

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



СЗУЧ. 1Р
А-564

И/П-74
1 - 7549

К.-Ф.Альбрехт, М.Ф.Лихачев, А.Майер, Х.-Э.Рызек,
И.А.Савин, Г.Г.Тахтамышев

579/2-74

УЧЁТ КУЛОНОВСКОГО
МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТРАЕКТОРИЙ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1 - 7549

К.-Ф.Альбрехт,* М.Ф.Лихачев, А.Майер,* Х.-Э.Рызек,
И.А.Савин, Г.Г.Тахтамышев

УЧЕТ КУЛОНОВСКОГО
МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТРАЕКТОРИЙ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

*Сотрудники ИФВЭ АН ГДР, Берлин/Цойтен.

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Во многих современных экспериментах в физике высоких энергий и при их проектировании возникают вопросы, связанные с определением траекторий заряженных частиц. Точность получаемого результата зависит от точности реконструкции треков. По этой причине старается обеспечить возможно более высокую разрешающую способность аппаратуры и учесть факторы, вносящие неопределенность в траектории частиц.

Одним из таких факторов является кулоновское рассеяние, которое испытывают заряженные частицы при прохождении через вещество детектора: сцинтилляционного счётчика, искровой, или пузырьковой камеры и других структурных элементов экспериментальной установки.

В настоящей работе рассматривается сравнительно простой способ учёта влияния многократного кулоновского рассеяния на траектории движения частиц и приводится конкретный пример такого расчёта для частиц, возникших от распада K^0 -мезонов и зарегистрированных магнитным искровым спектрометром с бесфильмовыми проволочными камерами. Кулоновское рассеяние в веществе спектрометра влияет на точность восстановления траекторий частиц. Вследствие этого в определенной доле трехчастичных распадов $K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ или $K_L^0 \rightarrow \pi^\pm \ell^\mp \nu$ восстановленные значения энергии вторичных частиц выходят, например, за пределы Далиц-области и, таким образом, распределения соответствующих кинематических переменных искажаются. Очевидно, для учёта этих искажений требуется моделирование процесса кулоновского рассеяния частиц в программе Монте-Карло с последующей реконструкцией треков.

I. Для дальнейшего изложения полезно ввести некоторые обозначения.

Элемент - слой однородного вещества, характеризующийся длиной l , радиационной длиной вещества X_0 и потерями энергии на ионизацию $\frac{dE}{dx}$. Элементом может являться также магнит или магнитная линза, в которых изменяется направление движения частицы.

Блок - это набор из N элементов, расположенных последовательно друг за другом.

Установка - набор из M блоков.

Изменения координат и углов: u_k, v_k - изменение проекций координаты и угла трека на выходе из k -го элемента за счёт кулоновского рассеяния в этом элементе; Y_k, Θ_k - изменение проекций координаты и угла трека на выходе из блока за счёт кулоновского рассеяния в k -ом элементе этого блока; Y, Θ - изменение проекций координаты и угла трека на выходе из блока за счёт кулоновского рассеяния во всем блоке.

2. Ниже мы даем алгоритм для расчёта величин Y и Θ . Пользуясь этим алгоритмом, можно вычислить координаты трека в конце каждого блока установки с учётом кулоновского рассеяния. Эти координаты используются в качестве входных данных для программы геометрической реконструкции треков, по которым затем вычисляются необходимые кинематические параметры события. Сравнение этих величин с соответствующими исходными величинами дает возможность оценить влияние кулоновского рассеяния на кинематику события, на эффективность регистрации события, на разрешающую способность установки.

3. В основе метода лежит функция плотности вероятности изменения величин u_k и v_k в конце k -ого элемента из-за кулоновского рассеяния в нем [1,2]:

$$F_k(t_k, u_k, v_k) du_k dv_k = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \frac{W_k^2}{t_k^2} \cdot \exp \left[-W_k^2 \left(\frac{3u_k^2}{t_k^3} - \frac{3u_k v_k}{t_k^2} + \frac{v_k^2}{t_k} \right) \right] du_k dv_k \quad (I)$$

Здесь $t_k = \frac{l_k}{X_{0k}}$ - длина k -го элемента в радиационных длинах (X_{0k}) данного вещества, $W_k^2 = \left(\frac{2}{E_s}\right)^2 P_{1k} P_{2k}$, $E_s = 2I$ МэВ, P_{1k}, P_{2k} - импульсы частицы на входе и выходе элемента, соответственно.

Из формулы (I) следует, что между u_k и v_k существует корреляция. Поэтому функцию плотности вероятности можно представить в виде двумерного гауссовского распределения типа:

$$F(x,y) dx dy = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right) \right] dx dy, \quad (2),$$

для которого матрица корреляций определяется следующим образом [3,4]:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho \sigma_x \sigma_y \\ \rho \sigma_x \sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Из сравнения (I) и (2) видно, что матрица корреляций для k -го элемента имеет вид:

$$C_k = \frac{1}{W_k^2} \begin{pmatrix} 2t_k^3/3 & t_k^2 \\ t_k^2 & 2t_k \end{pmatrix}, \quad (4),$$

где только W_k зависит от импульсов P_{1k} и P_{2k} .

4. В конце блока результирующее изменение Y , очевидно, есть сумма смещений Y_k , каждое из которых происходит вследствие кулоновского рассеяния в k -м элементе этого блока. То же справедливо в отношении результирующего изменения угла трека в конце блока, то есть:

$$Y = \sum_k Y_k \quad \text{и} \quad \Theta = \sum_k \Theta_k \quad (5)$$

Для получения величин Y_k и Θ_k через u_k, v_k мы используем трансформационные матрицы M_k каждого элемента данного блока, как это обычно делается в оптике пучков. Заметим, что если элемент представляет собой только слой вещества и расстояние от конца элемента до конца блока есть Z_k , то эта матрица имеет простой вид:

$$M_k = \begin{pmatrix} I & Z_k \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (6)$$

Если элемент содержит магнитные линзы, то матрица имеет более сложный вид /5/.

Переход от величин (y_k, ϑ_k) к (Y_k, Θ_k) осуществляется с помощью матрицы G_k , которая есть произведение трансформационных матриц M_k всех элементов блока от $K+1$ до n :

$$\begin{pmatrix} Y_k \\ \Theta_k \end{pmatrix} = G_k \begin{pmatrix} y_k \\ \vartheta_k \end{pmatrix} \quad (7)$$

Более подробно эти вопросы рассмотрены в работах по оптике пучков /6/.

5. Совместное распределение величин Y_k и Θ_k , очевидно, есть двумерное гауссовское распределение, поскольку и Y_k и Θ_k есть независимые линейные комбинации двух независимых (хотя и коррелированных) величин y_k, ϑ_k . Матрица корреляций этого распределения может быть вычислена следующим образом /3/:

$$S_k = G_k \cdot C_k \cdot G_k^T \quad (8)$$

Величины Y и Θ также подчиняются двумерному гауссовскому распределению, поскольку каждая из них есть сумма независимых гауссовских величин (см. (5)). Можно показать, что в этом случае матрица корреляций тоже складывается, т.е.

$$S = \sum_{k=1}^n S_k \quad (9)$$

Вывод этого соотношения приводится в Дополнении I.

Таким образом, мы имеем возможность получать матрицу корреляций для распределения вероятности изменения координаты и угла рассеяния частицы в веществе данного блока. Как видно из (3), это позволяет вычислять стандартные отклонения σ_Y, σ_Θ и коэффициент корреляции ρ для этих величин:

$$\sigma_Y^2 = S_{11}, \quad \sigma_\Theta^2 = S_{22} \quad \text{и} \quad \rho = S_{12} / \sigma_Y \sigma_\Theta \quad (10)$$

Следовательно, имеется вся необходимая информация для моделирования величин Y и Θ .

6. Найдем такие линейные комбинации величин Y и Θ , которые не коррелированы между собой. Для этого произведем соответствующее линейное преобразование:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{Y}{\sigma_Y} \cos \beta + \frac{\Theta}{\sigma_\Theta} \sin \beta, \\ \tau &= \frac{Y}{\sigma_Y} \sin \beta + \frac{\Theta}{\sigma_\Theta} \cos \beta \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда видно, что корреляции между ξ и τ отсутствуют, если $\beta = \frac{\pi}{4}$.

Таким образом, можно моделировать две независимые величины ξ и τ со стандартными ошибками $\sigma_\xi = \sqrt{1-\rho}$ и $\sigma_\tau = \sqrt{1+\rho}$, где ρ - коэффициент корреляции величин Y и Θ , и вычислять по соответствующим формулам значения Y и Θ :

$$Y = \sigma_Y (\xi - \tau) / \sqrt{2}, \quad \Theta = \sigma_\Theta (\xi + \tau) / \sqrt{2} \quad (12)$$

Такая процедура выполняется для каждого блока в двух проекциях, независимо друг от друга. Это справедливо как для блоков, не имеющих в качестве своих элементов магнитных линз /2/, так и для блоков, содержащих такие элементы (правда, только в линейном приближении) /5/.

7. Изложенный метод был применен для расчетов, связанных с обработкой результатов экспериментов /7-10/, выполненных с помощью спектрометра /6/, схема которого показана на рис. I. Спектрометр содержал магнитоотричные искровые камеры, анализирующий магнит, четыре сцинтилляционных годоскопа для триггера и детекторы мюонов и электронов. Основной задачей указанных экспериментов являлось изучение регенерации нейтральных каонов на водороде, дейтерии, углероде и т.д. в интервале энергий 10-50 Гэв, а также

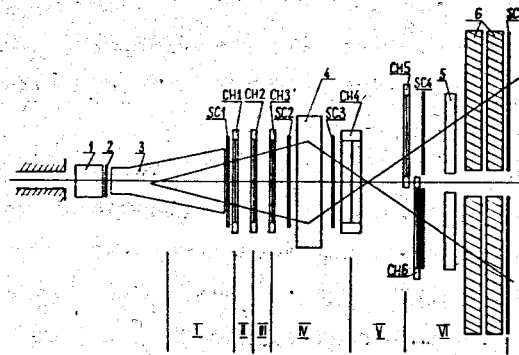


Рис.1. Схема блоков установки.

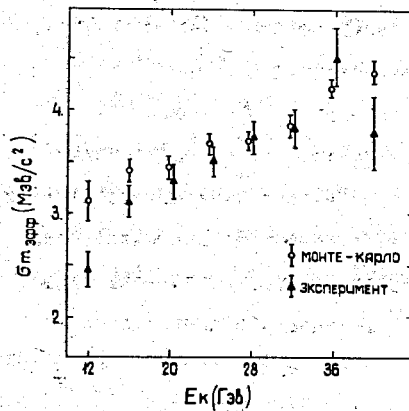


Рис.2. Зависимость от энергии стандартных ошибок распределений событий по инвариантной массе в распадах K^0 -мезонов на два заряженных пиона.

изучение распадных свойств K^0 -мезонов. Для проведения исследований необходимо хорошо знать эффективность регистрации установкой различных мод распада нейтральных каонов и точность восстановления их кинематических и геометрических характеристик. Вычисление эффективности регистрации различных мод распадов нейтральных каонов проводилось методом Монте-Карло и в процессе моделирования включалось кулоновское рассеяние распадных частиц в веществе установки. В данном конкретном примере установка условно была разделена на шесть блоков таким образом, чтобы в конце каждого блока находился регистрирующий элемент. Для первых пяти блоков это искровые камеры, а для последнего - сцинтилляционный годоскоп детектора мюонов.

В таблице I приведена структура каждого блока: элемент, вещество, длина, радиационная длина, а также стандартные ошибки в определении координат и углов вследствие многократного рассеяния в данном блоке частиц с импульсом 10 Гэв/с. Эти величины были вычислены с помощью вышеописанной процедуры. Для сравнения отметим, что обычно координатная ошибка в искровой камере составляет $0,3 \pm 0,5$ мм.

В качестве иллюстрации хорошего соответствия результатов процедуры моделирования условиям эксперимента на рис.2+4 показано несколько расчётных и экспериментальных величин и распределений.

8. Дополнение I.

Пусть

$$U = \sum_{i=1}^n X_i, \quad V = \sum_{i=1}^n Y_i,$$

где X_i, Y_i - независимые величины, и каждая пара (X_i, Y_i) подчиняется двумерному гауссовскому закону с матрицей корреляций C_i (см. (2), (3)).

Тогда набор величин $(X_1, Y_1; X_2, Y_2; \dots; X_n, Y_n)$

Таблица I

Структура блоков бесфильмового искрового спектрометра и результаты учёта многократного рассеяния в них Π^- -мезонов с импульсом 10 Гэв/с.

Блок № 1 $\sigma_Y = 0,18$ мм, $\sigma_\theta = 0,18$ мрад, $\rho = 0,287$

№ элем.	Вещество	Длина, мм	Рад.длина, мм	Примечания
1	2	3	4	5
1	He	5500	$4,75 \cdot 10^6$	распадная зона
2	майлар	0,1	287	сцинтиллятор
3	воздух	505	$3,03 \cdot 10^5$	
4	СН	5	413	

Блок № 2 $\sigma_Y = 0,17$ мм, $\sigma_\theta = 0,15$ мрад, $\rho = 0,926$

1	2	3	4	5
1	майлар	0,3	287	искровые камеры
2	медь	0,06	13,4	
3	воздух	1370	$3,03 \cdot 10^5$	

Блок № 3 $\sigma_Y = 0,16$ мм, $\sigma_\theta = 0,15$ мрад, $\rho = 0,928$

1	2	3	4	5
1	майлар	0,3	287	искровые камеры
2	медь	0,06	13,4	
3	воздух	1300	$3,03 \cdot 10^5$	

Блок № 4 $\sigma_Y = 1,57$ мм, $\sigma_\theta = 0,34$ мрад, $\rho = 0,892$

1	2	3	4	5
1	майлар	0,3	287	искровые камеры
2	медь	0,06	13,4	
3	воздух	900	$3,03 \cdot 10^5$	
4	СН	5	413	сцинтиллятор
5	воздух	3715	$3,03 \cdot 10^5$	
6	СН	5	413	
7	воздух	2260	$3,03 \cdot 10^5$	

Блок № 5 $\sigma_Y = 0,65$ мм, $\sigma_\theta = 0,21$ мрад, $\rho = 0,887$

1	2	3	4	5
1	майлар	0,3	287	искровые камеры
2	медь	0,06	13,4	
3	воздух	4400	$3,03 \cdot 10^5$	

Блок № 6 $\sigma_Y = 48,9$ мм, $\sigma_\theta = 22,5$ мрад, $\rho = 0,781$

1	2	3	4	5
1	майлар	0,3	287	искровые камеры
2	медь	0,06	13,4	
3	СН	7,5	413	
4	воздух	1570	$3,03 \cdot 10^5$	сцинтиллятор
5	10 см Pb 4 см Al 20 см СН	570	31,2	
6	чугун	2500	20,2	детектор электронов
7	воздух	225	$3,03 \cdot 10^5$	

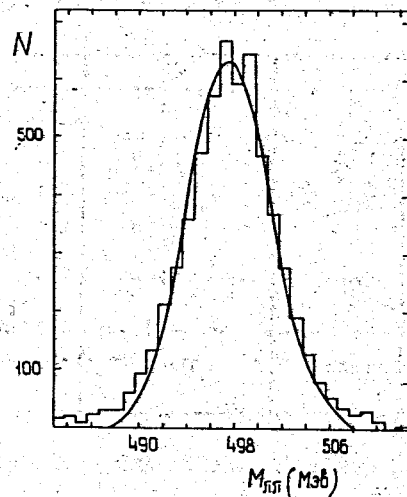


Рис.3. Распределение событий $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ по инвариантной массе двух π -мезонов для интервала импульсов каонов от 10 до 50 Гэв/с с учётом импульсного спектра каонов. Гистограмма - экспериментальное распределение. Кривая - расчёт методом Монте-Карло.

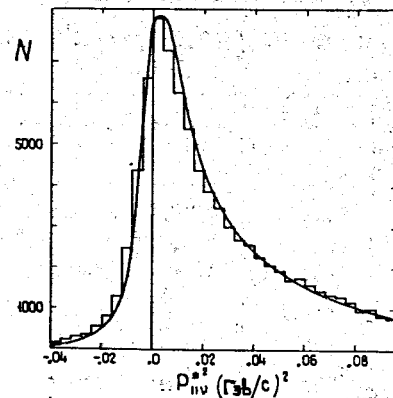


Рис.4. Распределение квадрата продольной компоненты импульса нейтрино в системе покоя каона для распада $K_L^0 \rightarrow \pi\mu\nu$. Гистограмма - эксперимент, кривая - расчёт.

можно рассматривать как $2n$ величин с гауссовским распределением и матрицей корреляции

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_n \end{pmatrix}$$

Из определения величин U, V следует:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

где A - матрица размерности $2 \times 2n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрица корреляции совместного гауссовского распределения величин U, V есть /4,5/:

$$S = A \cdot C \cdot A^T, \text{ т.е. } S = \sum_{i=1}^n C_i.$$

9. Дополнение 2.

Если можно пренебречь потерями энергии на ионизацию при прохождении частицы целого блока, то процедура моделирования кулоновского рассеяния существенно упрощается. В этом случае $W_K^2 = \left(\frac{2}{E_s}\right)^2 P_K^2$, а, следовательно, $C_K = \tilde{C}_K / P_K^2$, где \tilde{C}_K - матрица-константа для данного блока.

Стандартные отклонения величин Y и θ (см. (5)), обратно пропорциональны импульсу частицы, т.е.

$\sigma_Y = \tilde{\sigma}_Y / P_K$ и $\sigma_\Theta = \tilde{\sigma}_\Theta / P_K$
 и $\tilde{\sigma}_Y, \tilde{\sigma}_\Theta$ - тоже константы для данного блока, которые могут
 быть вычислены заранее. Тогда, после моделирования величин ξ
 и τ (см.(2)), сразу получаем

$$Y = \frac{\tilde{\sigma}_Y (\xi - \tau)}{P_K \cdot \sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \Theta = \frac{\tilde{\sigma}_\Theta (\xi + \tau)}{P_K \cdot \sqrt{2}}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.Росси "Частицы больших энергий", Москва, 1955, ГИТЛ, стр.92, 87, 88.
2. B.Rossi and K.Greisen, Rev.of Mod.Phys., v.13, N 4 (1941), p.267, 265, 266, 55.
3. Г.Крамер "Математические методы статистики", Москва, 1948, ИЛ, стр.326, 329.
4. S.Brandt, "Statistische Methoden der Datenanalyse", Bibliographisches Institut Mannheim, Wien, Zurich (1963), B1 816/816A, s. 72, 32, 33.
5. К.Штеффен "Оптика пучков высокой энергии", Москва, 1969, "Мир", стр.23, 21.
J.Banaigs et al. CERN 64-29.
6. С.Г.Басиладзе и др. Препринт ОИЯИ Р1-5361, Дубна, 1970.
7. В.К.Бирулев и др., ЯФ 15, 959 (1972)
8. V.K.Birulev et al., JINR, E1-6851, Dubna, 1972.
9. К.-Ф.Albrecht et al. JINR, E1-7353, Dubna, 1973.
10. К.-Ф.Albrecht et al., Preprint KFKI-73-46, 1973, Budapest.

Рукопись поступила в издательский отдел
 14 ноября 1973 года.