О тестировании разностных схем для уравнений Навье-Стокса на винтовых течениях

И. Т. Дулатов[1,*], М. Д. Малых[1,2]

[1] Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Российская Федерация
[2] Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, 141980, Российская Федерация

Аннотация
В настоящее время известно довольно много различных разностных схем, аппроксимирующих уравнения Навье-Стокса. Обычно тестирование разностных выполняется на плоских задачах, напр., на расчете дорожки Кармана. В то же время именно трехмерные течения представляют наибольшую сложность. В работе В.П. Ковалева и др. (2017) было описано аналитически два частных решения уравнений Навье-Стокса – ABC-решение и решения Громеки–Бельтрами. Оба эти решения описывают винтовые течения, то есть течения, в которых ротор скорости $\operatorname{rot}\vec{v}$ пропорционален скорости $\vec{v}$. Эти течения являются естественным тестом, который позволяет сравнивать качества различных разностных схем. В докладе будут представлены результаты тестирования схем из статьи В.П. Гердта и др. (2020) на этих винтовых течениях.

Ключевые слова
уравнения Навье-Стокса, разностные схемы, решения Громеки–Бельтрами

1. Введение

Необходимость исследования сложных трехмерных потоков несжимаемой жидкости возникает во многих прикладных задачах. Среди них можно назвать задачу о строении закрученного потока в трубе и о сопряжении вихревого стока платины с нижнем бьефом, которые активно изучались как теоретически, так и экспериментально в РУДН [1]. Тем не менее, численное исследование таких течений до сих пор представляет значительные трудности и подталкивает к поиску новых численных методов исследования математических моделей закрученных течений.

Рассмотрим течение жидкости в некоторой области G. Введем декартову неподвижную систему координат xyz, мгновенную скорость течения жидкости в точке (x, y, z) в момент времени t будем обозначать как $\vec{v}(x, y, z, t)$. Динамику поля скоростей можно описать системой уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + \nu\Delta\vec{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{1}$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости, ρ — плотность, а p — давление. Для течения воды ν и ρ можно считать известными константами, при этом давление p является наряду с тремя компонентами скорости еще одной неизвестной функцией. Всего получается три дифференциальных уравнения на четыре неизвестные функции. Для несжимаемой жидкости эти уравнения дополняют уравнением неразрывности

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0.$$

Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems 2025 (ITTMM 2025), Moscow, April 07–11, 2025
[*] Автор, отвечающий за публикацию.
dulatov_it@pfur.ru (И. Т. Дулатов); malykh_md@rudn.ru (М. Д. Малых)
0000-0001-6541-6603 (М. Д. Малых)

С математической точки зрения уравнения Навье-Стокса — чрезвычайно сложные, в настоящее время не доказана даже существование и гладкость решения уравнений Навье-Стокса в $\mathbb{R}^3$.

Обычно краевые задачи для уравнений в частных производных крайне редко удается решить аналитически, поэтому обычно применяются численные, преимущественно сеточные методы решения дифференциальных уравнений. Модели, основанные на численном решении уравнений Навье-Стокса в англоязычной литературе получили название Direct numerical simulation (DNS). Эти модели применяют в академических исследованиях при малых числах Рейнольдса, особенно для газообразных потоков. В качестве примера можно указать весьма популярную двумерную задачу об образовании дорожки Кармана [2, §9.6].

Применение сеточных методов подразумевает, что на масштабе порядка шага стеки решение можно хорошо приблизить линейными функциями. В турбулентных задачах это предположение не выполняется, уравнение Навье-Стокса, по всей видимости, хорошо описывают мелкую структуру потоков и по этой причине очень плохо поддаются численному решению по методу конечных разностей.

В прошлом веке было предложено целое семейство полуэмпирических моделей, хорошо зарекомендовавших себя в инженерной практике. В настоящее время описание этих моделей, данной Вилкоксом [3], стало стандартом, см. также [4]. Классификация различных моделей приведена в обзоре [5]. Главная проблема полуэмпирических моделей состоит в необходимости подбора констант эмпирическим путем. В настоящее время эта проблема решается путем уточнения параметров в процессе расчетов по методике, описанной в [6].

Один из возможных путей, который сохранит и научную обоснованность моделей, основанных на уравнения Навье-Стокса, и позволит корректно описывать турбулентные структуры состоит в разработке миметических разностных схем для уравнений Навье-Стокса, то есть таких разностных схем, которые сохраняют те или иные структуры, связанные с уравнениями Навье-Стокса, точно. В [7] была предложена разностная схема, аппроксимирующая для уравнения Навье-Стокса, подражающая тому свойству уравнений Навье-Стокса, что единственным нетривиальным их дифференциальным следствием является уравнение Пуассона для давления.

Эта схема были протестированы на нескольких плоских течениях, в т.ч. на дорожке Кармана. Однако наибольший интерес представляет тестирование на трехмерных течения, в т.ч. на закрученных. В [8] было описано аналитически два семейства винтовых течений. Более того, авторы этой работы предлагали использовать эти течения для тестирования разностных схем.

Мы разработали и реализовали в системе компьютерной алгебры Sage метод, который позволяет тестировать разностные схемы, заданные в символьном виде, на винтовых течениях. В настоящей работе мы хотим представить наше программное обеспечение и результаты его применение к схеме из [7].

2. Винтовые течения

Винтовое течение — течение, для которого

$$\operatorname{rot}\vec{v} = k\vec{v},$$

где k — коэффициент, характеризующий закрученность течения.

ABC-решение из статьи [8, стр. 75] описывается явными формалми

$$\begin{cases} u = m(A\sin(kz) + C\cos(ky)), \\ v = m(B\sin(kx) + A\cos(kz)), \\ w = m(C\sin(ky) + B\cos(kx)), \\ p = p_0 - \dfrac{u^2+v^2+w^2}{2}, \end{cases}$$

где

$$m = e^{-tk^2/Re}$$

Эти формулы реализуются в Sage стандартным путем

```
var('x,y,z,t')
var('A,B,C,k,Re,p0')
var('dx,dy,dz,dt')
tracl=exp(-t*k^2/Re)
u = (A*sin(k*z) + C*cos(k*y))*tracl
v = (B*sin(k*x) + A*cos(k*z))*tracl
w = (C*sin(k*y) + B*cos(k*x))*tracl
p = p0 - 1/2*(u^2+v^2+w^2)
```

3. Задание разностной схемы в системе Sage

Для задание разностной схемы из [7] необходимо сначала задать разностные операторы:

```
Dt=lambda f: (f.subs(t=t+dt)-f)/dt
Dx=lambda f: (f.subs(x=x+dx)-f.subs(x=x-dx))/2/dx
Dy=lambda f: (f.subs(y=y+dy)-f.subs(y=y-dy))/2/dy
Dz=lambda f: (f.subs(z=z+dz)-f.subs(z=z-dz))/2/dz
Delta=lambda f: (f.subs(x=x+dx)+f.subs(x=x-dx)-2*f)/dx^2 + \
(f.subs(y=y+dy)+f.subs(y=y-dy)-2*f)/dy^2 + \
(f.subs(z=z+dz)+f.subs(z=z-dz)-2*f)/dz^2
```

Нетрудно видеть, что эти формулы повторяют формулу (30) из [7] на языке Sage. Разностная схема состоит из 5-и уравнений [7, формулы (34-35)]. Постановка ABC-решения в первое уравнение осуществляется следующим образом

```
Dx(u)+Dy(v)+Dz(w)
```

и возвращает нам 0. Это означает, что точное решение удовлетворяет первому уравнению разностной схемы точно. Это очень хорошо, поскольку это уравнение выражает закон сохранения массы. Проблемы с выполнением этого закона при счете по полуэмпирическим моделям хорошо известны.

Подстановка решения во второе выражение дает довольно сложное символьное выражение F_1:

```
F1=Dt(u) + Dx(u^2) + Dy(u*v) + Dz(u*w) + Dx(p) - 1/Re*Delta(u)
```

Разложим его в ряд по степеням $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$:

```
F1.taylor((dt,0),(dx,0),(dy,0),(dz,0),1).factor()
```

Главный член разложения F_1 можно записать в виде

$$\frac{(C\cos(ky) + A\sin(kz))\Delta t k^4 e^{-\frac{k^2 t}{Re}}}{2Re^2},$$

это выражение можно оценить сверху как

$$\frac{Mk^4\Delta t}{2Re^2}, \quad M = \sqrt{A^2+B^2+C^2}. \tag{2}$$

Отсюда видно, что второе уравнение выполняется с точностью до членов порядка Δt. Столь невысокий порядок аппроксимации обусловлен заменой производной по t на несимметричный оператор D_t.

Аналогичные выражения получаются для F_2 и F_3. Иначе устроена невязка в последнем уравнении схемы, аппроксимирующем уравнение Пуассона для давления. Подстановка в него ABC-решения выполняется тем же путем

```
F4=Dx(Dx(p))+Dy(Dy(p))+Dz(Dz(p))+Dx(Dx(u^2)) + Dy(Dy(v^2)) + Dz(Dz(w^2)) \
+2*(Dx(Dy(u*v)) + Dx(Dz(u*w)) + Dy(Dz(v*w))) \
-1/Re*(Dx(Delta(u)) + Dy(Delta(v)) + Dz(Delta(w)))
```

Однако разложение в ряд F_4 дает в качестве главных членов дает сумму членов 4-го порядка относительно $\Delta x, \Delta y$ и Δz. Эту сумму можно оценить сверху как

$$\frac{M^2 k^6}{4} \Delta r^4, \quad \Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \tag{3}$$

При подборе величины шагов естественно пытаться сделать выражения (2) и (3) малыми. При этом уравнения, аппроксимирующие уравнения Навье-Стокса, дают оценку для шага Δt, а уравнение, аппроксимирующее уравнения Пуассона, — оценку для Δr.

4. Заключение

Проделанные вычисления показывают, что системы компьютерной алгебры позволяют оценить невязки в выполнении уравнений разностной схемы, заданной в символьном виде, на аналитических решениях. На основе этих невязок можно сделать рекомендации по выбору шага по времени и по пространству.

В ряде недавних публикаций [9—11] были найдены новые семейства течений, которые существенно расширяют запас аналитических решений, на которых мы можем тестировать предлагаемые разностные схемы.

Авторский вклад: Концептуализация и редактирование: Михаил Дмитриевич Малых; вычисления в Sage, подготовка текста статьи: Ильшат Тагирович Дулатов. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

Финансирование: Данное исследование не получало внешнего финансирования.

Заявление о доступности данных: В ходе исследования не было создано и проанализировано никаких новых данных. Совместное использование данных неприменимо.

Конфликты интересов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности: Мы благодарим проф. Н.К. Пономарева (РУДН), познакомившего нас с вопросами моделирования закрученных потоков, и проф. Ю.А. Блинкова (Саратовский университет), с которым мы не раз обсуждали вопросы проектирования разностных схем для уравнений Навье-Стокса в системах компьютерной алгебры.

Список литературы

1. Животовский, Б. А. *Водосбросные и сопрягающие сооружения с закруткой потока* (Изд-во РУДН, Москва, 1995).
2. Hecht, F. *FreeFem++* (2018).
3. Wilcox, D. C. *Turbulence Modeling for CFD* (Dcw Industries, 2006).
4. Белов, И. А. & Исаев, С. А. *Моделирование турбулентных течений* (СПб, 2001).
5. Sadrehaghighi Ideen. *Turbulence Modeling. A Review* 2018.
6. Tkachenko, E. V., Debolskiy, A. V. & Mortikov, E. V. Intercomparison of Subgrid Scale Models in Large-Eddy Simulation of Sunset Atmospheric Boundary Layer Turbulence: Computational Aspects. *Lobachevskii Journal of Mathematics* **42,** 1580—1595 (2021).

7. Gerdt, V. P., Robertz, D. & Blinkov, Y. A. *Strong Consistency and Thomas Decomposition of Finite Difference Approximations to Systems of Partial Differential Equations* 2020. arXiv: 2009.01731 [cs.SC].
8. Ковалёв, В. П., Просвиряков, Е. Ю. & Сизых, Г. Б. Получение примеров точных решений уравнений Навье–Стокса для винтовых течений методом суммирования скоростей. *Труды МФТИ* **9,** 71—88 (2017).
9. Хорин, А. Н. Семейство точных решений уравнений Навье–Стокса для верификации компьютерных программ. *Труды МФТИ* **12,** 80—89 (2020).
10. Сизых, Г. Б. Расщепление уравнений Навье—Стокса для одного класса осесимметричных течений. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки* **24,** 163—173 (2020).
11. Kovalev, V. P. & Prosviryakov, E. Y. A new class of non-helical exact solutions of the Navier–Stokes equations. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ.* **24,** 762—768 (2020).