6547

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

1 - 6547

А.П. Гаспарян, Г.И. Копылов, А.В. Никитин,
А.И. Родионов, Ю.А. Троян

ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО МЕТОДА РОЗЫГРЫША СЛУЧАЙНЫХ ЗВЕЗД

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1972

1 - 6547

А.П. Гаспарян, Г.И. Копылов, А.В. Никитин,
А.И. Родионов, Ю.А. Троян

ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО МЕТОДА РОЗЫГРЫША СЛУЧАЙНЫХ ЗВЕЗД

В настоящее время в физике элементарных частиц отсутствует эффективный способ розыгрыша случайных звезд /1/ , если их веса $\phi(P)$ внутри фазового пространства сильно меняются. В поисках такого способа мы решили испытать стохастический метод, широко применяемый при решении задач статситической физики /2–4/. Ниже приводятся результаты такого испытания.

1. Обычные методы

Будем изображать случайную звезду точкой P гиперкуба. Общепринятые в физике элементарных частиц способы моделирования состоят либо в равномерном розыгрыше точек P_i и присвоении им веса $\phi(P_i)$ либо в розыгрыше точек P_i с плотностью $\phi(P_i)$ и присвоении им веса 1.

В первом случае среднее значение какой-либо функции $f(P_i)$ есть

$$\langle f \rangle = \frac{\sum_1^N f(P_i)\,\phi(P_i)}{\sum_1^N \phi(P_i)}, \qquad (1)$$

во втором

$$\langle f \rangle^{\bullet} = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} f\,(P_i) \quad . \tag{2}$$

В обоих случаях очередная точка P_{i+1} разыгрывается независимо от того, где была расположена предыдущая точка P_i . Таким образом, если точка P_i попала в область, где $\phi\,(P_i)$ велика, информацией об этом пренебрегают: точка P_{i+1} может оказаться в области низких значений $\phi\,(P)$.

2. Стохастический метод

В стохастическом методе из точек P_i выстраивается цепь Маркова, стремящаяся вероятностным образом в область максимума $\phi\,(P)$. Точка P_{i+1} выбирается так: одна или несколько координат $\vec{x}_i$ точки P_i изменяются не более чем на Δ :

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \vec{r}\,\Delta \tag{3}$$

($\vec{r}$ – случайный вектор с компонентами, распределенными в (-1,+1)). Остальные компоненты не меняются. Если $\phi\,(P_{i+1}) > \phi(P_i)$, то P_{i+1} берется в качестве очередной точки. Так же поступают и в том случае, если $\phi\,(P_{i+1}) < \phi\,(P_i)$, но все же отношение $\phi\,(P_{i+1}) / \phi\,(P_i)$ больше некоторого нового случайного числа r , равнораспределенного в (0,1). Но если

$$\phi\,(P_{i+1}) \,/\, \phi\,(P_i) < r \quad , \tag{4}$$

то точкой P_{i+1} пренебрегают и в качестве новой точки P_{i+1} берут прежнюю точку P_i (такое явление мы будем называть остановкой). Всем точкам P_i присваивается вес 1.

Доказано [2], что в пределе $i \to \infty$ точки P_i распределяются по кубу с нужной плотностью $\phi\ (P)$.

Нашей целью было установить скорость сходимости средних, взятых по таким коррелированным последовательностям точек к своему пределу. Нас интересовала зависимость этой скорости от вида плотности $\phi\ (P)$, от шага Δ, количества меняемых за один раз координат точки P_i, выбора начальной точки последовательности и т.д.

3. Пробная модель и пробные функции

В качестве модели, на которой проверялся стохастический метод, была выбрана модель фазового объема, в которой матричный элемент рождения частиц считается константой. Существуют разные способы выбора гиперкуба для такой модели. Некоторые из них приводят к очень слабым вариациям веса $\phi\ (P)$ [5], но нас интересовал здесь противоположный случай больших вариаций. С этой целью для розыгрыша было выбрано одно из обобщений способа Ван Хова [6], которому свойственны большие вариации веса [7]. Моделировалась реакция $NN \to NN\ \pi\pi$ при 7,5 Гэв/с.

В качестве пробных функций f, чье стремление к среднему изучалось, бралось число событий с тем или иным значением импульса, угла вылета, эффективной массы и т.п. одной или нескольких частиц. Кроме того изучалось стремление к пределу величины сечения реакции.

При надлежащей нормировке сечение $\sigma = \int \phi\ (P)\, dP$.

Существует мнение, что если все случайные события имеют вес 1, величина σ не вычисляется [8] или вычисляется путем особых ухищрений [9].

Это мнение основано на недоразумении. Действительно, средний вес таких событий есть тождественная единица, а не сечение реакции. Но ничто не мешает нам вычислить для каждого события веса 1 функцию $\phi(P)$, которая дает плотность звезд в окрестности данной звезды. Зная же $\phi(P)$, можно восстановить абсолютную величину сечения реакции.

В самом деле, в интеграле $\langle f \rangle = \dfrac{\int f(P)\,\phi(P)\,dP}{\int \phi(P)\,dP}$ можно в качестве $f(P)$ взять $\dfrac{1}{\phi(P)}$, и тогда получим

$$\left\langle \frac{1}{\phi(P)} \right\rangle = \frac{\int dP}{\int \phi(P)\,dP} = \frac{1}{\int \phi(P)\,dP} .$$

Откуда искомое сечение

$$\sigma = \int \phi(P)\,dP = \frac{1}{\langle 1/\phi(P) \rangle} , \qquad (5)$$

где среднее вычисляется по формуле (2). Конечно, при большом разбросе весов оно получается с плохой точностью.

Легко также убедиться в справедливости формулы

$$\int [\phi(P) - \sigma]^2\,dP = \sigma^2 \left(\langle \phi(P) \rangle \langle 1/\phi(P) \rangle - 1 \right) , \qquad (6)$$

которая дает оценку этого разброса весов.

4. Ход расчета

Вес $\phi(P)$ в случае реакции $NN \to NN\pi\pi$ зависит от 8 переменных: двух эффективных масс (тройки и пары частиц, например, $N\pi\pi$ и $\pi\pi$), трех азимутальных и трех полярных углов (углов вылета частиц 1,2,3). Предварительно была написана программа максимума веса ϕ (P), так что при желании цепь Маркова можно было тянуть, начиная с максимума ϕ (P). Предельное значение сечения σ было рассчитано заранее аналитически. Максимальный шаг Δ (см. формулу (3)) можно было брать свой для каждой переменной. Когда координата x_{i+1} оказывалась за пределами единичного гиперкуба ($x_{i+1} > 1$ или $x_{i+1} < 0$), то из нее вычиталась или к ней прибавлялась единица, чтобы опять вернуть точку P_{i+1} внутрь гиперкуба. Скорость сходимости сравнивалась с такой же скоростью при общепринятом, нестохастическом методе.

5. Зависимость от шага Δ

Наиболее быстрое стремление среднего веса к пределу наступало, когда шаг Δ был максимален: $\Delta = 1$ (рис. 1). В этом случае требовалось около 30 тысяч звезд, чтобы отклонения от предела были порядка 5%. В обычном, нестохастическом методе та же точность достигалась при статистике $\approx$ 10 тысяч звезд. Уменьшение шага до 0,3 - 0,5 требовало для достижения той же точности в сечении значительно большего числа звезд.

Казалось бы, надо стараться работать с большим шагом. Но чем больше был шаг, тем больше оказывалось число "остановок", т.е. повторяющихся звезд в цепи Маркова. (При шаге 1 каждая звезда повторялась в среднем 4 раза, при 0,5 - 2,5 раза, при 0,3 - 1,9 раза). Это приводило к большим флуктуациям в гистограммах импульсов или углов; раз возникнув, флуктуация не исчезала очень долго. При некоррелированном розыгрыше звезд флуктуации в гистограммах размываются намного быстрей. Мы попытались выбирать шаг изменения различных переменных равным полуширине распределения веса по этой переменной (как правило, эта полуширина равнялась 0,1 ÷ 0,3). Это не привело к заметному улучшению сходимости. Более того, в ряде прогонов среднее сечение стремилось не к своему пределу σ , а к $1/2\,\sigma$. Это объясняется тем, что вес $\phi\ (\ P\ )$ в нашем случае имеет два симметричных максимума, связанных с наличием в системе $NN\,\pi\pi$ двух тождественных частиц (двух, а не двух пар, потому что импульс четвертой частицы не разыгрывается, а вычисляется так, чтобы соблюдались законы сохранения энергии-импульса). Между максимумами заметный провал: при небольшом шаге Δ цепь Маркова не успевает через него пройти за отведенные ей 30 тыс. шагов.

6. Зависимость от начальной точки

Строго говоря, первые точки цепи Маркова распределены не с плотностью $\phi\ (\ P\ )$, а с некоторой переходной плотностью, поэтому сколько-то первых звезд следует не включать в общую статистику. Однако практически их отбрасывание не меняло результатов заметным образом (рис. 1).

Мы попытались также начинать цепь Маркова из области максимума $\phi\ (\ P\ )$. Скорость сходимости в этом случае при значении $\Delta = 1$ показана на рис. 2. Обращает на себя внимание очень большое число "повторных звезд" при $\Delta = 1$: число повторов достигает в среднем 6 при 30 тысячах звезд. Это явление легко объяснить: когда точка P находится в области максимума, а шаг велик, условие (4) выполняется почти всегда. Работа в таком режиме практически невозможна.

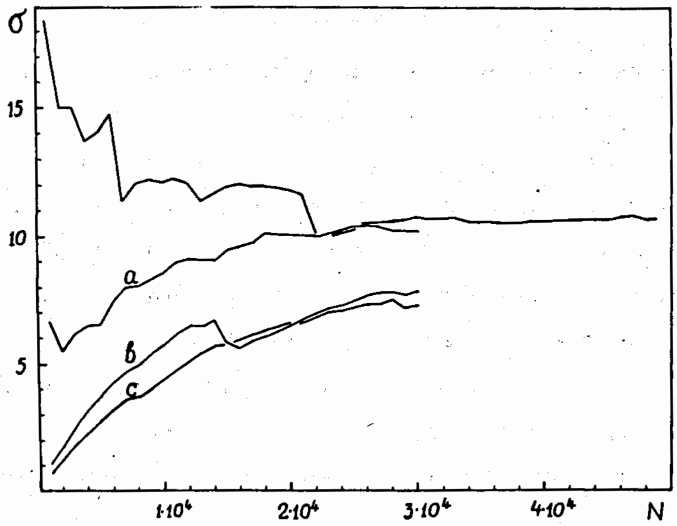

Рис. 1. Зависимость σ (условные единицы) от числа звезд N для разных шагов; а – $\Delta = 1$; b – $\Delta = 0{,}5$; c – $\Delta = 0{,}3$. Верхняя кривая соответствует случаю $\Delta = 1$, но первые $3 \cdot 10^4$ звезд отброшены. Точное значение $\sigma = 10{,}8$.

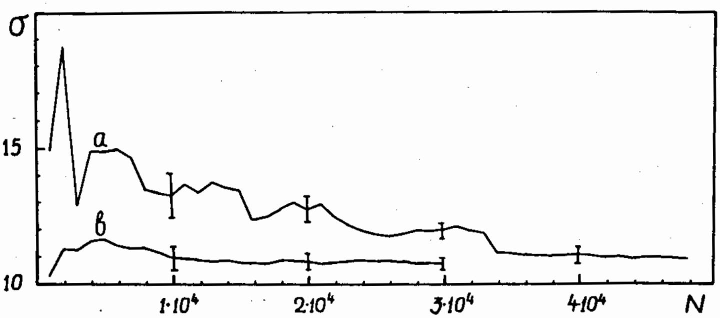

Рис. 2. Зависимость σ от N : a – при $\Delta = 1$, когда счет начинается с точки с максимальным весом; b – в обычном методе Монте-Карло.

7. Выводы

Стохастическое моделирование, принятое в статистической физике, возможно и в физике высоких энергий. Однако оно не дает выигрыша по сравнению с уже развитыми в ней методами моделирования. Возможно, нужны другие принципы организации цепей Маркова, в которых не было бы повторяющихся событий (см. в этой связи работу /9/). Возможно, стохастический метод окажется выгодным при розыгрыше многочастичных реакций (с 20-30 частицами), так как он позволяет менять импульсы лишь у некоторых из этих частиц, оставляя прочие неизменными, и это может дать экономию времени счета.

Улучшение эффективности розыгрыша периферийных многочастичных процессов надо искать на других путях.

Мы глубоко благодарны Г.Э. Норману, В.М. Замалину, Б.В. Зеленеру за ценные обсуждения и советы.

Литература

1. Г.И. Копылов. Основы кинематики резонансов. Наука, М., 1970.
2. N.Metropolis, M.Rosenbluth et a l. J.Chem.Phys., 21, 1087 (1953).
3. И.З. Фишер. Статистическая теория жидкостей. Физматгиз, 1961.
4. Г.Э. Норман. в сб: "Тезисы докладов на III Всесоюзной конференции по методам Монте-Карло, Новосибирск, 1971, стр. 119.
   В.М. Замалин, Г.Э. Норман. там же на стр. 64.
   Г.Э. Норман, В.С. Филинов. Теплофизика высоких температур, 7, 233 (1969).
5. Г.И. Копылов. ЖЭТФ, 39, 1091 (1960).
6. Van Hove L. Nucl.Phys., B9, 331, 1969.
7. Г.И. Копылов, А.В. Никитин, В.М. Попова. Сообщения ОИЯИ, Р11-6301, Дубна, 1972.
8. см., например, /1/, стр. 357, 370.
9. В.Ф. Турчин. Теория вероятности и ее применения, 16, №4, 738,1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 июня 1972 года.