ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

1 - 10151

П.А.Девенски, Н.К.Жидков, В.А.Никитин

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ДВУХЧАСТИЧНЫХ РЕАКЦИЙ В ОПЫТАХ НА ВНУТРЕННЕЙ МИШЕНИ ЦИКЛИЧЕСКОГО УСКОРИТЕЛЯ

1976

1 - 10151

П.А.Девенски, Н.К.Жидков, В.А.Никитин

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ДВУХЧАСТИЧНЫХ РЕАКЦИЙ В ОПЫТАХ НА ВНУТРЕННЕЙ МИШЕНИ ЦИКЛИЧЕСКОГО УСКОРИТЕЛЯ

Направлено в ЯФ

Девенски П.А., Жидков Н.К., Никитин В.А. 1-10151

Метод вычисления дифференциального сечения двухчастичных реакций в опытах на внутренней мишени циклического ускорителя

Получена формула, описывающая энергетический спектр частиц отдачи и учитывающая методические особенности эксперимента. Приводится алгоритм вычисления дифференциального сечения. Показано его применение на примере упругого He-p-рассеяния.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Введение

В течение последних 15 лет было проведено много экспериментов по исследованию упругого рассеяния и дифракционной диссоциации протонов на протонах и ядрах на различных ускорителях (Дубна, Серпухов, Батавия) с использованием внутренней мишени. Сущность метода [1] заключается в регистрации частиц, вылетающих из мишени, в интервале углов 70-90° . Используются пленочные или газовые мишени малых размеров и масс. Необходимый выход частиц достигается многократным прохождением ускоряемого пучка через мишень. Особенности этой методики подробно описаны в обзорных работах [2]. На рис. 1 приведена схема расположения мишени и детекторов относительно пучка ускорителя.

Настоящая работа является дальнейшим развитием математического метода вычисления дифференциального сечения в экспериментах с использованием внутренней пленочной мишени [3].

Вывод формулы энергетического спектра частиц отдачи

Рассмотрим упругое рассеяние двух частиц

$$\vec{p}_I + \vec{p}_{II} \to \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \,, \qquad (1)$$

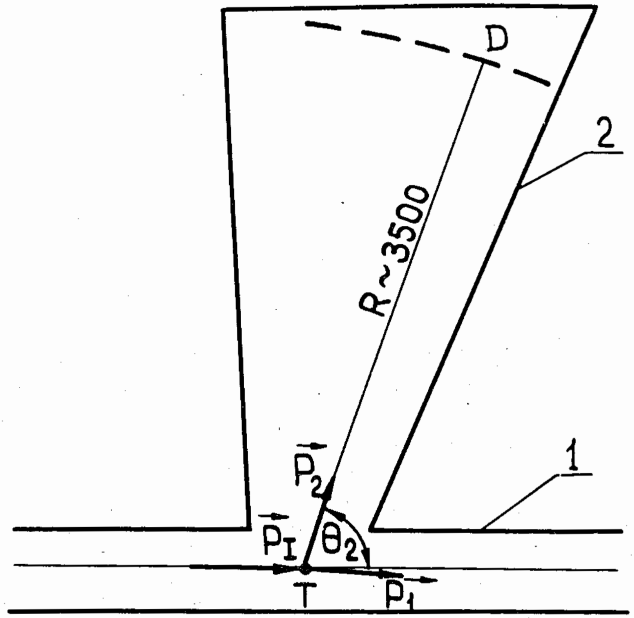

Рис. 1. Схема расположения мишени (Т) и детекторов (D) на ускорителе: 1 – камера ускорителя, 2 – вакуумный ионопровод. $\vec{p}_I$, $\vec{p}_1$ – импульсы ускоренной и рассеянной частиц, $\vec{p}_2$ – импульс частицы отдачи, θ_2 – угол частицы отдачи относительно оси пучка ускорителя.

где $\vec{p}_I$ – импульс частицы пучка; $\vec{p}_2$, θ_2 , T_2 – импульс, угол и кинетическая энергия частицы отдачи, соответственно, (рис.1). Из кинематики упругих реакций следует однозначная связь между $\vec{p}_2$, θ_2 , T_2 , что позволяет пользоваться этими переменными равноправным образом.

Выведем формулу, описывающую наблюдаемый энергетический спектр частиц отдачи, регистрируемых детектором.

Форму спектра определяют следующие факторы:

1. Угловой разброс пучка ускорителя в плоскости изучаемой реакции.
2. Многократное рассеяние частиц отдачи в веществе мишени.
3. Неточечность мишени и детектора.
4. Энергетическое разрешение детектора и спектрометрического тракта.
5. Зависимость дифференциального сечения изучаемой реакции от угла рассеяния.

Отклонение налетающей частицы в плоскости реакции на некоторый угол из-за углового разброса пучка ускорителя приводит к повороту картины рассеяния на тот же угол. Поэтому угловое распределение частиц отдачи с фиксированным p_2 является тем же самым, что и угловое распределение пучка. В хорошем приближении это есть распределение Гаусса:

$$G_1(\theta'_2 - \theta_2)\,d\theta'_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_I}\, e^{-\frac{(\theta'_2-\theta_2)^2}{2\sigma_I^2}}\, d\theta'_2 . \qquad (2)$$

Для синхрофазотрона Лаборатории высоких энергий ОИЯИ дисперсия $\sigma_I \approx 1{,}5$ мрад /4/. Ввиду ее малости можно полагать, что угловая переменная изменяется в пределах $-\infty < \theta'_2 < \infty$.

Для коллинеарного потока частиц отдачи с импульсом $|\vec{p}_2|$, прошедшего слой мишени толщиной x, в результате многократного рассеяния имеет место гауссово распределение по углу /5/, т.е.

$$G_2(\theta - \theta'_2 , x)\,d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\, e^{-\frac{(\theta-\theta'_2)^2}{2\sigma_2^2}}\, d\theta , \qquad (3)$$

где $\sigma_2^2 = kx/\vec{p}_2^{\,4}$.

Константа k определяется радиационной длиной материала мишени. Из (2) и (3) получаем угловое распределение частиц отдачи с импульсом $|\vec{p}_2|$, вылетающих из точки мишени, расположенной на глубине x :

$$G_3(\theta-\theta_2, x)d\theta = \left(\int_{-\infty}^{\infty} G_1(\theta_2'-\theta_2)G_2(\theta-\theta_2', x)d\theta_2'\right)d\theta . \quad (4)$$

Рассмотрим случай однородной прямоугольной пленочной мишени толщиной h_0 и длиной (по пучку) a . Так как толщина мишени ($h_0 \approx 1$ мкм) гораздо меньше ширины пучка /4/, то поток ускоренных частиц можно считать равномерно распределенным по всей толщине мишени. Следовательно, выход частиц отдачи с разной глубины мишени одинаков. Угловое распределение частиц отдачи с данным импульсом $|\vec{p}_2|$, вылетающих из малого элемента мишени толщиной h, является суперпозицией гауссовых распределений (4), соответствующих различным значениям x, и имеет вид:

$$G_4(\theta-\theta_2)d\theta = \frac{1}{h}\left(\int_0^h G_3(\theta-\theta_2, x)dx\right)d\theta . \quad (5)$$

Множитель 1/h в (5) введен для сохранения нормировки функции G_4 на единицу.

Учтём конечные угловые размеры мишени и детектора в направлении пучка (рис.2). Пусть θ_0 – угол в плоскости реакции между направлением пучка и линией, проходящей через середины мишени и детектора. Частицы, падающие на элемент детектора, расположенный под углом θ_d, с элемента мишени под углом θ_t, имеют угловое распределение (5). Поток частиц со всей мишени на данный элемент детектора имеет угловое распределение

$$G_5(\theta_d,\theta_2)\,d\theta_2 = \left(\int_{\theta_{t1}}^{\theta_{t2}} G_4(\theta_t-\theta_2)d\theta_t\right)d\theta_2 , \quad (6)$$

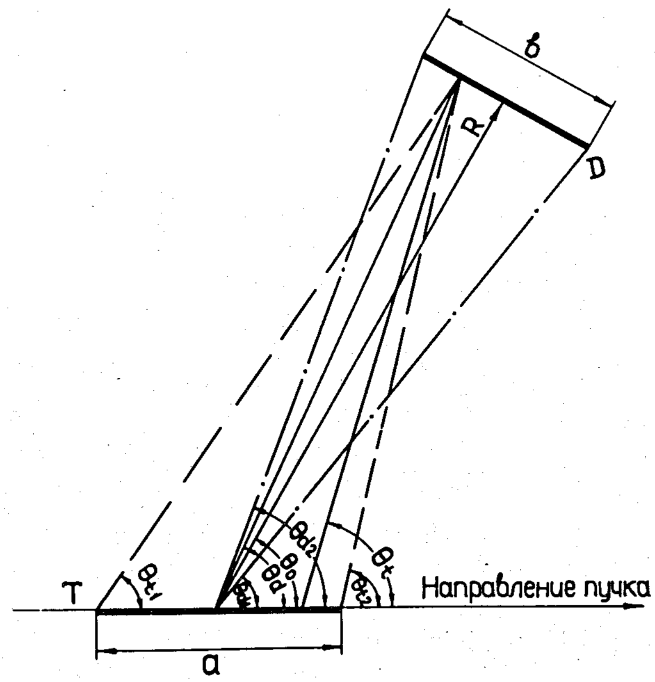

Рис. 2. Схема расположения мишени и детектора в направлении пучка. Плоскость детектора перпендикулярна R , a – длина мишени, b – длина детектора, R – отрезок, соединяющий середины мишени и детектора.

где

$$\theta_{t1} = \theta_d - \frac{a\cos\theta_0}{2R}, \quad \theta_{t2} = \theta_d + \frac{a\cos\theta_0}{2R} .$$

И наконец, угловое распределение частиц с данным импульсом $|\vec{p}_2|$, падающих с мишени на детектор, имеет вид:

$$G_6(\theta_0,\theta_2)d\theta_2 = \left(\int\limits_{\theta_{d1}}^{\theta_{d2}} G_5(\theta_d,\theta_2)d\theta_d\right)d\theta_2\,, \qquad (7)$$

где

$$\theta_{d1} = \theta_0 - \frac{b}{2R}\,, \qquad \theta_{d2} = \theta_0 + \frac{b}{2R}\,.$$

Из (7) получаем распределение, нормированное на единицу площади детектора длиной b и единицу площади мишени длиной a:

$$G_7(\theta_0,\theta_2)d\theta_2 = \frac{R^2}{a\cdot b\cdot\cos\theta_0}\,G_6(\theta_0,\theta_2)d\theta_2\,. \qquad (8)$$

Интегралы в формулах (4) - (7) вычисляются аналитически, что позволяет получить функцию $G_7(\theta_0,\theta_2)$ в явном виде.

Введем обозначения

$\psi_d = \dfrac{b}{2R}$ – половина углового размера детектора по оси пучка,

$\psi_t = \dfrac{a\cos\theta_0}{2R}$ – половина углового размера мишени,

$h = \dfrac{h_0}{\cos\theta_0}$ – толщина мишени,

$\sigma_2^2 = \dfrac{kh}{|\vec{p}_2|^4}$ – угловая дисперсия многократного рассеяния,

σ_1^2 – угловая дисперсия пучка ускорителя,

$\sigma_3^2 = \sigma_I^2 + \sigma_2^2$

$$x_1 = \frac{\theta_0-\theta_2+\psi_d+\psi_t}{\sqrt{2}\,\sigma}\,, \qquad x_2 = \frac{\theta_0-\theta_2-\psi_d-\psi_t}{\sqrt{2}\,\sigma}\,,$$
$$x_3 = \frac{\theta_0-\theta_2+\psi_d-\psi_t}{\sqrt{2}\,\sigma}\,, \qquad x_4 = \frac{\theta_0-\theta_2-\psi_d+\psi_t}{\sqrt{2}\,\sigma}\,. \qquad (9)$$

Введем функции

$$f(x) = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\right)\mathrm{Erf}(x) + \frac{x^2+1}{6}\cdot\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,,$$
$$g(\theta_0,\theta_2,\sigma_{\cancel{1,2}}) = (2\sigma)^{3/2}\,[f(x_1)+f(x_2)-f(x_3)-f(x_4)], \qquad (10)$$

где $\mathrm{Erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ – интеграл вероятности.

Функция $G_7(\theta_0,\theta_2)$ имеет вид:

$$G_7(\theta_0,\theta_2) = \frac{1}{2\psi_d\cdot 2\psi_t\cdot\sigma_2^2}\,[g(\theta_0,\theta_2,\sigma_3) - g(\theta_0,\theta_2,\sigma_I)]\,. \qquad (11)$$

В эксперименте полупроводниковые детекторы регистрируют кинетическую энергию T_2 частиц отдачи, поэтому распределение (11) запишем в виде функции от T_2. Из кинематики имеем

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{T_2}{T_2+2m_2}}\right), \quad |\vec{p}_2| = \sqrt{T_2(T_2+2m_2)}\,. \qquad (12)$$

Введем новое обозначение:

$$F(T_0,T_2) = G_7(\theta_0(T_0),\ \theta_2(T_2)), \qquad (13)$$

Число частиц $d\bar{N}$ в интервале энергий $T_2 \div (T_2 + dT_2)$, падающих на детектор площадью S_d, расположенный под углом $\theta_0(T_0)$, пропорционально дифференциальному сечению $\frac{d\sigma}{dT_2}(T_2)$ и светимости мишени L :

$$d\bar{N} = L \cdot \frac{S_d}{R^2} \cdot \frac{d\sigma}{dT_2}(T_2) \cdot F(T_0,T_2)dT_2. \qquad (14)$$

Наблюдаемый энергетический спектр $\frac{d\bar{N}(T_2)}{dT_2}$ описывается формулой (14) с точностью до величины энергетического разрешения детектора. Учёт энергетического разрешения приводит к выражению

$$\frac{dN}{dT_2} = \int_{T_2-4\sigma_{er}}^{T_2+4\sigma_{er}} \frac{d\bar{N}(T_2')}{dT_2'} G(T_2-T_2')dT_2', \qquad (15)$$

или

$$\frac{dN}{dT_2} = L\frac{S_d}{R^2}\left[\int_{T_2-4\sigma_{er}}^{T_2+4\sigma_{er}} dT_2' \frac{d\sigma}{dT_2}(T_2')F(T_0,T_2')G(T_2-T_2')\right], \qquad (16)$$

где $G(T_2-T_2')$ – функция разрешения, которая в большинстве практических случаев имеет гауссову форму [6]

$$G(T_2-T_2')dT_2' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{er}} e^{-\frac{(T_2-T_2')}{2\sigma_{er}^2}} dT_2'.$$

Здесь σ_{er} характеризует энергетическое разрешение.

Таким образом, формула (16) решает поставленную задачу и позволяет описать спектр $dN(T_2)/dT_2$ с учётом всех методических и физических факторов эксперимента. Отметим характерную особенность соотношения (16): наблюдаемый спектр связан со своим теоретическим образом $(\frac{d\sigma}{dT}\cdot F)$ интегральным оператором. Теперь необходимо решить интегральное уравнение (16) относительно функции $\frac{d\sigma}{dT}$ или (15) относительно $\frac{d\bar{N}}{dT}$. Уравнения этого класса имеют, вообще говоря, бесконечное число решений. Для получения единственного решения на искомую функцию накладывают дополнительные ограничения, т.е. прибегают к методам регуляризации [7]. Эти методы в настоящее время хорошо разработаны, но связаны со значительными техническими трудностями.

Специфика нашей задачи состоит в том, что для искомой функции, исходя из физических моделей, можно указать аналитическое представление с неизвестными параметрами. Это обстоятельство упрощает решение. Ниже приводится алгоритм вычисления интересных, с точки зрения физики, параметров, а также самой функции $\frac{d\sigma}{dT_2}(T_2)$.

Основные свойства энергетического спектра частиц отдачи

Проиллюстрируем основные свойства энергетического спектра протонов отдачи, вытекающие из формулы (14), на примере упругого He–p–рассеяния при p_{He} = 20 ГэВ/с. Дифференциальное сечение задается по формуле Бете [9].

На рис. 3 в относительных единицах приведены функции: $\frac{dN}{dT}$ (кривая 1), $F(T_0,T)$ (кривая 2), $d\sigma/dT$ (кривая 3) – в зависимости от энергии протонов отдачи T (ниже всюду T обозначает кинетическую

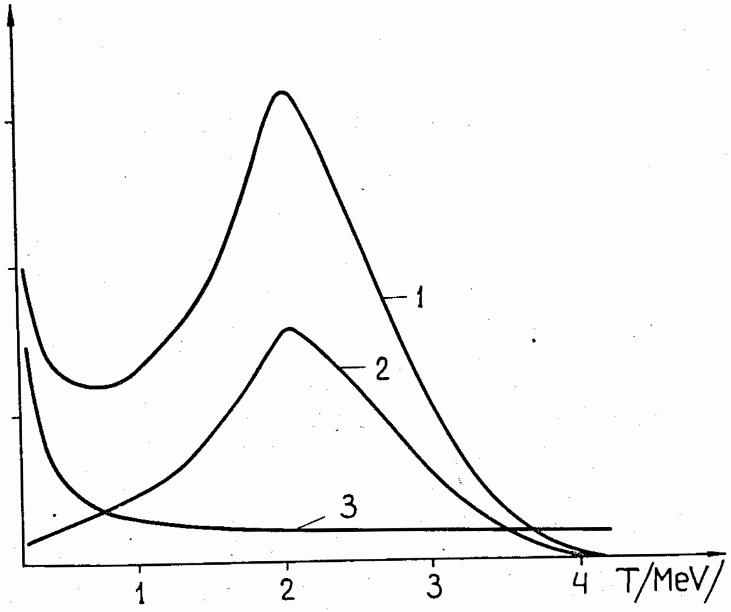

Рис. 3. Функции $\frac{d\bar{N}}{dT}$ – (1), $F(T_0, T)$ – (2) и $\frac{d\sigma}{dT}$ – (3) в относительных единицах в зависимости от энергии протонов отдачи.

энергию частицы отдачи). Детектор расположен под углом θ_0, соответствующим энергии протонов отдачи $T_0 = 2$ МэВ. Возрастание $d\bar{N}/dT$ в области малых T обусловлено сильным ростом $d\sigma/dT$ из-за кулоновского взаимодействия. В ширину спектра основной вклад вносит многократное рассеяние.

С ростом толщины мишени увеличивается роль многократного рассеяния, что приводит к расширению спектра (рис.4). Как указывалось ранее, длины мишени и детектора в описании спектра играют одинаковую роль: их увеличение приводит к увеличению ширины спектра (рис.5, рис.6).

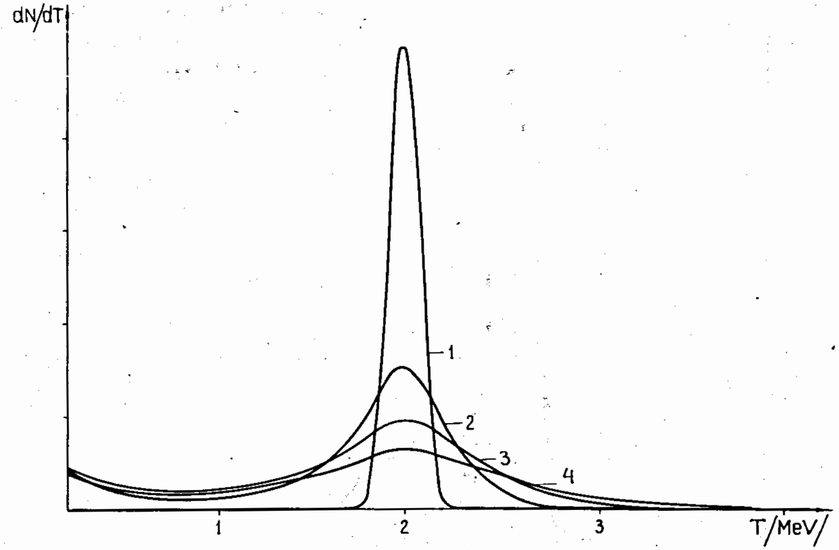

Рис.4. Зависимость формы спектра от толщины мишени h : 0,001 мкм (1), 0,7 мкм (2), 2 мкм (3), 5 мкм (4).

Рис.7 иллюстрирует зависимость формы спектра от основных определяющих факторов. Вид спектра 1 определяется угловым разбросом пучка ускорителя. Спектр 2 учитывает еще многократное рассеяние. Помимо этого, в спектре 3 учтена длина мишени, а в спектре 4 и длина детектора.

Применение функции dN/dT при анализе данных по He-p упругому рассеянию

В эксперименте энергетические спектры протонов измеряются с помощью ряда детекторов, расположенных под разными углами θ_0. Каждый детектор регистрирует спектр в определенном интервале энергии.

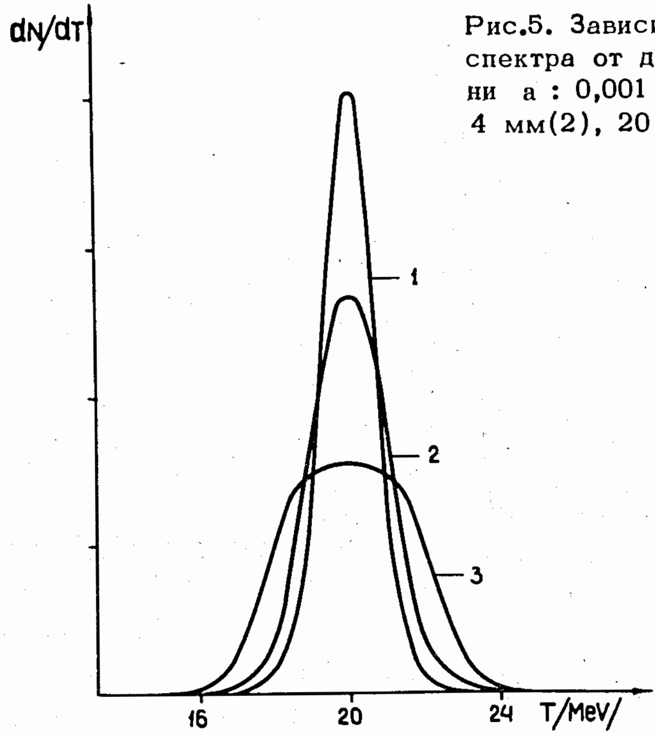

Рис.5. Зависимость формы спектра от длины мишени a : 0,001 мм (1), 4 мм(2), 20 мм (3).

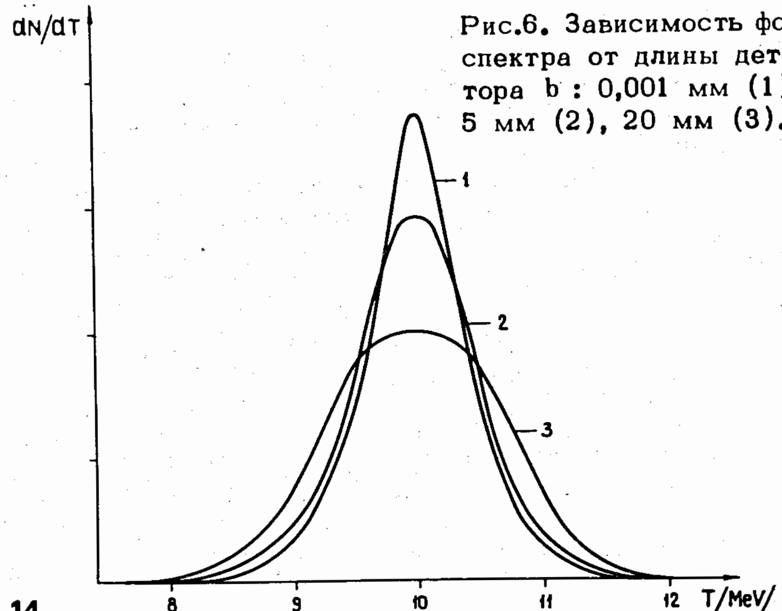

Рис.6. Зависимость формы спектра от длины детектора b : 0,001 мм (1), 5 мм (2), 20 мм (3).

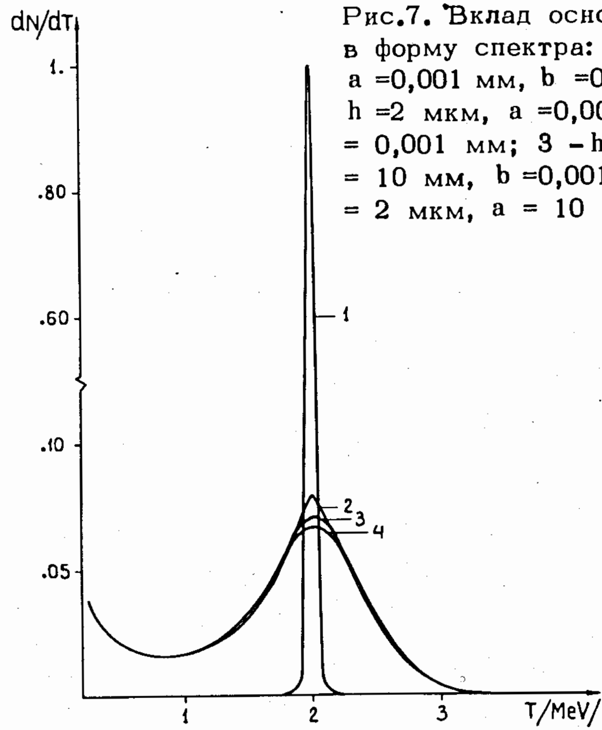

Рис.7. Вклад основных факторов в форму спектра: 1 – h =0,001 мкм, a =0,001 мм, b =0,001 мм; 2 – h =2 мкм, a =0,001 мм, b = = 0,001 мм; 3 – h = 2 мкм, a = = 10 мм, b =0,001 мм; 4 – h = = 2 мкм, a = 10 мм, b = 10 мм.

На рис.8 в 100-канальном представлении приведены спектры, полученные по формуле (14), при некоторых значениях T_0. Спектр 1 (T_0 = 0,5 МэВ) размыт из-за сильного роста $d\sigma/dT$ в кулоновской области и многократного рассеяния и не имеет явно выраженного пика. С ростом T_0 изменение дифференциального сечения в области спектра уменьшается, многократное рассеяние убывает, начинает проявляться пик (спектры 2,3). При достаточно больших энергиях (спектр 4, T_0 = 20 МэВ) спектр имеет вид пика с четко выраженными границами. Ширина пика определяется угловым разбросом пучка ускорителя, длинами детектора и мишени.

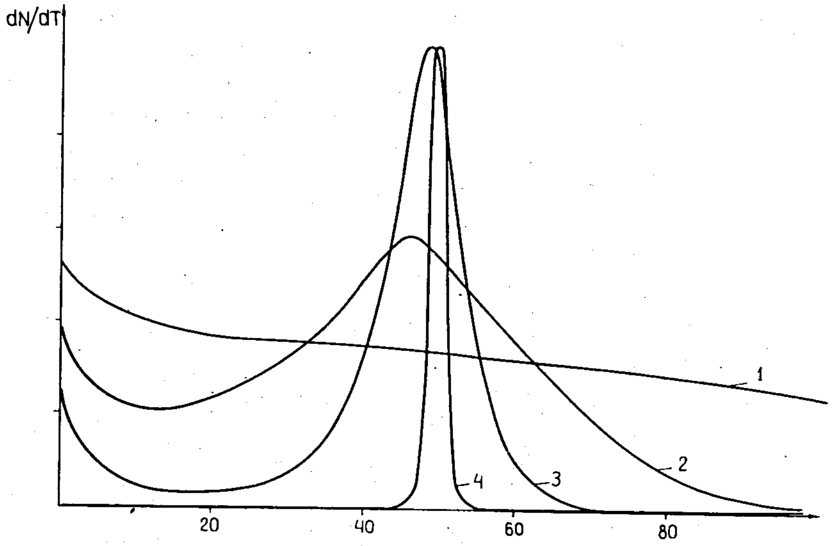

Рис. 8. Зависимость спектра от T_0 в канальном представлении: 1 – T_0 = 0,5 МэВ, 0,2 $\leq T \leq$ 2,2 МэВ; 2 – T_0 = 2 МэВ, 0,2 $\leq T \leq$ 4,2 МэВ; 3 – T_0 = 5 МэВ, 0,2 $\leq T \leq$ 10,2 МэВ; 4 – T_0 = 20 МэВ, 0,2 $\leq T \leq$ 20,2 МэВ.

В случае упругого He–p -рассеяния из экспериментальных спектров видно, что пик имеет четко выраженные границы начиная с энергии $T_0 \gtrsim$ 5 МэВ. Пусть T_L и T_R – соответственно левая и правая границы пика. Согласно (14), число частиц N в пике

$$N = \int_{T_L}^{T_R} \frac{d\bar{N}}{dT} \cdot dT = L \frac{S_d}{R^2} \frac{\overline{d\sigma}}{dT}(T_0) \int_{T_L}^{T_R} F(T_0,T)dT, \quad (17)$$

где $\frac{\overline{d\sigma}}{dT}(T_0)$ – среднее значение дифференциального сечения в границах пика. Из (17)

$$\frac{d\sigma}{dT}(T_0) = \frac{NR^2}{L \cdot S_d} \Big/ \int_{T_L}^{T_R} F(T_0,T)dT. \quad (18)$$

Таким способом из экспериментального спектра получается дифференциальное сечение для энергии $T_0 \gtrsim$ 5 МэВ. В этой области $d\sigma/dT$ мало меняется.

В случае меньших энергий T_0 экспериментальный спектр $\Delta N/\Delta T$ описывается формулой (16) с применением метода наименьших квадратов. В правой части формулы (16) дифференциальное сечение задается с помощью формулы Бете с фиксированными параметрами

$$\frac{d\sigma}{dT}(T) = C(T)\frac{d\sigma_B}{dT}(T). \quad (19)$$

Неизвестная функция C(T) в (19) отражает тот факт, что $d\sigma_B/dT$ с заданными параметрами может и не описывать удовлетворительно сечение $d\sigma/dT$.

Для данного спектра, характеризующегося энергией T_{0i}, полагаем C(T) константой $C_i = C(T_{0i})$. Тогда из (19) имеем

$$\frac{d\sigma}{dT}(T) = C_i \frac{d\sigma_B}{dT}(T). \quad (20)$$

В минимизационной процедуре для данного спектра искомыми параметрами являются C_i, T_{0i}. Константы k и σ_I находятся методом минимизации по всей совокупности экспериментальных спектров и затем фиксируются.

Интегрирование в (16) реализуется по квадратурной формуле Гаусса /8/ с n узлами, где n определяется требуемой точностью вычислений.

Для нахождения $d\sigma/dT$ при малых энергиях мы используем итеративную процедуру. По найденным значениям $d\sigma/dT$ (формулы (18), (20)) методом минимизации уточняются параметры в формуле Бете $\frac{d\sigma_B}{dT}(T)$. Затем нахождение $d\sigma/dT$ повторяется с применением формулы (16) при уточненных значениях параметров в $d\sigma_B/dT$. Процедура повторяется до тех пор, пока значения $d\sigma(T_{0i})/dT$ не получатся устойчивыми в пределах ошибок.

Дополнительным критерием сходимости процедуры является равенство единице всех коэффициентов C_i в пределах экспериментальных ошибок. Это, естественно, достигается только в том случае, когда функция $d\sigma/dT$, подставленная в правую часть формулы (16), при некоторых значениях входящих в нее параметров может описать дифференциальное сечение изучаемой реакции. В случае He-p-рассеяния сходимость достигается после одной-двух итераций.

Описанный алгоритм обработки был реализован на ЭВМ CDC-6400. Время обработки одного спектра в одной итерации с учетом энергетического разрешения составляет ~15 с, а без учета разрешения - ~1,5 с. В первом случае интегрирование в (16) проводилось при n =9 (точность вычисления интеграла при этом ~ 0,01%).

По описанному алгоритму выполнена обработка большого числа спектров протонов отдачи в реакции He-p. В среднем спектр удовлетворительно описывается функцией (16) с χ^2 на степень свободы, равным единице. Дифференциальное сечение, полученное по отдельному спектру, определяется с ошибкой, близкой к статистической ошибке полного числа частиц в спектре.

Известно /10/, что из-за ядерного взаимодействия регистрируемой частицы с веществом детектора и выбывания частиц из объема детектора вследствие многократного рассеяния в детекторе уменьшается эффективность регистрации частиц по энергии. Это приводит к переходу частиц из пика в левый хвост спектра. При энергии протонов $T_2 \leq 20$ МэВ число протонов, выбывших из пика, составляет $\leq 1\%$.

Предлагаемый алгоритм применим к двухчастичным реакциям с соответствующей заменой кинематики (12). Его можно модифицировать также для случая с применением струйной газовой мишени. При этом распределение плотности струи задается функцией с несколькими параметрами.

Литература

1. B.Bekker et al. High Energy Conf., CERN, 1962, p. 582.
   В.А.Никитин и др. Препринт 1084, ОИЯИ, Дубна, 1962.
   Л.Ф.Кириллова и др. Препринт Д-1329, Дубна, 1963.
2. В.А.Никитин. Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра. М., Атомиздат, 1970, стр.9.
   Л.С.Золин и др. УФН, 117, 118, 1975.
3. В.А.Никитин. Препринт Р-1476, ОИЯИ, Дубна,1963.
4. Л.П.Зиновьев и др. Препринт Р-2387, ОИЯИ, Дубна, 1965.
5. Б.Росси и К.Грейзен. Взаимодействие космических лучей с веществом. М., Изд-во Иностр. лит., 1948.
6. D.J.Skyrme. Nucl. Instr. and Meth., 57, 61, 1967.
7. А.Н.Тихонов и В.Я.Арсенин. Методы решения некорректных задач. М., "Наука", 1974.
8. В.И.Крылов. Приближенное вычисление интегралов. М., "Наука", 1967.
9. H.A.Bethe. Ann. Phys., 3, 190, 1958.
10. R.Eisberg et al. Nucl. Instr. and Meth., 101, 85, 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 октября 1976 года.