$$\sigma_{tot} = 2\sigma(t_1) - \sigma(t_2) \qquad (i=2),$$
$$\sigma_{tot} = \sigma(t_3) + 3[\sigma(t_1) - \sigma(t_2)] \quad (i=3),$$
$$\sigma_{tot} = 4[\sigma(t_1) + \sigma(t_3)] - 6\sigma(t_2) - \sigma(t_4) \quad (i=4).$$

Для равноточных измерений величин $\sigma(t_i)$ ошибка в σ_{tot} равна:

$$\Delta\sigma_{tot} = \sqrt{5}\,\Delta\sigma, \qquad i=2,$$
$$\Delta\sigma_{tot} = \sqrt{19}\,\Delta\sigma, \qquad i=3,$$
$$\Delta\sigma_{tot} = \sqrt{69}\,\Delta\sigma, \qquad i=4.$$

Эта простая модель при всей своей "парадоксальности" /увеличение числа экспериментальных точек (i) сильно увеличивает ошибку в величине σ_{tot} / иллюстрирует важность высокочастотных компонент /большие K / в выражении /23/.

Стандартная процедура уменьшения числа членов в сумме /23/ определена в методе максимального правдоподобия. Необходимое число коэффициентов в выражении /23/ определяется из условия

$$\chi^2 \simeq (i_{max} - k), \qquad /24/$$

т.е. сумма квадратов отношений разностей экспериментальных значений $\sigma(t_i)$ и соответствующих величин функции регрессии к статистической ошибке в величине $\sigma(t_i)$ должна быть равна разности между числом экспериментальных точек (i) и числом варьируемых параметров (k).

Однако основной вопрос экстраполяционной процедуры заключается в определении систематической погрешности в величине полных сечений взаимодействия, т.е. параметра a_1.

Можно выделить два источника систематической ошибки. Во-первых, это отсутствие полной информации об аналитическом виде функции регрессии, во-вторых - систематические погрешности в экспериментальных величинах $\sigma(t_i)$ и в особенности их зависимость от аргумента t, связанная с неточечностью геометрии опыта.

Выводы

1. Систематическая ошибка в измерениях полных сечений взаимодействия трансмиссионным методом /протяженная геометрия опыта/ определяется фоновым рассеянием и процедурой экстраполяции в нулевой телесный угол и по порядку величины составляет 100÷300 *микробарн.*

2. Метод трансмиссионных счетчиков может быть приведен к практически точечной геометрии при следующих условиях:

а/ рассеиватель должен размещаться в параллельном участке первичного пучка,

б/ количество фонового вещества должно быть сведено к нулю, либо

в/ в процессе эксперимента должно измеряться "фоновое распределение" $w(\rho)$ с необходимой точностью.

Приложение

Действительные ветви интегральных показательных функций допускают представление в виде

$$Ei(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^t}{t}\,dt,$$

$$Ei^*(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt,$$

где второй интеграл понимается как главное значение.

При $x \gg 1$ функции имеют асимптотики:

$$Ei(-x) \simeq \frac{e^{-x}}{-x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots\right),$$

$$Ei^*(x) \sim \frac{e^x}{x}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2!}{x} + \frac{3!}{x} + \dots\right).$$

При $x \ll 1$ имеем: $Ei^*(x) \simeq Ei(-x) \simeq \ln \gamma x$,

где γ - постоянная Эйлера /$\gamma = 1{,}781$/.

Литература

1. F.A.Jenkins, H.E.White. Fundamentals of Optics, London (1957).
2. Р.В.Поль. Оптика и атомная физика. "Наука", М., 1966.
3. R.M.Sternheimer. Rev. of Scient. Instr., v.25, 1070 (1954).
4. U.Amaldi, T.Fazzini, G.Fidecaro, C.Ghesquiere, M.Legros and Steiner. Nuovo Cimento, v.34, No. 4, 825 (1964).
5. D.V.Bugg, D.C.Salter, G.H.Stafford, R.F.George, K.F.Riley and R.J.Tapper. Phys.Rev., v. 146, No. 4, 980 (1966).
6. Ю.П.Горин, С.П.Денисов, С.В.Донсков, А.И.Петрухин, Ю.Д.Прокошкин, Д.А.Стоянова, Дж.В.Аллаби, Дж.Джакомелли. ЯФ, т. 14, вып. 5 /1971/.
7. Ю.Т.Борзунов, Л.Б.Голованов, В.Л.Мазарский, А.П.Цвинев. Сообщение ОИЯИ, Р8-5212, Дубна, 1970.
8. G.Moliere. Zs. F. Naturforschung, 3a, 78 (1948).
9. A.O.Hanson, L.H.Lanzl, E.M.Lyman, and M.B.Scott. Phys.Rev., v.84, 634 (1951).
10. D.V.Bugg, D.C.Salter, G.H.Stafford, R.F.George, K.F.Riley, R.J.Tapper. Phys.Rev., 146, 980 (1966).
11. R.J.Abrams, R.L.Cool, G.Giacomelli, T.F.Kycia, B.A.Leontic, K.K.Li, D.N.Michael. Phys.Rev., D1, 2477 (1970).
12. K.F.Riley. Phys.Rev., D1, 2481 (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
31 октября 1974 года.