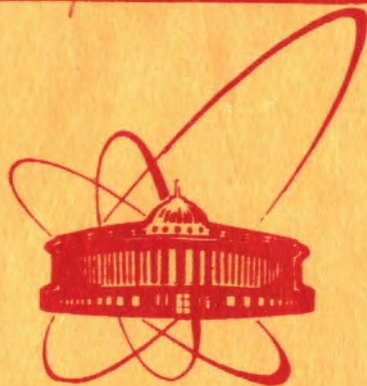


2764/2-80

23/VI-80



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

1-80-150

Б.З.Белашев, М.К.Сулейманов, А.П.Чеплаков

ФУРЬЕ-АЛГОРИТМ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
ПРОЦЕССА МНОЖЕСТВЕННОГО
РОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ

Направлено в ПТЭ

1980

1. Известно, что пространственно-временные характеристики процесса множественного рождения могут быть получены при изучении корреляций множественных частиц с близкими 4-импульсами. Вероятность обнаружения двух тождественных частиц с 4-импульсами $P_1 = \{\epsilon_1, \vec{p}_1\}$ и $P_2 = \{\epsilon_2, \vec{p}_2\}$, испущенных двумя точечными источниками с координатами $\{t', \vec{r}'\}$ и $\{t'', \vec{r}''\}$, с точностью до постоянных множителей определяется формулой /1/

$$W(q_0, \vec{q}) = 1 + \frac{\cos[\vec{q}(\vec{r}' - \vec{r}'') - q_0(t' - t'')]}{1 + (q_0 r)^2}, \quad /1/$$

где $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$, $q_0 = \epsilon_1 - \epsilon_2$, r - время жизни источников.

В действительности источники частиц характеризуются некоторым распределением в области генерации /ОГ/, поэтому формула /1/ должна быть усреднена по переменным $\vec{r}' - \vec{r}''$ и $t' - t''$. Для совокупности источников, распределение которых описывается одним пространственно-временным параметром, по известной зависимости $W(q_0, \vec{q})$ оказывается возможным оценить размер и время жизни ОГ. При обработке экспериментальной информации распределение источников обычно полагается однопараметрическим, например, гауссовым. Естественной следует считать и ситуацию, когда ОГ характеризуется несколькими пространственно-временными параметрами /2/. В этом случае для обработки данных эксперимента необходимо еще определить число этих параметров.

Однако существует и иной, основанный на фурье-алгоритме и в принципе не связанный с таким предположением, метод анализа экспериментальной информации. В настоящей работе рассматривается возможность его применения для определения пространственных характеристик ОГ.

2. Мы ограничимся рассмотрением способа получения информации о пространственном распределении источников в ОГ. Временная зависимость $W(q_0, \vec{q})$ исчезает, если производится отбор тождественных частиц с одинаковыми энергиями, т.е. с $q_0 = 0$.

Введя нормированную неотрицательную функцию распределения источников $f(\vec{R})$ по переменной $\vec{R} = \vec{r}' - \vec{r}''$, формулу для вероятности $W(\vec{q})$ можно записать в виде

$$W(\vec{q}) = 1 + \int f(\vec{R}) \cos(\vec{q}\vec{R}) d\vec{R}, \quad /2/$$



где $f(\vec{R}) = f(-\vec{R})$, в связи с чем $W(\vec{q})$, определяемая формулой /1/, не зависит от знака \vec{R} . Это связано с тождественностью частиц, а именно: с возможностью пронумеровать две тождественных частицы и их источники двумя равноправными способами. Условие симметрии $f(\vec{R})$ относительно операции пространственной инверсии означает действительность фурье-образа $\mathcal{F}(\vec{q})$ функции $f(\vec{R})$. Последнее слагаемое в формуле /2/ как раз и является этим фурье-образом. Так получается формула

$$W(\vec{q}) = 1 + \mathcal{F}(\vec{q}), \quad /3/$$

и экспериментальное распределение можно рассматривать в соответствии с ней. Представляющий интерес член $\mathcal{F}(\vec{q})$ может быть определен из /3/ посредством вычитания единицы [экспериментально - вычитанием постоянного фона], а функция $f(\vec{R})$, несущая информацию о пространственных характеристиках ОГ, находится в результате обратного фурье-преобразования $\mathcal{F}(\vec{q})$. Алгоритм фурье-преобразования легко осуществим на ЭВМ и может быть использован для определения $f(\vec{R})$ по экспериментальной зависимости $W(\vec{q})$. Вычисленная таким образом функция $f(\vec{R})$ удобна для сопоставления с аналогичными функциями, рассчитанными на основе модельных представлений.

3. Введем нормированную плотность распределения источников $\rho(\vec{r})$, в отличие от ранее рассмотренной функции $f(\vec{R})$, представляющей плотность распределения их пар. В ряде случаев функция $\rho(\vec{r})$ также может быть определена по экспериментальной зависимости $W(\vec{q})$. В рамках статистической теории множественного рождения частиц источники можно считать независимыми. Тогда вероятность обнаружения двух тождественных частиц с разностью импульсов \vec{q} получается в результате умножения /1/ на $\rho(\vec{r}') \cdot \rho(\vec{r}'')$ и интегрирования по обеим переменным \vec{r}' и \vec{r}'' :

$$W(\vec{q}) = 1 + \frac{1}{2} \left\{ \int \rho(\vec{r}') e^{i\vec{q}\vec{r}'} d\vec{r}' \int \rho(\vec{r}'') e^{-i\vec{q}\vec{r}''} d\vec{r}'' + \int \rho(\vec{r}') e^{-i\vec{q}\vec{r}'} d\vec{r}' \int \rho(\vec{r}'') e^{i\vec{q}\vec{r}''} d\vec{r}'' \right\}. \quad /4/$$

Учет действительности $\rho(\vec{r})$ позволяет переписать /4/ в виде трехмерного фурье-образа $G(\vec{q})$ функции $\rho(\vec{r})$:

$$W(\vec{q}) = 1 + |G(\vec{q})|^2. \quad /5/$$

Если считать $\rho(\vec{r})$ симметричной относительно операции пространственной инверсии, тогда $G(\vec{q})$ - действительная функция. Выполнение этого условия обеспечено в процессе множественного рождения при столкновении одинаковых частиц, например, в pp - взаимодействии. Из /5/ в этом случае получается формула

$$W(\vec{q}) = 1 + G^2(\vec{q}). \quad /6/$$

При однозначном выделении $G(\vec{q})$ из /6/ функция $\rho(\vec{r})$ может быть восстановлена при помощи преобразования Фурье. Однозначность же выделения будет иметь место при знакопостоянстве $G(\vec{q})$. Это условие ограничивает возможные распределения источников определенным классом функций. Вместе с тем этот класс достаточно широк и, как правило, пригоден для анализа экспериментальной информации. Действительно, $G^2(\vec{q})$ в большинстве случаев обращается в нуль лишь на границах рассматриваемой области \vec{q} . Внутри нее условие знакопостоянства $G(\vec{q})$ можно считать выполненным. К этому классу функций принадлежит, в частности, гауссиан и линейная комбинация гауссианов. С их помощью возможна аппроксимация функции $\rho(\vec{r})$, определенной в эксперименте.

4. Результаты интерференционного эксперимента в настоящее время еще недостаточно статистически обеспечены для использования фурье-анализа, так как необходимая статистика - это приблизительно $10^6 - 10^7$ событий. Однако при увеличении статистических данных описанный способ может оказаться полезным. Поэтому целесообразно рассмотреть его методические аспекты.

Отметим источники ошибок, имеющих место при восстановлении функции по ее фурье-образу. Преобразование Фурье неустойчиво по высоким пространственным частотам /большие $|\vec{q}|$ /. Присутствие их в фурье-образе, полученном из эксперимента и характеризующимся некоторой статистической ошибкой, может привести к ложным высокочастотным осцилляциям большой амплитуды в искомой функции. Однако в интерференционном эксперименте вклад высоких пространственных частот незначителен и может быть еще более уменьшен в результате умножения фурье-образа на фильтрующую функцию /8/.

Другой источник ошибок обусловлен дискретизацией фурье-образа вследствие конечного разрешения по \vec{q} . Дискретизированный фурье-образ может быть представлен в виде произведения непрерывного фурье-образа и функции прямоугольного окна*. Тогда восстановленная функция будет связана с непрерывной соотношением ее свертки со спектральной функцией окна. При этом их отличие может быть значительным. Уменьшение ошибки этого типа достигается благодаря использованию более оптимальных трехмерных окон, построенных на основе окон Хэмминга, Кайзера или Гаусса /4/.

* Функция прямоугольного окна равна единице в центре каждого элемента разрешения Δ , нулю - во всех остальных точках.

5. Вывод из ЭВМ информации о трехмерных функциях $\rho(\vec{r})$ и $f(\vec{R})$ удобно осуществлять в двумерном виде. Рассмотрим два способа такого представления трехмерной функции /в частности, $\rho(\vec{r})$ /:

А. Функцию $\rho(\vec{r})$ представим в виде двумерных "проекций" на систему непараллельных плоскостей. Под двумерной проекцией трехмерной функции $\rho(x,y,z)$ на плоскость XOY будем понимать $\mathcal{P}(x,y) = \int_0^{\infty} \rho(x,y,z) dz$. Такое представление $\rho(\vec{r})$ позволяет на стадии обработки оперировать только двумерными фурье-образами. Для этого производится отбор "узких" пар тождественных частиц с определенным направлением \vec{n} скорости пары \vec{v} . Из соотношения $\vec{q} \cdot \vec{v} = q_0$ имеем $\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$, так как отбираются пары тождественных частиц с $q_0 = 0$. Если осью OZ системы координат выбрано направление \vec{n} , то в импульсной системе, совпадающей с координатной, $q_z = 0$. Легко показать, что в этом случае $G(q_x, q_y, 0)$ соответствует /в смысле преобразования Фурье/ двумерной проекции $\rho(\vec{r})$ на плоскость XOY: $G(q_x, q_y, 0) \div \mathcal{P}(x,y)$. Меняя \vec{n} , можно получить серию двумерных проекций на систему соответствующих непараллельных плоскостей. В качестве примера рассматривалась совокупность источников, распределенных в некоторой штрихованной системе координат по закону

$$\rho(\vec{r}') \sim \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x'^2 + y'^2}{A^2} + \frac{z'^2}{B^2} \right) \right]$$

с фурье-образом

$$G(\vec{q}) \sim \exp \left[-\frac{1}{2} (q_x'^2 A^2 + q_y'^2 A^2 + q_z'^2 B^2) \right],$$

$A = 6 \cdot 10^{-18}$ см, $B = 4 \cdot 10^{-13}$ см. На рис. 1 для четырех различных \vec{n} показана серия двумерных проекций, полученных в результате описанной процедуры. При расчете на ЭВМ CDC-6500 использовалась функция прямоугольного окна и для удобства наблюдения проекции функция $\mathcal{P}(x,y)$ увеличивалась в 50 раз. Изображения проекции выводились на экран дисплея и фотографировались.

Б. Используя второй метод, $\rho(\vec{r})$ представляем с помощью сечений в виде системы параллельных плоскостей. Отбор пар тождественных частиц ведется по всем направлениям \vec{n} и в пространстве (q_x, q_y, q_z) заполняются соответствующие элементы разрешения. Таким образом, получается трехмерный фурье-образ $G(q_x, q_y, q_z)$. При восстановлении $\rho(\vec{r})$ используется техника трехмерного фурье-преобразования. Программа для ЭВМ строится на основе одномерных быстрых фурье-преобразований /см. приложение/. Итогом работы программы является трехмерная функция $\rho(x,y,z)$. При фиксированной координате $z=a$ описывается распределение источников в сечении ОГ плоскостью $z=a$. Для заданного в импульсной штрихованной системе координат $G(\vec{q}') \sim \exp \left[-\frac{1}{2} (q_x'^2 A^2 + q_y'^2 A^2 + q_z'^2 B^2) \right]$ функция $\rho(x',y',z')$ определялась в результате фурье-преобразования.

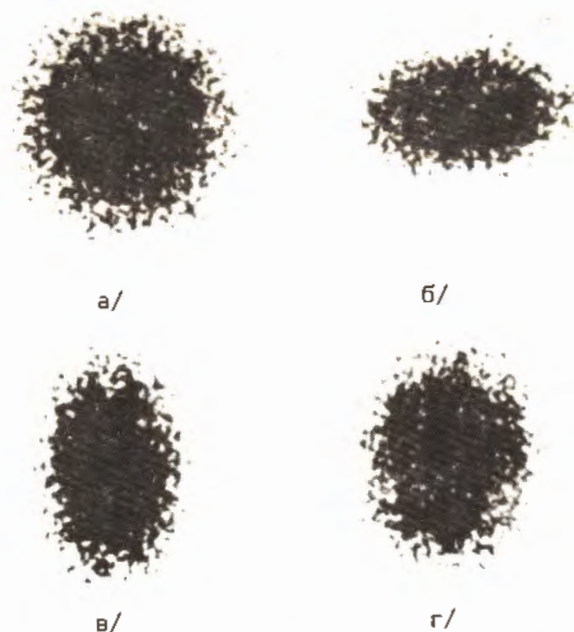


Рис. 1. Серия "проекций" $\rho(\vec{r}')$, полученная при отборе частиц в направлении \vec{n} , лежащем в плоскости X'O'Z' и составляющем с осью O'Z' угол α : а/ $\alpha = 0^\circ$; б/ $\alpha = 90^\circ$; в/ $\alpha = 60^\circ$; г/ $\alpha = 45^\circ$; q_x' , q_y' , q_z' изменялись в интервале от $-0,4$ ГэВ/с до $+0,4$ ГэВ/с. Масштаб $10^{12}: 1$.

Совокупность ее сечений, полученная при помощи системы параллельных равноотстоящих от оси O'Z' плоскостей, изображена на рис. 2, $A = 3 \cdot 10^{-18}$ см, $B = 8 \cdot 10^{-13}$ см.

Сравним характеристики этих методов. Первый требует незначительных затрат машинного времени и небольшого объема памяти. Полученная с его помощью информация является интегральной. Для характеристики ОГ она может оказаться достаточной, впрочем, возможна и дальнейшая ее интерпретация, например, с помощью алгоритма, описанного в работе /5/. Второй метод непосредственно дает локальную плотность распределения источников, но представление нескольких функций в трехмерном виде приводит к полной загрузке памяти ЭВМ. По этой причине анализ больших массивов информации затруднен.

Рис.2. Сечения функции $\rho(\vec{r})$, полученной в численном эксперименте, q_x, q_y, q_z изменялись в интервале от $-0,4$ ГэВ/с до $+0,4$ ГэВ/с. Масштаб $10^{12}:1$.

Авторы благодарны Л.М.Сороко за полезные замечания по вопросам фурье-спектроскопии, А.А.Байрамову, В.Гудовски, В.С.Дацко, В.Пэрыту за консультации по программированию и в особенности М.И.Подгорецкому за постоянное внимание к работе, многочисленные критические замечания и плодотворные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Блок-схема программы трехмерного фурье-преобразования

Основу трехмерного фурье-преобразования составляют одномерные быстрые фурье-преобразования (FFT). Они обычно используются для спектрального анализа временных процессов. При этом интерес представляют только положительные частоты; отрицательные частоты, не имеющие физического смысла, программой FFT либо не приводятся, либо приводятся в отрыве от положительных. При проведении фурье-анализа пространственных распределений отрицательные пространственные частоты вполне реальны и должны примыкать к положительным со стороны нулевой частоты. Поэтому использование одномерного FFT для трехмерного фурье-преобразования пространственного распределения требует соответствующих представлений - либо исходной функции, либо ее фурье-образа. В блок-схеме /рис.3/ представление исходной трехмерной функции $G(\vec{q})$ в соответствии с требованиями одномерного FFT производится на предварительном этапе А. Трехмерный куб памяти, на котором задается дискретная трехмерная функция, равномерно разбивается на элементы разрешения. Каждому из этих элементов присваивается номер (i, j, k) .

Индекс k нумерует равноотстоящие друг от друга и перпендикулярные оси OZ плоскости куба, i - строки, а j - столбцы двумерной матрицы в каждой плоскости; N - максимальное значение, которое могут принимать i, j, k . На этапе В осуществляются фурье-

Рис.3. Блок-схема программы трехмерного фурье-преобразования.

преобразования в каждой плоскости. При этом производятся одномерные FFT во всех строках двумерной матрицы, а затем - во всех столбцах. Этап С состоит из FFT по индексу k при всех постоянных i и j . На заключительном этапе Д ЭВМ выводит при $k = \text{const}$ сечения трехмерной функции $\rho(i, j, k)$, полученной в результате трехмерного FFT.

ЛИТЕРАТУРА

1. Копылов Г.И., Подгорецкий М.И. ЯФ, 1974, 19, с.464.
2. Ледницки Р., Подгорецкий М.И. ЯФ, 1979, 30, с.837.
3. Василенко Г.И. Теория восстановления сигналов. "Советское радио", М., 1979.
4. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. "Мир", М., 1978.
5. Goiten M. Nucl. Instr. & Meth., 1972, 101, 3, p.509.

Рукопись поступила в издательский отдел 25 февраля 1980 года.

