

УДК 004.42

Численное исследование влияния индуктивной связи на вольт-амперную характеристику в системе длинных джозефсоновских переходов

М. В. Башашин^{1, 3}, И. Р. Рахмонов^{2, 3, 4}, Е. В. Земляная^{1, 3}

¹ Лаборатория информационных технологий им. М.Г. Мещерякова, Обьединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

² Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Обьединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

³ Государственный университет "Дубна", ул. Университетская 19, Дубна, Московская область, Россия, 141980

⁴ Московский физико-технический институт, Институтский переулок 9, Долгопрудный, Московская область, Россия, 141701

Email: bashashinmv@jinr.ru

Рассматривается динамическая модель стека длинных джозефсоновских переходов, описываемая начально-краевой задачей для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций разности фаз и напряжения на каждом джозефсоновском переходе. Численное решение этой системы основано на введении равномерной дискретной сетки вдоль длины джозефсоновского перехода, использовании стандартных трех-точечных конечно-разностных формул для аппроксимации производных и вычисления значений неизвестных функций в узлах дискретной сетки с помощью четырех-шагового метода Рунге–Кутты. Процедура расчета вольт-амперной характеристики (ВАХ) в такой системе основана на вычислении усредненного напряжения при увеличивающемся и уменьшающемся значении внешнего тока. Представлены численные результаты, демонстрирующие влияние емкостной и индуктивной связи на структуру ВАХ. Также представлены результаты тестовых расчетов, подтверждающие эффект ускорения вычислений при параллельных вычислениях на суперкомпьютере «Говорун» Многофункционального информационно-вычислительного комплекса Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Ключевые слова: MPI, параллельные вычисления, джозефсоновские переходы

1. Введение

Неослабевающее внимание исследователей к изучению сверхпроводящих джозефсоновских структур различного типа вызван перспективами их практического применения в сверхпроводящей электронике и возможностями использования в качестве элементной базы для квантовых процессоров и сверхпроводящей компьютерной памяти [1, 2]. Одной из важных характеристик физических процессов в системах джозефсоновских переходов является динамическая зависимость напряжения от воздействия внешнего тока – вольтамперная характеристика (ВАХ). В общем случае исследование полной структуры ВАХ может проводиться только на основе компьютерного моделирования. В данной работе рассматривается динамическая модель стека длинных джозефсоновских переходов (ДДП), описываемая начально-краевой задачей для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций разности фаз и напряжения на каждом контакте. В рамках этой модели исследуется влияние на структуру ВАХ индуктивной связи между соседними контактами в системе длинных ДДП по сравнению с расчетами для системы изолированных ДДП и для случая совокупного учета емкостной и индуктивной связи, рассмотренного ранее в [3].

2. Математическая модель, вычислительная схема и эффект параллельной реализации

Модель стека, состоящего из N связанных ДДП описывается системой уравнений относительно разностей фаз $\varphi_l = \varphi_l(x, t)$ и напряжений $V_l = V_l(x, t)$ на каждом l -ом ДП [4]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} = D_c V_l + s_c V_{l+1} + s_c V_{l-1} \\ \frac{\partial V_l}{\partial t} = \sum_{n=1}^N \left(\varepsilon_{l,n}^{-1} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} \right) - \sin \varphi_l - \beta \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} + I \end{cases}, \quad \frac{\partial \varphi_l(0, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_l(L, t)}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Здесь $l = 1, \dots, N$ – номер ДП в стеке, $x \in (0, L)$, L – длина ДП, $t \geq 0$, ε – матрица индуктивной связи:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & S & 0 & \dots & & & S \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & S & 1 & S & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S & & & \dots & 0 & S & 1 \end{pmatrix},$$

β – параметр диссипации, S – параметр индуктивной связи, принимающий значения в интервале $0 < |S| < 0.5$, D_c – эффективная электрическая толщина ДП, нормированная на толщину диэлектрического слоя, s_c – параметр емкости связи, I – внешний ток. Все величины в системе переведены в безразмерные (см. [3]).

Численное решение системы (1) основано на использовании трех-точечных формул конечно-разностной аппроксимации производных по пространственной координате в приведенных уравнениях и решении получаемой задачи Коши относительно значений искомых функций в узлах дискретной сетки по координате методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Как уже сказано выше, ВАХ является одной из основных характеристик системы ДДП, отражая динамику изменения суммированного по всем ДП усредненного напряжения при изменении внешнего тока I . Расчет ВАХ основан на вычислениях, при каждом фиксированном значении тока I , усредненных напряжений на каждом l -ом ДП суммированных полученных на всех ДП усредненных напряжений [2]:

$$V_l(t) = \frac{1}{L} \int_0^L V_l(x, t) dx, \quad \langle V_l \rangle = \frac{1}{T_{max} - T_{min}} \int_{T_{min}}^{T_{max}} V_l(t) dt, \quad \langle V \rangle = \sum_{l=1}^N \langle V_l \rangle. \quad (2)$$

Вычисление интегралов в (2) проводится с использованием стандартных квадратурных формул.

Расчет начинается при $I = I_{min} \sim 0$ с нулевыми начальными условиями. Значение тока увеличивается до $I_{max} = 1$ с заданным шагом ΔI и затем уменьшается до нуля. Для каждого значения I расчет проводится до $t = T_{max}$. Полученные значения напряжений и разности фаз используются в качестве начальных условий при расчете для следующего значения I .

Для ускорения численного исследования авторами, с использованием технологии MPI, была разработана параллельная реализация расчета ВАХ в соответствии с вышеописанной процедурой. Параллельный алгоритм и результаты тестовых расчетов по проверке его эффективности на многопроцессорных кластерах ЦИВК и HUBILIT представлены в работе [4]. Аналогичным образом проведенные тестовые расчеты на суперкомпьютере “Говорун”, также входящем в состав Многофункционального информационного вычислительного комплекса ОИЯИ [5], подтвердили в

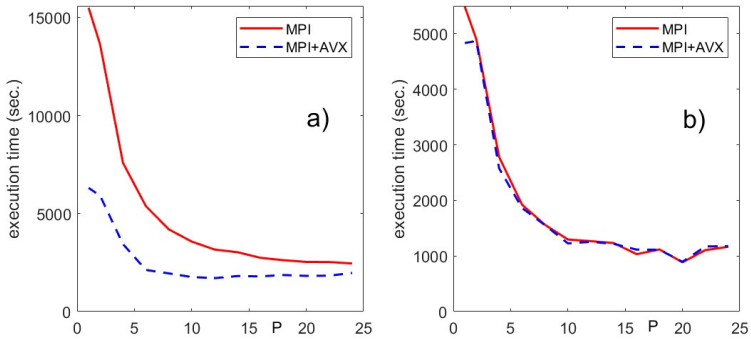


Рис. 1. Время работы параллельной MPI-программы в зависимости от количества P задействованных параллельных MPI-процессов с использованием и без использования AVX-512 при $L = 25$, $M = 5 \cdot 10^3$ для случая $N = 1$ (a) и для случая $N = 10$ (b). Время работы параллельной программы для случая десяти контактов длины 25.

целом выводы работы [4], что ускорение вычислений при расчетах в параллельном режиме по сравнению с последовательным счетом может составлять от 5 до 9 раз в зависимости от количества ДП N в системе и количества узлов M равномерной дискретной сетки по координате ($M = L/h_r$, h_r – шаг дискретной сетки). Тем самым, продемонстрирована эффективность разработанной схемы и MPI-программы вычисления ВАХ для системы ДДП. Отметим при этом, что время работы параллельной программы “Говорун” примерно в 5 раз быстрее по сравнению с временем счета на ЦИВК при одинаковых значениях параметров M и N , определяющих объем вычислений.

Уменьшение времени счета с ростом количества P задействованных в расчете MPI-процессов демонстрируется на Рис. 1 для случая единичного ДДП $N = 1$ и для $N = 10$ (сплошная красная кривая на панелях (a) и (b)). В обоих случаях полагали $L = 25$, $M = 5 \cdot 10^3$. Для этих же случаев была также проведена оценка эффекта векторизации вычислений на основе использования инструкций AVX-512 на производительность MPI-программы. Соответствующие кривые зависимости времени счета от количества MPI-процессов показаны на Рис. 1 синим пунктиром. Видно, что заметный эффект от применения инструкций AVX-512 достигается при расчете ВАХ для единичного ДДП: время счета уменьшается в 2.3 раза (см. Рис. 1a). В то же время при расчете ВАХ для стека из 10 ДДП эффект от применения AVX-512 оказался незначительным (см. Рис. 1b).

3. Результаты численного моделирования и выводы

Как уже было отмечено во Введении, подробный анализ совокупного влияния индуктивной и емкостной связи на структуру ВАХ и интенсивность излучения из системы ДДП был проведен в [3]. Было показано, что в результате такого влияния структура ВАХ усложняется за счет появления дополнительных ступеней. Однако не проводилось исследование влияния только индуктивной связи без учета емкостной. В этом разделе представлены и проанализированы результаты, демонстрирующие влияние только индуктивной связи.

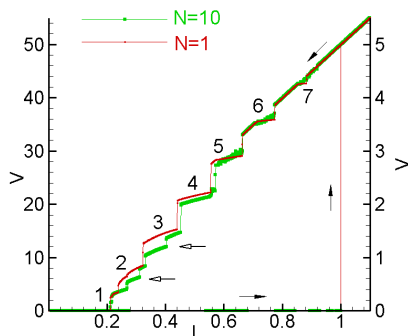


Рис. 2. Вольт-амперные характеристики одиночного и системы $N = 10$ ДДП длиной $L = 10$. В случае системы ДДП учитывалась только индуктивная связь с параметром $S = -0.05$.

На Рис.2 представлены ВАХи, рассчитанные для одиночного (красная тонкая кривая) и системы 10 ДДП (зеленая жирная кривая) с учетом только индуктивной связи. ВАХ получена путем увеличения базового тока до $I_{max} = 1.2$ и уменьшения обратного до нуля. Ход изменения тока вдоль ВАХ показан стрелками. При обратном ходе тока на ВАХ наблюдаются так называемые ступеньки нулевого поля, которые связаны с возникновением определенных количеств флюксонов. Для каждой ступеньки указано цифрами число возникающих флюксонов. Если сравнивать ВАХ системы ДДП с ВАХ одиночного ДДП, то можно увидеть, что между ступеньками с 1, 2 и 3 флюксонов в случае системы ДДП появляются дополнительные ступеньки, которые показаны полыми стрелками. Поскольку эти ступеньки отсутствуют в случае одиночного ДДП, то можно прийти к выводу, что они возникают из-за наличия индуктивной связи. Для того чтобы понять причину возникновения этих ветвей, нами рассчитаны пространственно-временные зависимости в отдельных ДДП системы. Пространственно-временная зависимость магнитного поля при значении $I = 0.27$ для ветви между ступеньками с 1 и 2 флюксонами, представлена на Рис.3. Здесь J_1, J_2, \dots обозначают номер ДДП в системе.

Как видно на Рис.3, в ДДП с нечетными номерами возникают по два флюксона, а в ДДП с четными номерами – по одному. Это обстоятельство и является причиной возникновения дополнительных ветвей. Возникновение таких состояний связано с индуктивной связью, т.е. без учета индуктивной связи количество флюксонов одинаково во всех переходах, а при наличии индуктивной связи некоторые переходы переключаются из двухфлюксонных состояний в однофлюксонные, в то время как другие остаются в двухфлюксонном состоянии.

4. Заключение

В заключение отметим, что нами проведено компьютерное моделирование ВАХ в случае отсутствия емкостной связи при наличии только индуктивной связи. Полученные результаты показывают, что индуктивная связь также инспирирует возникновение новых состояний системы ДДП, что находит отражение в образовании дополнительных ступеней в структуре ВАХ. Таким образом, проведенное компьютерное моделирование продемонстрировало влияние индуктивной связи на структуру ВАХ в системе связанных ДДП.

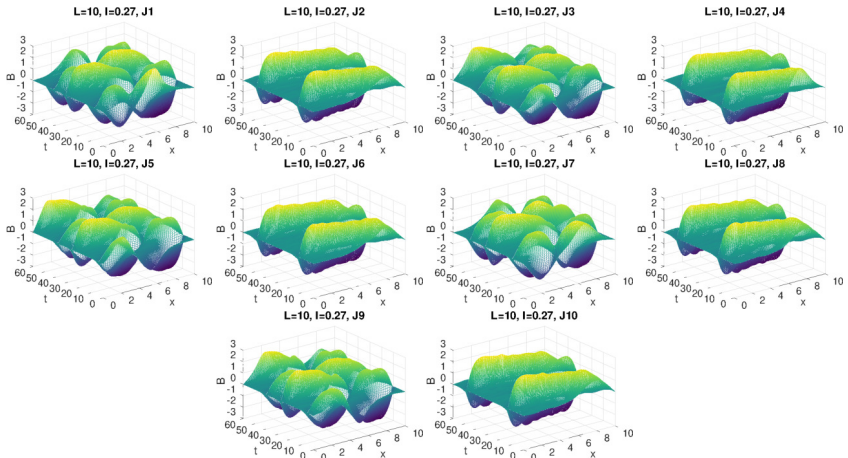


Рис. 3. Пространственно-временные зависимости магнитного поля в каждом ДП системы при значении тока $I = 0.27$.

Проведенные тестовые расчеты на суперкомпьютере “Говорун” показали, что возможность уменьшения времени счета до 9 раз при расчетах в параллельном режиме. При этом для определенных конфигураций стека ДДП использование инструкций AVX-512 обеспечивает за счет внутрипроцессорного параллелизма дополнительное сокращение времени счета более чем в два раза. Тем самым, реализация параллелизма позволяет успешно проводить компьютерное моделирование в более короткие сроки.

Благодарности

Компьютерное моделирование проведено при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ) в рамках научного проекта № 22-71-10022. Физическая часть работы выполнена при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 24-21-00340.

Литература

1. Bakurskiy S. V., Klenov N. V., Soloviev I. I., Kupriyanov M. Yu., Golubov A. A. Superconducting phase domains for memory applications, *Appl. Phys. Lett.* 108, 042602, 2016, doi:10.1063/1.4940440.
2. Рахмонов И.Р., Шукринов Ю.М., Ириев А. Параметрический резонанс в системе длинных джозефсоновских переходов, *Письма в ЖЭТФ* 99, вып. 11, 735–742. 2014. doi:10.7868/S0370274X14110058.
3. Рахмонов И.Р., Шукринов Ю.М., Атанасова П.Х., Земляная Е.В., Башашин М.В. Влияние индуктивной и емкостной связи на вольтамперную характеристику и электромагнитное излучение системы длинных джозефсоновских переходов, *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*, Т. 151, No. 1, с. 151–159, 2017, doi:10.7868/S00444451017010138.

4. Башашин М.В., Земляная Е.В., Рахмонов И.Р., Шукринов Ю.М., Атанасова П.Х., Волохова А.В. Вычислительная схема и параллельная реализация для моделирования системы длинных джозефсоновских переходов, Компьютерные исследования и моделирование. Т. 8, Вып. 4, с. 593–604, 2016, doi:10.20537/2076-7633-2016-8-4-593-604.
5. Adam Gh., et al. IT-ecosystem of the HybriLIT heterogeneous platform for high performance computing and training of IT-specialists, CEUR Workshop Proceedings, 2267, 638–644. 2018.

UDC 004.42

Numerical study of the influence of inductive and capacitive coupling on the current-voltage characteristic in a system of long Josephson junctions

M. V. Bashashin^{1,3}, I. R. Rahmonov^{2,3,4}, E. V. Zemlyanaya^{1,3}

¹ Meshcheryakov Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research

Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

² Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics

Joint Institute for Nuclear Research

Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

³ Dubna State University

Universitetskaya 19, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

⁴ Moscow Institute of Physics and Technology Nauchny pereulok 9, Dolgoprudny, Moscow region, 141701, Russia

Email: bashashinmv@jinr.ru

We consider a dynamic model of a stack of long Josephson junctions, described by an initial-boundary value problem for a system of nonlinear partial differential equations with respect to unknown functions of the phase difference and voltage at each contact. The numerical solution of this system is based on the introduction of a uniform discrete grid along the length of the Josephson junction, the use of standard three-point finite-difference formulas for approximating derivatives and calculating the values of unknown functions at the nodes of the discrete grid using the four-step Runge–Kutta method. The procedure for calculating the current-voltage characteristic (volt-ampere characteristic) in such a system is based on calculating the average voltage with increasing and decreasing values of the external current. Numerical results are presented demonstrating the influence of capacitive and inductive coupling on the structure of the current-voltage characteristic. The results of test calculations are also presented, confirming the effect of accelerating calculations during parallel calculations on the supercomputer “Govorun” of the Multifunctional Information and Computing Complex of the Laboratory of Information Technologies of JINR.

Key words and phrases: MPI, parallel computing, Josephson junctions