СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

1- 4475

М.С.Хвастунов

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ДВУХФОТОННОМ РАСПАДЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1969

1- 4475

М.С.Хвастунов

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ДВУХФОТОННОМ РАСПАДЕ

В данной работе обсуждаются некоторые особенности кинематики двухфотонного распада бесспиновых резонансов[x/]. Как известно, при таком распаде в распределении по углу разлета фотонов заметна сильная концентрация случаев в районе минимального угла разлета. Это является следствием того, что в системе покоя распадающегося резонанса все направления распада равновероятны.

Минимальный угол разлета вычисляется по известной формуле

$$\cos(\theta_m/2) = \beta_x, \tag{1}$$

где β_x - скорость (в единицах скорости света) распадающегося резонанса. Формулу (1) можно записать в более удобном виде:

$$\sin(\theta_m/2) = m_x/E_x, \tag{1'}$$

где m_x и E_x - масса и полная энергия резонанса.

Вероятность $w(\theta,\beta_x)$ двухфотонного распада резонанса X с углом θ разлета фотоном вычисляется по известной формуле (см., например,/1/):

[x/] Приведенные ниже формулы применимы и для распадов на два фотона долгоживущих нестабильных частиц со спином 0.

$$w(\theta,\beta_x) = \frac{1-\beta_x^2}{2\beta_x}\cdot\frac{\cos(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta_x^2-\cos^2(\theta/2)}} \qquad (2)$$

В формуле (2) угол разлета θ изменяется в пределах от θ_m до π. Для каждой скорости резонанса имеется свое значение минимального угла θ_m и своя кривая $w(\theta,\beta_x)$. Если ввести параметр $\xi = \sin(\theta/2)\ /\sin(\theta_m/2)$, то набор кривых $w(\theta,\beta_x)$ для разных скоростей β_x можно свести к одной кривой, применимой в широком интервале скоростей резонанса. Для этого в формуле (2) скорость β_x заменим величиной $\cos(\theta_m/2)$ (см. формулу (1)) и после простого преобразования получим:

$$w(\xi,\gamma_x) = \frac{1}{\xi^2}\sqrt{\frac{1-\xi^2/\gamma_x^2}{\xi^2-1}}, \qquad (2')$$

где $\gamma_x = E_x/m_x$ – лоренц-фактор резонанса X. Параметр ξ изменяется в пределах от 1 до $\xi_{max} = \sin(\pi/2)/\sin(\theta_m/2) = \gamma_x$ (см. формулу (1')). Функция $w(\xi,\gamma_x)$ отличается от функции $w(\theta,\beta_x)$ нормировочным множителем $\frac{1}{2}\frac{\gamma_x^2}{\sqrt{\gamma_x^2-1}}$.

Как видно из выражения (2'), вероятности $w(\xi,\gamma_x)$ велики при $\xi \approx 1$ и быстро спадают при увеличении ξ. Поэтому при $\gamma_x \gg 1$ корень $\sqrt{1-\xi^2/\gamma_x^2}$ можно заменить единицей и функция $w(\xi,\gamma_x)$ упрощается:

$$w(\xi,\gamma_x) \approx w(\xi) = \frac{1}{\xi^2}\frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}}, \qquad (\gamma_x \gg 1). \qquad (2'')$$

На рис. 1 представлены графики функции $w(\xi,\gamma_x)$ для $\gamma_x \gtrsim 4$ ($\gamma_x = 3{,}7$ и $\gamma_x = 22{,}2$). За 1 взята вероятность распада при значении

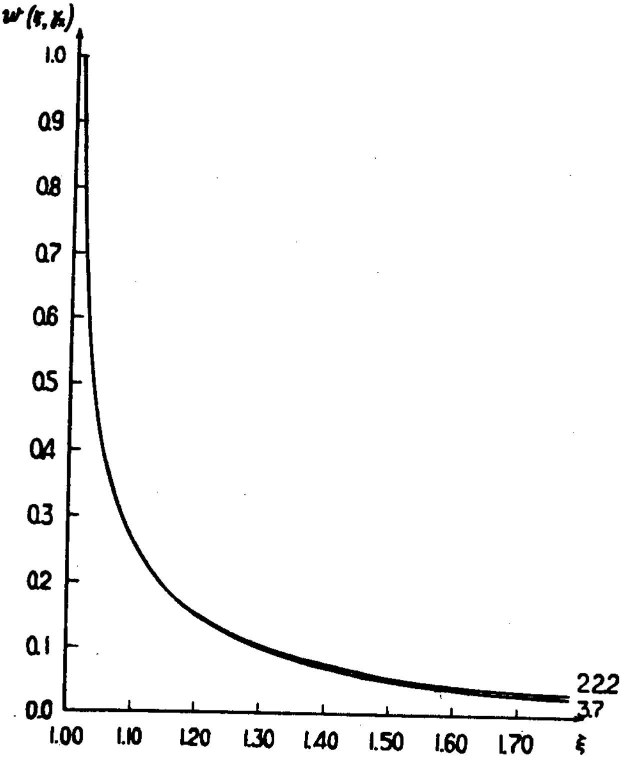

Рис. 1. График функции $w(\xi, \gamma_x)$. Числа на кривых – значения параметра γ_x.

параметра $\xi = 1{,}01$. Как видно из этого рисунка, при $\gamma_x \gtrsim 4$ и $1 \leq \xi \lesssim 2$ графики функций $w(\xi, \gamma_x)$ и $w(\xi)$ (если в качестве функции $w(\xi)$ брать функцию $w(\xi, \gamma_x)$ при $\gamma_x = 22{,}2$) практически сливаются в одну кривую. Для расчётных целей более удобны графики функции $W(\xi_1, \gamma_x)$, по которым определяются вероятности того, что при распаде параметр ξ не превышает выбранное значение ξ_1.

Функция $W(\xi_1, \gamma_x)$ выражается через функцию $w(\xi, \gamma_x)$ следующим образом:

$$W(\xi_1, \gamma_x) = \int_1^{\xi_1} w(\xi, \gamma_x) d\xi \Big/ \int_1^{\gamma_x} w(\xi, \gamma_x) d\xi. \tag{3}$$

Интегралы в (3) выражаются через эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода.

При больших значениях параметра γ_x ($\gamma_x \gtrsim 4$) функцию $w(\xi, \gamma_x)$ можно заменить более простой функцией $w(\xi)$ и тогда интегралы в (3) выражаются через элементарные функции:

$$W_0(\xi_1, \gamma_x) = \sqrt{\frac{1 - 1/\xi_1^2}{1 - 1/\gamma_x^2}} = \frac{W(\xi_1)}{\sqrt{1 - 1/\gamma_x^2}}, \quad (\gamma_x \gtrsim 4). \tag{3'}$$

Как показывают численные расчёты, формулой (3') можно пользоваться и при малых значениях γ_x. На рис. 2 представлены график функции $W(\xi_1) = \sqrt{1 - 1/\gamma_x^2} \cdot W_0(\xi_1, \gamma_x)$ и графики функции $W(\xi_1, \gamma_x)$ для малых значений γ_x. Интегралы в формуле (3) вычислялись численным способом. Для всех выбранных малых значений γ_x от 1,02 до 2,1 графики функций $\sqrt{1 - 1/\gamma_x^2}\, W(\xi_1, \gamma_x)$ практически сливаются с графиком функции $\sqrt{1 - 1/\gamma_x^2}\, W_0(\xi_1, \gamma_x) = W(\xi_1)$.

Энергии E_1 и E_2 распадных фотонов и углы $\theta_1 = (\widehat{\vec{p}_1, \vec{p}_x})$ и $\theta_2 = (\widehat{\vec{p}_2, \vec{p}_x})$ можно представить в виде функций параметра ξ ($\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ и $\vec{p}_x$ – векторы импульсов распадных фотонов и резонанса X). Энергии E_1 и E_2 вычисляются по формулам:

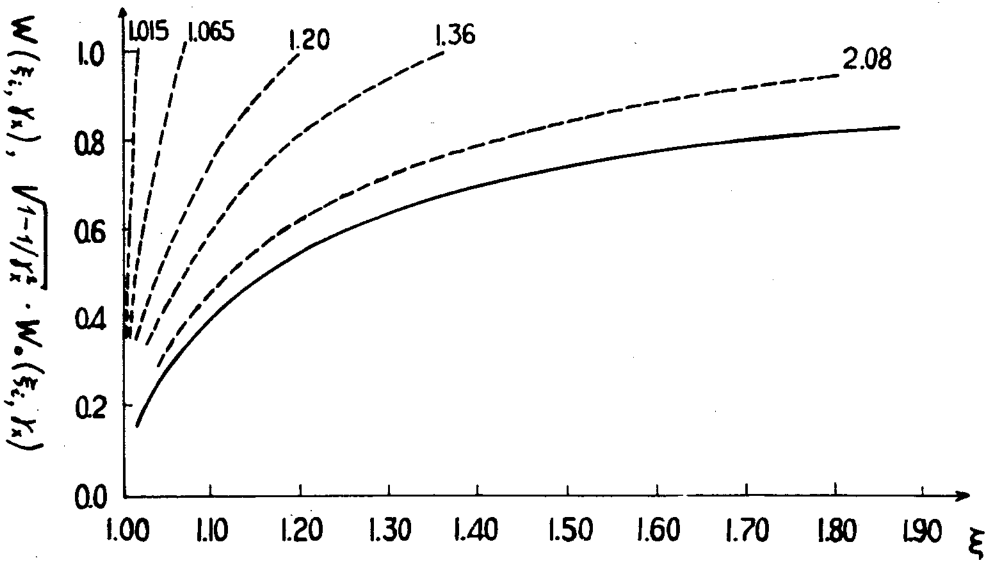

Рис. 2. Графики функции $\sqrt{1-1/\gamma_x^2} \cdot W_0(\xi_1, \gamma_x)$ (сплошная линия) и функций $W(\xi_1, \gamma_x)$ (пунктирные линии). Числа на кривых - значения лоренц-факторов γ_x распадающихся резонансов.

$$k_1 = E_1/(E_x/2) = 1-\sqrt{1-1/\xi_1^2} = 1-W(\xi_1)$$

$$= 1-\sqrt{1-1/\gamma_x^2}\cdot W_0(\xi_1,\gamma_x) \qquad (4)$$

$$k_2 = E_2/(E_x/2) = 2-k_1 = 1+\sqrt{1-1/\xi_1^2}\,.$$

Из выражений (4) получаем

$$\sqrt{1-1/\gamma_x^2}\cdot W_0(\xi_1,\gamma_x) = 1-k_1\,. \qquad (4')$$

Как видно из выражения (4'), значение функции $W_0(\xi_1, \gamma_x)$ можно трактовать как вероятность

$$W_1(k_1,\gamma_x) = (1-k_1)/\sqrt{1-1/\gamma_x^2} \qquad (4'')$$

того, что при распаде параметр k_1 для одного из фотонов не меньше некоторого значения $k_1 = 1-\sqrt{1-1/\xi_1^2}$, а значение k_2 для другого фотона не больше величины $2-k_1 = 1+\sqrt{1-1/\xi_1^2}$.

Граничные значения параметров k_1 и k_2 равны:

$$k_{1\,min} = 1-\sqrt{1-1/\gamma_x^2} \quad \text{и}$$

$$k_{2\,max} = 1+\sqrt{1-1/\gamma_x^2}\,.$$

Отношение $a_1 = \sin\theta_2/\sin\theta_1 = k_1/k_2$ выражается через функцию $W(\xi_1)$ следующим образом:

$$a_1 = (1-W(\xi_1))/(1+W(\xi_1)). \qquad (5)$$

Из формулы (5) получаем:

$$W(\xi_1) = \sqrt{1-1/\gamma_x^2} \cdot W_0(\xi_1, \gamma_x) = (1-a_1)/(1+a_1). \tag{5'}$$

Из выражения (5') видно, что значение функции $W_0(\xi_1, \gamma_x)$ можно трактовать как вероятность

$$W_2(a_1, \gamma_x) = \left(\frac{1-a_1}{1+a_1}\right) / \sqrt{1-1/\gamma_x^2} \tag{5''}$$

того, что при распаде параметр a не превышает

$$a_1 = (1-\sqrt{1-1/\xi_1^2})/(1+\sqrt{1-1/\xi_1^2}).$$

Минимальное значение параметра a равно:

$$a_{min} = k_{1\,min} / k_{2\,max}.$$

Параметр $\beta_1 = |k_1 - k_2| / (k_1 + k_2)$ равен значению функции $W(\xi_1)$:

$$\beta_1 = W(\xi_1) = \sqrt{1-1/\gamma_x^2} \cdot W_0(\xi_1, \gamma_x). \tag{6}$$

Из выражения (6) видно, что значение функции $W_0(\xi_1, \gamma_x)$ может трактоваться как вероятность

$$W_3(\beta_1, \gamma_x) = \beta_1 / \sqrt{1-1/\gamma_x^2} \tag{6'}$$

того, что при распаде параметр β не превосходит выбранное значение $\beta_1 = \sqrt{1-1/\xi_1^2}$. Максимальное значение параметра β равно:

$$\beta_{max} = \sqrt{1 - 1/\gamma_x^2}.$$

Параметр β входит в формулу для вычисления относительной погрешности лоренц-фактора резонанса /2/:

$$\frac{\sigma_{\gamma_x}}{\gamma_x}=\frac{1}{2}\left\{\beta^2\left[\left(\frac{\sigma_{E_1}}{E_1}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{E_2}}{E_2}\right)^2\right]+\left(\frac{\sigma_\theta}{2\,\mathrm{tg}(\theta/2)}\right)^2\right\}^{1/2}. \tag{7}$$

Для резонанса с большим значением γ_x параметр β изменяется от 0 до $\beta_{max}\cong 1$ и среднее значение $\bar{\beta}\cong 0{,}5$. Если отобрать $\approx$ 50% распадов с параметрами k_1 и k_2 : $0{,}5 \lesssim k_1 \leq 1{,}0$ и $1{,}0 \leq k_2 \lesssim 1{,}5$, то для этих событий параметр β изменяется от 0 до $\approx 0{,}5$ и среднее значение $\bar{\beta}_{1/2}\cong 0{,}25$.

Таким образом, отбирая события с близкими энергиями распадных фотонов, можно существенно снизить влияние энергетических ошибок на вычисляемое значение параметра γ_x.

Если для идентификации резонанса использовать эффективную массу, вычисляемую по формуле

$$m_x=\sqrt{E_1 E_2}\;2\sin(\theta/2), \tag{8}$$

то такой возможности улучшения разрешения нет:

$$\frac{\sigma_{m_x}}{m_x}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\sigma_{E_1}}{E_1}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{E_2}}{E_2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_\theta}{2\,\mathrm{tg}(\theta/2)}\right)^2\right\}^{1/2}. \tag{8'}$$

Использование параметра γ_x предпочтительней также в случае, когда энергии распадных фотонов измеряются с систематическими ошибками:

$$E_1'=(1+\delta_1)E_1$$

и

$$E_2'=(1+\delta_2)E_2\,,$$

где E_1, E_2 и E_1', E_2' – "истинные" и измеренные энергии фотонов и δ_1, δ_2 – неизвестные систематические ошибки.

В этом случае средние значения массы m_x' и лоренц-фактора γ_x' резонанса будут смещены относительно "истинных" значений m_x и γ_x:

$$\left(\frac{|m_x' - m_x|}{m_x} \right)_E = \frac{1}{2} \left(|\delta_1| + |\delta_2| \right), \qquad (9)$$

$$\left(\frac{\gamma_x' - \gamma_x}{\gamma_x} \right)_E \cong \frac{1}{2} \beta \left(|\delta_1| + |\delta_2| \right). \qquad (9')$$

Для резонанса с большим значением γ_x, как упоминалось выше, среднее значение множителя β равно 0,5 для всей совокупности событий и $\approx 0{,}25$ для $\approx 50\%$ событий с $0 \lessapprox k_1 \leq 1{,}0$ и $1 \leq k_2 \lessapprox 1{,}5$.

Таким образом, при систематических ошибках в E_1 и E_2 смещение параметра γ_x в два раза меньше смещения эффективной массы m_x. Отбирая события с близкими энергиями распадных фотонов, систематическое смещение параметра γ_x можно существенно уменьшить.

Параметром γ_x имеет смысл пользоваться только в том случае, когда резонанс X рождается в двухчастичной реакции, например;

$$\pi^- + p \to X^0 + n, \qquad (9)$$

и энергия налетающих частиц (π^-) изменяется в малых пределах. В этом случае лоренц-фактор $\tilde{\tilde{\gamma}}_x$ резонанса X в системе покоя $(\pi^- p)$ фиксирован и каждый резонанс X характеризуется своими значением лоренц-фактора $\tilde{\tilde{\gamma}}_x$, вычисляемым по формуле:

$$\tilde{\tilde{\gamma}}_x = \gamma_c \, \gamma_x - \sqrt{\gamma_c^2 - 1} \cdot \sqrt{\gamma_x^2 - 1} \cdot \cos\theta_x, \qquad (10)$$

где $\gamma_c = 1/\sqrt{1-\beta_c^2}$, $\beta_c = p_{\pi^-}/(E_{\pi^-} + m_p)$ и $\theta_x = (\hat{\vec{P}_{\pi^-}, \vec{P}_x})$.

Пики в спектре лоренц-факторов $\tilde{\tilde{\gamma}}_x$ будут означать появление в реакции (9) резонансов. Массы этих резонансов вычисляются по формуле:

$$m_{x_0} = m_0 \tilde{\tilde{\gamma}}_x - \sqrt{m_0^2 (\tilde{\tilde{\gamma}}_x^2 - 1) + m_n^2}\ , \tag{11}$$

где $$m_0^2 = m_\pi^2 + m_p^2 + 2E_\pi m_p\ .$$

Краткие выводы

Таким образом, при двухфотонном распаде бесспинового резонанса с произвольным значением лоренц-фактора γ_x :

1) распределение $w(\xi, \gamma_x)$ распадов по параметру ξ может быть описано одной кривой (для $\gamma_x \gtrapprox 4$);

2) распределение $W_0(\xi_1, \gamma_x)$ может быть описано одной кривой;

3) энергетические распределения $W_1(k_1, \gamma_x)$ распадных фотонов могут быть описаны одним графиком;

4) угловые распределения $W_2(\alpha_1, \gamma_x)$ распадных фотонов могут быть описаны одной кривой;

5) для идентификации резонансов X , образующихся в двухчастичной реакции $a + b \to X + c$ с фиксированной эффективной массой системы (ab) , предпочтительней использовать параметр γ_x .

Автор выражает благодарность Г.И.Копылову за полезные обсуждения.

Литература

1. *Г.Челлен. Физика элементарных частиц. "Наука", 1966.*
2. *Г.И.Копылов, М.С.Хвастунов. Ядерная физика, 6, 780 (1967).*

Рукопись поступила в издательский отдел
7 мая 1969 г.