

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

ФИЗИЕВ Пламен Петков

МИНИМАЛЬНАЯ ДИЛАТОННАЯ КОСМОЛОГИЯ И  
КОМПАКТНЫЕ ОБЪЕКТЫ

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ: 01.04.02 – ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ  
НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ  
*доктора физико-математических наук*

ДУБНА – 2012

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики  
Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна.

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник	Арефьева И. Я. (МИРАН)
доктор физико-математических наук, профессор, профессор	Гальцов Д. В. (МГУ)
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник	Барбашов Б. М. (ЛТФ ОИЯИ)

**Ведущая организация:** Институт ядерных исследований РАН, г. Москва

Защита состоится 2012 года в часов на заседании  
диссертационного совета Д720.001.01 при Объединенном институте ядерных исследований  
(141980, Московская область, г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6, ЛТФ ОИЯИ).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Объединенного института  
ядерных исследований (141980, Московская область, г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д.6, ОИЯИ).

Автореферат разослан 2012 года

Учёный секретарь диссертационного совета

доктор физико-математических наук

А. Б. Арбузов

## 1 Актуальность темы

На сегодняшний день общая теория относительности (ОТО) является наиболее успешной теорией гравитации в масштабах земной поверхности, Солнечной и звёздных систем. Вместе со стандартной моделью материи (СММ) она даёт удовлетворительное описание гравитационных явлений также в масштабах галактик и даже в масштабах видимой Вселенной. Несмотря на это, без некоторых изменений или без введения некоторых новых видов материи и энергии кажется, что ОТО не способна объяснить: 1) аномалии, открытые космическими зондами Пионер, 2) вращение галактик, 3) движение галактик в галактических кластерах, 4) физику ранней Вселенной, 5) инфляцию, 6) барион-антибарионную асимметрию, 7) проблему начальной сингулярности, 8) проблему вакуумной энергии, 9) наблюдаемое в наши дни ускоренное расширение Вселенной (см., например, Gorbunov et al. (2011) и ссылки там). Поэтому кажется оправданным искать некоторое *минимальное* обобщение ОТО, которое является совместимым с известными гравитационными экспериментами и наблюдательными данными и которое способно решить некоторые из упомянутых проблем. Хотелось бы выбрать такое обобщение ОТО, которое окажется бы частью будущей более фундаментальной теории. Например, интересную модель можно получить, рассматривая скалярное поле Хиггса как инфляционное поле, см. Arefeva et al. (2011) и ссылки там.

В диссертации рассматриваемая модель такого типа, названная *минимальной дилатонной гравитацией* (МДГ). Её исследование начато в работе O’Hanlon (1974), в связи с теорией Фуджи массивного дилатона, однако без какой-либо связи с космологией или с астрофизикой. Подобная модель возникает также в  $D = 5$  теории Калуцы-Клейна. МДГ можно считать и как часть суперструнной теории (ССТ) или скалярно-тензорных теорий гравитации (СТТГ).

Следует специально отметить, что в последние несколько лет в литературе наблюдается повышенный интерес к  $f(R)$ -модифицированным теориям гравитации, в которых линейная зависимость действия Гильберта-Эйнштейна от кривизны  $R$  пространства-времени заменяется на некоторую нелинейную функцию  $f(R)$ , Sotiriou et al. (2010). Открытие  $f(R)$ -теорий как моделей космологической инфляции началось с работ Starobinsky (1980, 1983). Имеется множество моделей с разными функциями  $f(R)$ , у которых есть значительные успехи, но и существенные трудности. Было замечено, что заменой полевых переменных их можно свести к ОТО, но при этом возникает дополнительная скалярная степень свободы  $\Phi$ . Такие  $f(R)$ -модели можно *локально* привести к виду рассматриваемой нами МДГ. Однако существенным преимуществом МДГ перед  $f(R)$ -моделями представляется тот факт, что у нас нет физической интуиции, как выбирать функцию  $f(R)$ , в то время как возникающие вместо неё космологический и дилатонный потенциалы МДГ –  $U(\Phi)$  и  $V(\Phi)$  позволяют сформулировать физические требования к модели на основе нашего опыта.

Другая модель дилатонной гравитации основана на масштабных и конформных свойствах

теории. Она восходит к работам Weyl (1921) и Dirac (1973), где дилатон играет роль поля, которое задаёт локальные масштабы во Вселенной. Современное развитие этой идеи, включая весьма необычные космологические следствия, можно найти в серии работ Barbashov et al. (2006), Arbuzov et al. (2006), Arbuzov et al. (2011).

Главный физический вопрос всех моделей дилатонной гравитации – это величина массы дилатона. В модели МДГ удаётся получить более определенные результаты по сравнению с СТГГ.

Вне сомнения, решение Шварцшильда и решение Керра являются физически самыми значимыми решениями ОТО. Достаточно напомнить, что эти решения являются базисом для экспериментальной проверки ОТО в наземных лабораториях и в астрофизике, в Солнечной системе, в физике звезд, чёрных дыр, гамма-вспышек, космических струй и т.д. (см., например, Will (2006) и ссылки там) а также применяются в практических расчётах орбит космических полётов, в космической навигации, в космической связи и т.д.

ОТО с  $\Lambda$  членом и МДГ имеют одни и те же решения, описывающие черные дыры Шварцшильда (ЧДШ) или Керра (ЧДК). Однако теория возмущения фоновых метрик существенным образом отличаются в этих двух моделях гравитации. Можно надеяться, что развитый новый аппарат для теории возмущений метрики Шварцшильда и метрики Керра в ОТО, который излагается во второй части диссертации и представляет самостоятельный интерес, окажется полезным для развития теории возмущений тех же метрик в МДГ.

В рамках нашего подхода, основанного на точных решениях уравнений Редже-Уилера и Тьюкольского, удалось получить: более реалистические модели гравитационных полей реальных тел, важную информацию о стабильности фоновых метрик Шварцшильда и Керра, информацию о поведении разных физических полей в условиях сильного гравитационного поля соответствующих метрик, а также ответы на ряд вопросов гравитационной физики.

Давно известно (см., например, Galtsov (1986) и ссылки там) что радиальное уравнение Редже-Уилера (РУРУ), угловое уравнение Тьюкольского (УУТ) и радиальное уравнение Тьюкольского (РУТ) можно привести к конфлюэнтному уравнению Гойна (см., например, Slavyanov et al. (2000) и ссылки там). В наших работах впервые изучалось детальное описание решений РУРУ, УУТ и РУТ в терминах конфлюэнтной функции Гойна  $\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, z)$ , которая определяется как единственное локальное решение конфлюэнтного уравнения Гойна, регулярное в окрестности особой точки  $z=0$ .

Построение полной теории функций Гойна является актуальной задачей, так как они применяются в большом числе задач разных разделов современной науки, число новых применений постоянно растет.

В диссертации содержится дальнейшее развитие математической теории конфлюэнтной функции Гойна. На основе единственного компьютерного пакета MAPLE, включающего функции Гойна, развиты новые аналитические и численные методы для применения этих функций в задачах гравитационной физики.

## 2 Цель исследования и постановка задачи

Целью данной диссертации является построение и изучение новых теоретических моделей и создание новых математических методов для космологических и астрофизических задач. Предложена и исследована минимальная модель дилатонной гравитации (МДГ), являющаяся естественным и простейшим обобщением ОТО. В ней для описания гравитации кроме римановой метрики вводится массивное скалярное поле дилатона с соблюдением слабого принципа эквивалентности. Проведено сравнение с известными экспериментальными данными и получен ряд следствий такой модели для физики звёзд и для космологии. Модель МДГ и ОТО с  $\Lambda$  членом имеют одни и те же решения типа чёрных дыр. Во второй части диссертации рассмотрены возмущения метрики Шварцшильда и Керра в рамках ОТО. Разработан новый математический аппарат для точного решения соответствующих уравнений первого порядка теории возмущений указанных метрик при помощи конфлюэнтных функций Гойна. Дополнительно развита теория конфлюэнтных функций Гойна, в частности, изучены точные решения уравнений Редже-Уилера и Тьюкольского для квазинормальных мод метрик Шварцшильда и Керра, дана классификация таких решений, обобщены тождества Тьюкольского-Старобинского, получены новые решения типа коллимированных бегущих волн и с их помощью найдены спектры первичных космических струй из чёрных дыр Керра (ЧДК) и голых сингулярностей Керра (ГСК), а также бегущие коллимированные волны непрерывного спектра. Обсуждаются возможности сравнения полученных результатов с наблюдательными данными.

## 3 Научная новизна и практическая значимость

Все полученные в данной диссертации результаты являются новыми и оригинальными, на момент их публикации они были первые в мире.

Модификация *физического содержания* модели О'Ханлона, которая основанна на рассмотрении космологического потенциала как естественного обобщения  $\Lambda$ -члена и применение такой модифицированной модели к космологии и к проблеме космологической константы впервые изучались в работах автора, где введён сам термин МДГ. Путём анализа известных данных, было получено экспериментальное ограничение на массу дилатона:  $m_\phi \geq 10^{-3}$  eV. Значительно большие массы порядка TeV не исключаются экспериментальными данными. В модели МДГ были открыты: 1) возникновение высокочастотных осцилляций дилатонного поля, 2) модели Вселенной без тонкой подгонки, 3) простое решение космологической проблемы плоскостности  $3D$  пространства, 4) существование множества последовательных инфляционных этапов, 5) существование естественного плавного выхода из инфляции с переходом в режим наблюдаемого ускоренного расширения Вселенной, 6) новая формулировка проблемы вакуумной энергии.

Получены также следующие новые результаты: 1) дифференциальные инварианты

тензора Римана, доказывающие геометрический характер горизонтов метрики Керра, 2) точные решения уравнений Редже-Уилера, Тьюкольского и Зерилли в терминах конфлюэнтной функции Гойна, 3) получены спектры квазинормальных мод (КНМ) ЧДШ и ЧДК при помощи этих решений, 4) спектры регулярно-сингулярных задач в метрике Шварцшильда, описывающие тела с отражающей поверхностью, 5) решение вопроса о характере девятой моды КНМ ЧДШ. 6) точные решения во внутренней области ЧДШ, исследован их спектры и устойчивость, 7) явление отталкивания и притяжения уровней КНМ ЧДШ, 8) специфические свойства и соотношения для конфлюэнтных функций Гойна, 9) вывод и обобщение тождеств Тьюкольского-Старобинского, 10) классификация точных решений уравнения Тьюкольского, 11) новые решения уравнения Тьюкольского, описывающие коллимированные бегущие волны и космические струи.

Практическая значимость этих результатов в том, что они дают метод исследования и получения выводов о природе компактных тяжёлых объектов, идентифицируемых по косвенным признакам как астрофизические ЧД. Эти результаты могут быть полезными для создания теории наблюдаемых астрофизических струй из разных объектов, таких как гамма-вспышки, активные галактические ядра и др.

## 4 Результаты, выносимые на защиту

[1] Введена и исследована модель минимальной дилатонной гравитации с космологическим потенциалом и ненулевой массой дилатона. Изучены её применения в астрофизике, экспериментальные ограничения на массу дилатона, универсальное антигравитационное взаимодействие между частицами через упругую силу отталкивания.

[2] Исследована новая модель инфляции без тонкой подгонки, в рамках которой получены: осцилляции высокой частоты дилатонного поля, наличие последовательности инфляционных периодов и плавного выхода на режим ускоренного расширения Вселенной, обратная пропорциональность времени инфляции и массы дилатона.

[3] Исследованы компактные объекты: бозонные звёзды и нейтронные звёзды в присутствии дилатонного поля.

[4] Найдены и в деталях изучены точные решения уравнений возмущений метрики Шварцшильда в терминах конфлюэнтных функций Гойна. Создан новый аналитический аппарат и новые численные методы исследования граничных задач, и с их помощью найдены квазинормальные моды черных дыр и других компактных объектов.

[5] Выведены новые соотношения и свойства конфлюэнтных функций Гойна, с помощью коотрых дан новый вывод и обобщение тождеств Тьюкольского-Старобинского.

[6] Найдены и изучены точные решения уравнений возмущений метрики Керра, дана классификация этих решений и их свойства в терминах конфлюэнтных функций Гойна. Исследованы решения, которые описывают коллимированные односторонние волны непрерывного спектра. Получен дискретный спектр первичных электромагнитных струй из черных дыр Керра и из голых сингулярностей Керра.

## 5 Публикации автора, связанные с диссертацией

### 5.1 Журнальные публикации

#### Часть I: Минимальная дилатонная гравитация

1. Fiziev P. P., *Minimal Model for Dilatonic Gravity*, **Mod. Phys. Lett. A**, Vol. 15, No. 32, pp. 1077 – 1990 (2000).
2. Fiziev P. P., Yazadjiev S., Boyadjiev T., Todorov M. *Boson stars in massive dilatonic gravity*, **Phys. Rev. D**, Vol. 61, pp. 124018-1 – 124018-9 (2000).
3. Boyadjiev T., Fiziev P. P., Yazadjiev S., *Neutron star in presence of torsion-dilaton field*, **Class. Quant. Grav.**, Vol. 16, pp. 2359 – 2380 (1999).
4. Boyadjiev T., Todorov M., Fiziev P. P., Yazadjiev S., *Mathematical Modeling of Boson-Fermion Stars in the Generalized Scalar-Tensor Theories of Gravity*, **Jour. of Comp. Phys.**, Vol. 166, pp. 253 – 270 (2001).
5. Boyadjiev T.L., Todorov M., Fiziev P. P., Yazadjiev S., *Numerical Investigation of Boson - Fermion Stars in Dilatonic Gravity*, **Jour. Comp. Meth. Sci. Eng.**, Vol.2, No. 4, pp. 245 – 252 (2002).
6. Boyadjiev T. L., Todorov M. D., Fiziev P. P., Yazadjiev S. S., *New numerical algorithm for modelling of boson-fermion stars in dilatonic gravity*, **Jour. Comp. App. Math.**, Volume 145, pp. 113 – 131 (2002).
7. Fiziev P. P., Georgieva D., *Inflation and oscillations of the Universe in 4D dilatonic gravity*, **Phys. Rev. D**, Vol. 67, pp. 064016-1 – 064016-11 (2003).

#### Часть II: Возмущения метрик Шварцшильда и Керра в терминах функций Гойна. Квазинормальные моды. Космические струи

8. Fiziev P. P. *Exact Solutions of Regge-Wheeler Equation and Quasi-Normal Modes of Compact Objects*, **Class. Quant. Grav.**, Vol. 23, pp. 2447 – 2468 (2006).
9. Fiziev P. P., *Classes of exact solutions to the Teukolsky master equation*, **Class. Quantum Grav.**, Vol. 27, pp. 1 – 30 (2010).
10. Fiziev P. P., *Teukolsky-Starobinsky Identities - a Novel Derivation and Generalizations*, **Phys. Rev. D**, Vol. 80, pp. 124001-1 – 124001-8 (2009).
11. Fiziev P. P., *Novel relations and new properties of confluent Heun's functions and their derivatives of arbitrary order*, **Jour. Phys. A: Math. Theor.**, Vol.43, 035203 pp. 1 – 9 (2010).
12. Borissov R. S., Fiziev P. P., *Exact Solutions of Teukolsky Master Equation with Continuous Spectrum*, **Bulg. Jour. Phys.**, Vol.37 no.2 pp. 65-89 (2010).
13. Staicova D. R., Fiziev P. P., *The Spectrum of Electromagnetic Jets from Kerr Black Holes and Naked Singularities in the Teukolsky Perturbation Theory*, **Astrophys. Space Sci.**, **332**, pp. 385 – 401 (2011).
14. Fiziev P. P. , Staicova D. R. , *Application of the confluent Heun functions for finding the quasinormal modes of nonrotating black holes* **Phys. Rev. D** **84**, pp. 127502-1 – 127502-5 (2011).



## 5.2 Сборники конференций

### Часть I: Минимальная дилатонная гравитация

15. Fiziev P. P., *Gravitation Theory with Propagating Torsion*, in **Proceedings of XI International Conference "Problems in Quantum Field Theory"**, Dubna, Russia, July 13-17, 1998, Dubna E2-99-35, 1999, pp. 76-80;

16. Fiziev P. P., *4D Dilatonic Gravity and Some of Its Consequences for Astrophysics and Cosmology*, in **Proceedings of the First Advanced Research Workshop: Gravity, Astrophysics and String at Black Sea**, Kiten, Bulgaria, 2002, St. Kliment Ohridski University Press, pp. 75-117 (2003).

### Часть II: Возмущения метрик Шварцшильда и Керра в терминах функций Гойна. Квазинормальные моды. Космические струи

17. Fiziev P. P., *Exact Solutions of Regge-Wheeler Equation*, **Jour. Phys. Conf. Ser.**, Vol. 66, 012016, pp. 1 – 10 (2007).

## 6 Апробация результатов

Результаты диссертации многократно докладывались в разные годы – с 2000 по 2011 на международных конференциях и семинарах в России, Болгарии, Сербии, Польше, Италии, Дании, Швейцарии, Германии, США, Мексике, Испании. Точные названия, место и время некоторой части этих докладов можно найти выше – в списке публикаций автора, связанных с диссертацией, в пункте 5.2 или в следующем списке докладов на конференциях, опубликованных в электронном виде:

### Часть I: Минимальная дилатонная гравитация

1. Fiziev P. P., 2000, *Cosmological Constant or Cosmological Potential*, Talk at conference "Problems of Vacuum Energy", Copenhagen, 23-26 August 2000, arXiv:gr-qc/0008051.

### Часть II: Возмущения метрик Шварцшильда и Керра в терминах функций Гойна. Квазинормальные моды. Космические струи

2. Fiziev P. P., 2007, *Exact Solutions of Regge-Wheeler and Teukolsky Equations*, talk given on 23 May 2007 at the seminar of the Astrophysical Group of the Uniwersytet Jagiellonski, Institut, Fizyki, Cracow, Poland, <http://tspa.uni-sofia.bg/research/>

3. Fiziev P. P., 2007, *Exact Solutions of Teukolsky Equations*, talk given at the Conference Gravity, Astrophysics and Strings at Black Sea, 10-16 June 2007, Primorsko, Bulgaria, [http://tspa.uni-sofia.bg/conf/GAS/files/Plamen\\_Fiziev.pdf](http://tspa.uni-sofia.bg/conf/GAS/files/Plamen_Fiziev.pdf).

4. Fiziev P. P., Staicova D. R., 2007, A new model of the Central Engine of GRB and the Cosmic Jets, talk given at the Conference Gravity, Astrophysics and Strings at Black Sea 10-16 June 2007, Primorsko, Bulgaria, [http://tspa.uni-sofia.bg/conf/GAS/files/GRB\\_Central\\_Engine.pdf](http://tspa.uni-sofia.bg/conf/GAS/files/GRB_Central_Engine.pdf).

5. Fiziev P. P., Staicova D. R., 2007, A new model of the Central Engine of GRB, talk given

at the Fourth Aegean Summer School, 17-22 September 2007, Lesvos, Greece [http://tcpa.uni-sofia.bg/research/DStaicova\\_Lesvos.pdf](http://tcpa.uni-sofia.bg/research/DStaicova_Lesvos.pdf).

**6. Fiziev P. P.**, 2007, *Exact Solutions of Regge-Wheeler and Teukolsky Equations*, talk given on 28 December 2007 at the seminar of the Department of Physics, University of Nis, Serbia, <http://tcpa.uni-sofia.bg/research/>

**7. Fiziev P. P.**, 2009, *Exact Solutions to Regge-Wheeler and Teukolsky Master Equations: Some applications to astrophysical problems and some open problems* (Talk at AEI, Golm, March 26, 2009), <http://tcpa.uni-sofia.bg/research/> and <http://numrel.aei.mpg.de/Events/Seminars/archive-huge/2008-2009/2009Mar26.fiziev.pdf>

**8. Fiziev P. P.**, 2009, *Generalized Teukolsky-Starobinsky Identities* (Talk at The International Bogoliubov Conference, 25th August, 2009), <http://tcpa.uni-sofia.bg/research/>

**9. Fiziev P. P.**, 2009, *Some Novel Properties and Applications of Heun's Functions to Physical Problems* (seminar at Moscow State University, February 22, 2010), <http://tcpa.uni-sofia.bg/research/>

**10. Borissov R., Fiziev P. P.**, 2009, *Exact Solutions of Teukolsky Master Equation with Continuous Spectrum* (Multi-Messenger Relativistic Astrophysics 2009, 5-9 July, Atlanta, May 19-21, 2009 USA), <http://tcpa.uni-sofia.bg/index.php?n=7>

**11. Staicova D. R., Fiziev P. P.**, 2010, *The Spectrum of Electromagnetic Jets from Kerr Black Holes and Naked Singularities in the Teukolsky Perturbation Theory* (Talk at GR19, 5-9 July, 2010, Mexico), <http://tcpa.uni-sofia.bg/research/>

## 7 Структура и объём диссертации

Диссертация охватывает два цикла работ автора и подразделяется на две тематически связанные части. Часть I: Минимальная дилатонная гравитация – введение и пять глав. Часть II: Возмущения метрик Шварцшильда и Керра в терминах функций Гойна. Квазинормальные моды. Космические струи – введение и девять глав. Общий объём диссертации 191 страницы, включая 32 рисунка, 2 таблицы, список публикаций автора, связанных с диссертацией, список 131 замеченных автором независимых цитирований этих его работ, 209 ссылок в связи с первой частью и 221 ссылку в связи со второй частью диссертации.

## 8 Содержание работы

### Часть I: Минимальная дилатонная гравитация

#### 8.1 Глава 1

Дано краткое изложение современной скалярно-тензорной теории гравитации. Подчеркнута связь с суперструнной теорией. Рассмотрена замена полевых переменных при помощи конформного преобразования Вейля. Обсуждается в деталях выбор между следующими тремя наборами полевых переменных: эйнштейновский набор полей (ЭНП), связанный с космологической константой набор полей (ЛНП) и закрученный набор полей (ЗНП). Обсуждаются также выбор феноменологического набора полей (ФНП) и физические принципы, на основе которых отбирается закрученный набор полей в качестве ФНП.

#### 8.2 Глава 2

Изучена модель МДГ с действием

$$\mathcal{A}_{g,\Phi} = -\frac{c}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{|\mathbf{g}|} (\Phi R + 2\Lambda^{obs} U(\Phi)), \quad (1)$$

где  $\kappa$  – постоянная Эйнштейна.

Вводится система космологических единиц, связанная с наблюдаемым значением космологической константы  $\Lambda^{obs} = (1.27 \pm 0.46) \times 10^{-56} \text{ см}^{-2}$  и введенным безразмерным числом Планка  $P = \sqrt{\Lambda^{obs}} L_{Pl} \approx 10^{-61}$ , где  $L_{Pl}$  – известная планковская длина.

Выделяя бесследовые части тензорных величин, обозначаемые как  $\hat{X}_\alpha^\beta = X_\alpha^\beta - \frac{1}{4} X \delta_\alpha^\beta$ , где

$X = X_\alpha^\alpha$  – след тензора  $X_\alpha^\beta$ , можно написать уравнения полей в виде системы

$$\Phi \hat{R}_\alpha^\beta - \widehat{\nabla_\alpha \nabla^\beta \Phi} = \hat{T}_\alpha^\beta, \quad (2a)$$

$$R + 2U_{,\Phi} = 0, \quad (2b)$$

$$\square \Phi + \frac{2}{3} \Phi U_{,\Phi} = \frac{1}{3} (T + 4U). \quad (2c)$$

Видно, что в МДГ динамические уравнения являются инвариантными относительно преобразований  $\{U, T\} \mapsto \{U + U_0, T - 4U_0\}$ , где  $U_0$  есть произвольная постоянная. Это позволяет утверждать, что космологический потенциал в действии (1) можно связать с некоторой частью энергии материи, например, с энергией её вакуумных флуктуаций. Рассмотрены вакуумные состояния МДГ и свойства допустимых космологических потенциалов. Физический вакуум модели МДГ есть вакуум де Ситтера (dSV). Это состояние с нулевым тензором энергии-импульса материи,  $T_{\alpha\beta} \equiv 0$ . В dSV постоянное поле  $\Phi_{const}$  имеет такое значение  $\Phi_{const} = \bar{\Phi}$ , которое обеспечивает совпадение постоянных  $\kappa$  и  $\Lambda^{obs}$  с их наблюдаемыми значениями:

$$\bar{\Phi} = 1, \quad U(\bar{\Phi}) = U(1) = 1. \quad (3)$$

Тогда в космологических единицах уравнения полей для dSV принимают вид

$$G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}, \quad V_{,\Phi}(1) = 0. \quad (4)$$

Как видно, метрика  $g_{\alpha\beta}$  в состоянии dSV есть метрика де Ситтера, а значение  $\bar{\Phi} = 1$  задаёт экстремум дилатонного потенциала  $V(\Phi) = \frac{2}{3} \Phi U(\Phi) - 2 \int U(\Phi) d\Phi + const$ . Из соображений устойчивости модели МДГ нужно потребовать, чтобы этот экстремум был минимумом функции  $V(\Phi)$ . Кроме того, получаем  $U_{,\Phi}(1) = 2$ ,  $R_{dSV} = -4$ . Соотношения  $V_{,\Phi}(1) = 0$  и  $U_{,\Phi}(1) = 2$ , вместе с условием  $U(1) = 1$ , имеют универсальный смысл. Они ограничивают возможный вид космологического потенциала  $U(\Phi)$ . Соотношение  $R_{dSV} = -4$  задаёт значение 4D скаляра кривизны для dSV.

Обсуждаются физические ограничения на потенциалы. Простейший удовлетворяющий этим требованиям потенциал – это

$$U(\Phi) = \Phi^2 + \frac{3}{16} \mathbf{p}_\Phi^{-2} \left( \Phi - \frac{1}{\Phi} \right)^2 \Rightarrow V(\Phi) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_\Phi^{-2} \left( \Phi + \frac{1}{\Phi} - 2 \right), \quad (5)$$

где  $\mathbf{p}_\Phi = \sqrt{\Lambda^{obs}} l_\Phi$  есть безразмерная комптоновская длина волны дилатона в космологических единицах ( $l_\Phi = \frac{\hbar}{cm_\Phi}$  есть обычная комптоновская длина волны дилатона,  $m_\Phi$  – его масса).

### 8.3 Глава 3

На больших расстояниях от материи, МДГ допускает приближение слабых полей:  $\Phi = 1 + \zeta$ ,  $|\zeta| \ll 1$  и  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ ,  $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ . Такое приближенное решение получено для нескольких точечных масс  $m_a$  в покое, рассматриваемых как источники гравитационного и дилатонного поля:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= -G \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} \left(1 + \alpha(\mathbf{p}_\Phi) e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|/l_\Phi}\right) - \frac{1}{6} \mathbf{p}_\Phi^2 c^2 \sum_a \frac{m_a}{M} (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|/l_\Phi)^2, \\ \Phi(\mathbf{r}) &= 1 + \frac{2}{3} \frac{G}{c^2(1 - \frac{4}{3}\mathbf{p}_\Phi^2)} \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|/l_\Phi},\end{aligned}\quad (6)$$

в предположении  $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2 + O_2(2\varphi/c^2)$ ,  $2\varphi/c^2 \ll 1$ . Оно справедливо, когда

$$r_s \ll r \ll \sqrt{3/\Lambda^{obs}}. \quad (7)$$

Здесь  $G = \frac{\kappa c^2}{8\pi}(1 - \frac{4}{3}\mathbf{p}_\Phi^2)$  есть постоянная Ньютона,  $M = \sum_a m_a$  – полная масса источников полей,  $r_s = 2GM/c^2$  есть радиус Шварцшильда источника, а  $\alpha(\mathbf{p}_\Phi) = (1 + 4\mathbf{p}_\Phi)/ (3 - 4\mathbf{p}_\Phi)$ .

В потенциале слабого гравитационного поля  $\varphi(\mathbf{r})$  (6) имеется член, корректирующий ньютоновские потенциалы. Видны поправки юкавского типа, учитывающие эффект экранирования дилатонным полем.

Присутствие члена, пропорционального  $\Lambda^{obs}$ , является следствием геометрии де Ситтера. Этот новый член представляет универсальную антигравитационную силу взаимодействия пробной массы  $m$  с любой из масс  $m_a$ . Эта сила выглядит как "упругая сила"  $\mathbf{F}_a = \frac{1}{3}\Lambda^{obs} m c^2 \frac{m_a}{M} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$ . Результирующая сила, действующая на массу  $m$ , имеет вид

$$\mathbf{F} = \sum_a \mathbf{F}_a = m c^2 (\Lambda^{obs}/3) \left( \mathbf{r} - \sum_a \frac{m_a}{M} \mathbf{r}_a \right). \quad (8)$$

При  $\Lambda > 0$  эта сила приводит к ускоренному расширению Вселенной. Полученные формулы описывают этот эффект по-новому – на языке механической силы "всемирного отталкивания", которая действует между частицами в присутствии члена с  $\Lambda > 0$ . Эта сила доминирует над силой Ньютона только на больших расстояниях сотен Мрс. Можно наблюдать также её влияние на массовую функцию галактических кластеров. На расстояниях масштаба звёздных систем, звёзд, планет и т.д. ньютоновская гравитационная сила на много порядков больше антигравитационной силы (8).

При анализе следствий из уравнений (6) для всех известных гравитационных экспериментов в Солнечной системе и в наземных лабораториях впервые получено ограничение

$$\mathbf{p}_\Phi \leq 10^{-30}, \quad (9)$$

что приводит к оценке энергии покоя дилатона  $E_\Phi = m_\Phi c^2 \geq 10^{-3} \text{ eV}$ . Однако значения массы дилатона  $m_\Phi \sim 1 \text{ GeV}/c^2$  или  $m_\Phi \sim 1 \text{ TeV}/c^2$ ,  $m_\Phi \sim M_{Pl}$  или даже  $m_\Phi > M_{Pl}$  не исключаются известными данными наземных гравитационных экспериментов и экспериментов в солнечной системе.

## 8.4 Глава 4

Рассмотрено влияние дилатона  $\Phi$  из МДГ на структуру бозонных звёзд (построенных из комплексного скалярного поля  $\Psi$ ), общепринятое действие для материи которых есть

$$\mathcal{A}_{matter} = \int d^4x \sqrt{|g|} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi^+ \partial_\nu \Psi - \frac{1}{2} m_B^2 \Psi^+ \Psi - \frac{1}{4} \lambda (\Psi^+ \Psi)^2 \right). \quad (10)$$

Показано, что в статическом сферически-симметричном случае структура бозонной звезды не зависит существенным образом от формы дилатонного потенциала, если отклонения поля  $\Phi$  от его значения на бесконечности малы. В таких условиях предсказания МДГ могут отличаться от предсказаний ОТО только на несколько процентов, если масса бозонного поля и масса дилатона близки:  $m_B \simeq m_\Phi$ . Изменение отношения  $\gamma = m_\Phi/m_B$  также не меняет существенным образом структуру звезды. Характерное поведение безразмерной плотности  $\sigma(r)$  как функции радиальной переменной  $r$  для разных значений отношения  $\gamma$  показано, в качестве примера, на рис. 1.

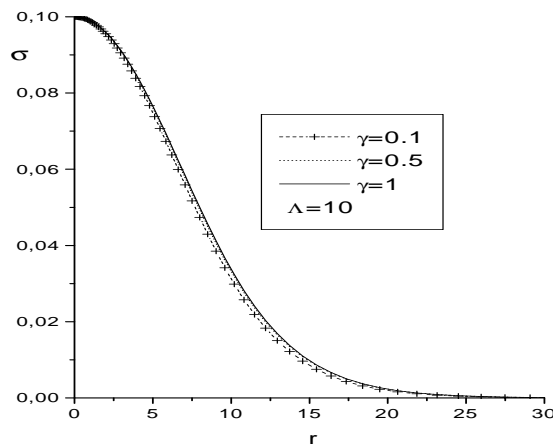


Рис. 1: Безразмерная функция плотности  $\sigma(r)$  бозонной звезды для разных значений параметра  $\gamma$  и константы взаимодействия  $\lambda = 10$

Вывод в том, что устойчивые бозонные звёзды могут существовать при разных значениях отношения  $\gamma$ . Если  $\gamma$  увеличивается, равновесная конфигурация стремится к известной конфигурации из ОТО, которая возникает при  $\gamma \rightarrow \infty$ . Масса бозонной звезды в МДГ может отличаться только на несколько процентов от соответствующей массы в ОТО. Она также

мало зависит от точной формы дилатонного потенциала.

Анализ нейтронных звёзд в моделях дилатонной гравитации, отличающихся от МДГ нарушением слабого принципа эквивалентности, например, анализ нейтронных звёзд в модели Саа, показал, что в них наблюдаются значительные отклонения от предсказаний ОТО:

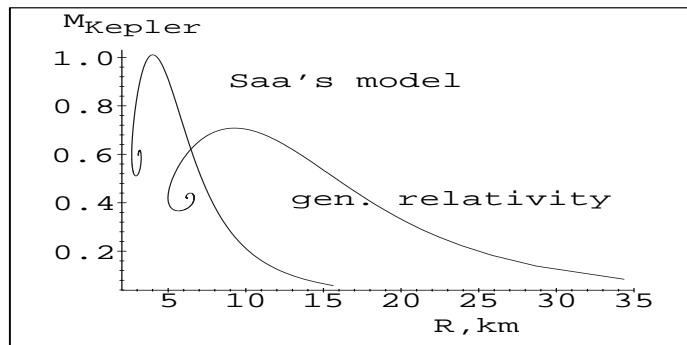


Рис. 2:  $M_{Kepler}$  (в единицах  $M_{\odot}$ ) –  $R$  (в km) зависимости в модели Саа и в ОТО

## 8.5 Глава 5

Реальная область применения МДГ есть космология, где из МДГ удаётся получить ряд новых и интересных следствий. Обсуждаются общие свойства космологии МДГ и конкретные численные расчёты, в которых применяется космологический потенциал (5). Он соответствует  $f(R)$ -теории с лагранжианом  $L(R; \mathbf{p}_{\Phi}) \sim -f(R; \mathbf{p}_{\Phi})$ , заданным в параметрической форме уравнениями

$$R = \frac{3}{4} \mathbf{p}_{\Phi}^{-2} (1/\Phi^3 - \Phi) - 4\Phi, \quad f = \frac{3}{8} \mathbf{p}_{\Phi}^{-2} (3/\Phi^2 - \Phi^2 - 2) - 2\Phi^2 \quad (11)$$

в интервале  $\Phi \in (0, \infty)$ . Нетрудно видеть, что *физическая* ветвь функции  $f(R; \mathbf{p}_{\Phi})$  имеет следующее разложение в ряд Тейлора:  $f(R; \mathbf{p}_{\Phi}) = R + 2 + 1/3 (R + 4)(R + 8) \mathbf{p}_{\Phi}^2 + \mathcal{O}(\mathbf{p}_{\Phi}^4)$  и переходит в лагранжиан Гильберта-Эйнштейна  $f(R; \mathbf{p}_{\Phi}) \rightarrow R + 2$  (в космологических единицах) в пределе  $\mathbf{p}_{\Phi} \rightarrow 0$ , т.е. когда масса дилатона стремится к бесконечности:  $m_{\Phi} \rightarrow \infty$ . В таком смысле МДГ содержит ОТО как предельный случай. С точностью до членов  $\mathcal{O}(\mathbf{p}_{\Phi}^4)$  лагранжиан  $L(R; \mathbf{p}_{\Phi})$  сводится к лагранжиану Старобинского, который предложил первую успешную модель инфляции (см. работы Starobinsky (1980, 1983)). Он удовлетворяет также выдвинутому Старобинским новым требованиям общего характера к функции  $f(R)$  в работе Starobinsky (2007). Как видно из рис. 3, для значений скалярной кривизны  $|R| \ll 1$  модель МДГ с потенциалом (5) ведёт себя как ОТО с гравитационной постоянной Ньютона  $G_N$ . Для  $R \ll -1$  она ведёт себя как ОТО с меньшей эффективной гравитационной постоянной и,

наконец, при  $R \gg 1$  – как ОТО с большей эффективной гравитационной постоянной:

$$G_{eff}|_{R \ll -1} < G_{eff}|_{|R| \ll 1} \approx G_N < G_{eff}|_{R \gg 1}.$$

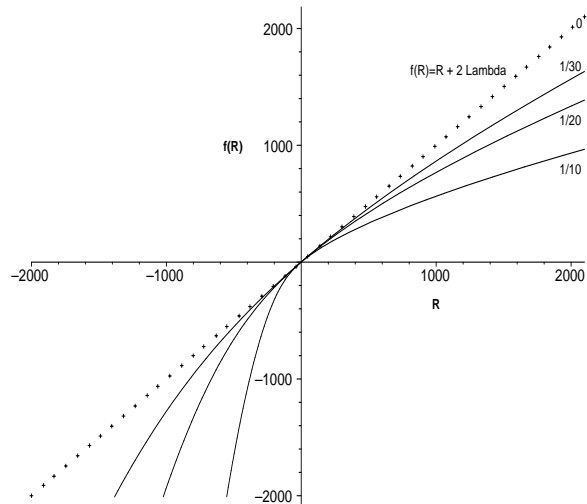


Рис. 3: Форма функции  $f(R; p_\Phi)$  для разных значений параметра  $p_\Phi = 1/10, 1/20, 1/30, \dots, 0$ .

Рассмотрена модель Фрийдмана-Робертсона-Уокера (ФРУ) со стандартной метрикой и масштабным фактором  $a(t)$ . Динамические уравнения получены из гамильтониана

$$\mathcal{H} = \frac{1}{3a^3} \pi_\Phi (\Phi \pi_\Phi - a \pi_a) + a^3 \left( U(\Phi) + \epsilon(a) - 3\Phi \frac{k}{a^2} \right), \quad (12)$$

который задаёт связь в слабом смысле и выражающую закон сохранения энергии в единице объёма:

$$\begin{aligned} \epsilon_{total} &= \epsilon_{kin} + \epsilon_{pot} = \text{const} (\approx 0), \\ \epsilon_{kin} &= 3\Phi \left( \frac{1}{4} \frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^2} - \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} \right)^2 \right), \quad \epsilon_{pot} = \epsilon(a) + U(\Phi) - 3k \frac{\Phi}{a^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Особенность мира ФРУ в модели МДГ состоит в том, что кинетическая энергия  $\epsilon_{kin}$  не является величиной с определённым знаком.

Уравнения эволюции мира ФРУ в МДГ можно представить в фридмановской форме:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \epsilon_{eff}(a). \quad (14)$$

Для плотности эффективной энергии  $\epsilon_{eff}(a)$  и для дилатона  $\Phi$  как функции масштабного



фактора  $a$  имеем неавтономную систему уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} a \frac{d\epsilon_{eff}}{da} + 4\epsilon_{eff} &= 2U_{,\Phi}(\Phi), \\ \left(\frac{1}{3}\epsilon_{eff} - \frac{k}{a^2}\right) a \frac{d\Phi}{da} + \Phi\epsilon_{eff} &= \frac{1}{3}(U(\Phi) + \epsilon(a)). \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнение (14) задаёт эволюцию Вселенной в форме

$$\Delta t = \pm \int_{a_{in}}^a \frac{da}{\sqrt{\frac{1}{3}a^2\epsilon_{eff}(a) - k}}. \quad (16)$$

Можно также ввести эффективную плотность энергии дилатона  $\epsilon_\Phi = U(\Phi) - 3H\dot{\Phi}$  и эффективное давление дилатона  $p_\Phi = \ddot{\Phi} + 2H\dot{\Phi} - U(\Phi)$ , где  $H = \dot{a}/a$  есть стандартный параметр Хаббла. Тогда

$$w_\Phi = \frac{p_\Phi}{\epsilon_\Phi} = -\frac{U(\Phi) - \ddot{\Phi} - 2H\dot{\Phi}}{U(\Phi) - 3H\dot{\Phi}}. \quad (17)$$

В других космологических моделях со скалярным полем  $\varphi$  в ЭНП используется аналогичный параметр

$$w_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2/2 - V(\varphi)}{\dot{\varphi}^2/2 + V(\varphi)}.$$

Сравнение параметров  $w_\varphi$  и  $w_\Phi$  из (17) показывает существенное различие между этими моделями и МДГ. Независимо от этого различия, для статических скалярных полей  $\Phi = \text{const}$  и  $\varphi = \text{const}$  в обоих случаях получаем  $w_\Phi = w_\varphi = w_0 = -1$ .

Другая стандартная величина космологии – параметр ускорения

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = -\left(\frac{\dot{H}}{H^2} + 1\right) = \frac{p + \epsilon/3}{2H^2} + \frac{p_\Phi + \epsilon_\Phi/3}{2H^2}. \quad (18)$$

Указанные выше определения и динамические уравнения МДГ легко приводят к формуле

$$q = -\frac{1}{3H^2} \left( \Phi U_{,\Phi} - U + 3H\dot{\Phi} - \epsilon \right). \quad (19)$$

В окрестности dSV имеем  $\Phi U_{,\Phi} - U \approx U \approx 1$ ,  $\dot{\Phi} \approx 0$  и  $\epsilon \ll U \approx 1$ . Тогда

$$q \approx -\frac{1}{3H^2} < 0. \quad (20)$$

Таким образом, видим, что вблизи dSV Вселенная расширяется. Более детальный анализ эволюции Вселенной подтверждает эти простые качественные выводы. Он основан на введении функции Ляпунова, которая демонстрирует существование двух режимов эволюции

Вселенной, см. рис. 4

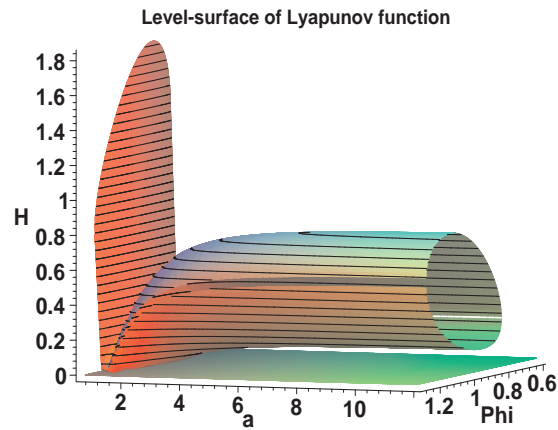


Рис. 4: Поверхность уровня функции Ляпунова для потенциала  $V(\Phi)$  (5) в присутствии излучения при  $k = +1$ . Высокая вертикальная часть при малых значениях масштабного фактора  $a$  описывают инфляционный режим Вселенной. Бесконечно длинная горизонтальная "труба" вдоль оси  $a$  – асимптотический режим деситтеровского расширения.

В соответствии с этим для детального качественного и численного исследования эволюции Вселенной вводятся две разные нормальные формы динамических уравнений.

Фазовый портрет в режиме деситтеровского расширения показан на рис. 5.

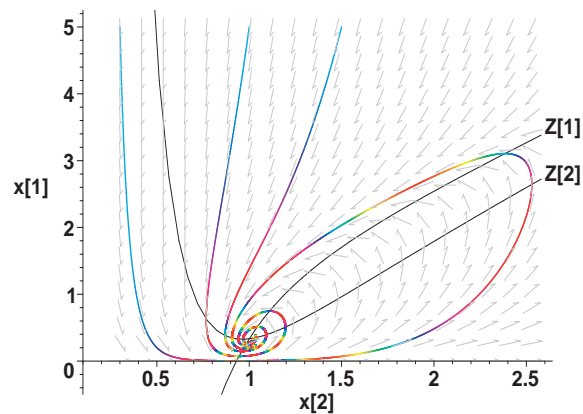


Рис. 5: Характерный фазовый портрет для потенциала (5). Части кривых одного и того же цвета проходятся во время эволюции Вселенной за равные интервалы переменной  $\tau$ .

Видно наличие медленно затухающих осцилляций гравитационного фактора  $g(t) = G_{eff}(t)/G_N = 1/\Phi(t)$ :

$$g(t) \approx 1 - p_\Phi \frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \cos(\omega_\Phi t - \psi_\Phi), \quad (21)$$

с частотой  $\omega_\Phi = \sqrt{\mathbf{p}_\Phi^{-2} - 3/4}$  и фазой  $\tan \psi_\Phi = \frac{2\sqrt{3}}{5} \omega_\Phi$ . Частота  $\omega_\Phi$  есть вещественное положительное число, если  $\mathbf{p}_\Phi < 2/\sqrt{3}$ . Согласно оценке (9), в МДГ имеем (в космологических единицах)  $\omega_\Phi \geq 10^{30}$ , или  $\omega_\Phi \geq 10$  ТГц – в обычных единицах<sup>1</sup>, а  $\psi_\Phi \approx \pi/2 \approx -\psi_a$ .

Несмотря на то, что осцилляции (21) имеют исключительно маленькую амплитуду  $\sim \mathbf{p}_\Phi$ , они могут приводить к значительным космологическим эффектам из-за нелинейного характера гравитации. В МДГ получаем специфическую формулу:

$$H = \frac{1}{2} \frac{\dot{g}}{g} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\dot{g}}{g} \right)^2 + \frac{1}{3} g(U + \epsilon) - \frac{k}{a^2}}. \quad (22)$$

Она показывает, что после усреднения по осцилляциям член  $\dot{g}/g$  может дать отличный от нуля вклад, так как он входит в параметр Хаббла (22) нелинейным образом.

Вторая форма динамических уравнений ФРУ приспособлена для описания инфляции в МДГ, которая возникает в некоторой области фазового пространства, см. рис. 4. Понять суть этого явления можно представив масштабный фактор  $a(t)$  в виде

$$a(t) = g(t) \exp(\Delta\mathcal{N}(t)), \quad (23)$$

где в пределе  $t \rightarrow \infty$  возникает число е-фольдов:

$$\Delta\mathcal{N} = \int_{c_{in}^{fin}} \frac{dg}{g} \frac{1 - \mathcal{D}(g, z, a; \mathbf{p}_\Phi^2, k)}{\mathcal{D}(g, z, a; \mathbf{p}_\Phi^2, k)} \quad (24)$$

как конечная величина на всём временном интервале  $t \in [0, \infty)$ . Между двумя последовательными максимумами  $g(t)$  квадрат логарифмической производной  $H^2$  масштабного фактора  $a(t)$  имеет свой собственный максимум в определённые моменты времени  $t^{(i)}$ . В окрестности любого максимума величины  $H^2$  функция  $a(t)$  резко возрастает – подобно  $\exp(\text{const} \times t^\aleph)$ , где  $\text{const} > 0$ , с неким значением параметра  $\aleph \geq 2$ . Такая инфляция происходит быстрее, чем обычная экспоненциальная инфляция де Ситтера. Поэтому мы называем её *гиперинфляцией*. В МДГ мы имеем специфическую последовательность гиперинфляционных периодов Вселенной. Чтобы решить космологические проблемы типа проблемы горизонта, проблем гладкости, однородности и изотропности на больших масштабах и т.д., необходимо иметь по крайней мере  $\aleph \geq 60$ . Зависимость числа е-фольдов  $\bar{\mathcal{N}}$  от начального значения  $z_0$  показана на рис. 6. Большинство решений имеют большие значения величины  $\bar{\mathcal{N}}$ , которая достигает  $\bar{\mathcal{N}} \sim 50 - 100$  для  $z_0 \sim 10 - 15$  без всякой тонкой подгонки. Приблизительная зависимость для  $\mathbf{p}_\Phi = 1/250$  задаётся выражением:

$$\bar{\mathcal{N}}(z_0) \approx 2.552 z_0^{-3/10} + 0.090 z_0^{8/3}. \quad (25)$$

<sup>1</sup> Отметим, что электромагнитный спектр инфракрасного излучения покрывает интервал частот от 300 ГГц до 405 ТГц.

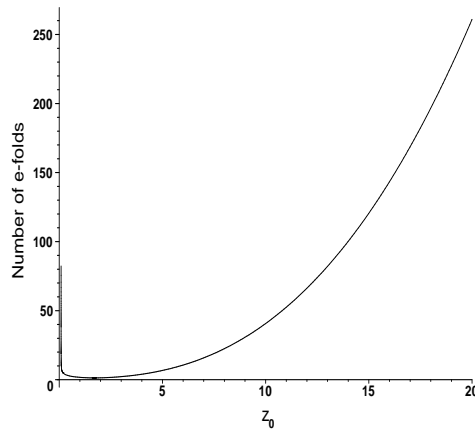


Рис. 6: Зависимость числа е-фолдов  $\bar{N}$  от начального значения  $z_0$ .

Получена зависимость

$$E_\Phi \Delta t_{infl}^{(i)} \sim \hbar \frac{4}{\sqrt{3}} \Theta_N^{(i)}(0), \quad (26)$$

которая напоминает соотношения неопределённости Гейзенберга в квантовой механике и, возможно, указывает на квантовую природу инфляции. Соотношение (26) указывает на связь времени инфляции с массой дилатона  $m_\Phi$ , из чего следует, что большая масса дилатона приводит к короткой инфляции. Можно думать, что это раскрывает физический смысл массы  $m_\Phi$  как основного параметра МДГ и даёт возможность определить её из астрофизических наблюдений.

**Часть II: Возмущения метрик Шварцшильда и Керра в терминах функций Гойна. Квазинормальные моды. Космические струи**

## 8.6 Глава 6

Из множества известных точных решений уравнений Эйнштейна (см., например, Chandrasekhar (1983), Galtsov (1986), Stephani et al. (2003)), физически самыми значимыми являются решение Шварцшильда, Schwarzschild (1916):

$$ds_s^2 = (1 - 2M/r) dt^2 - \frac{1}{1 - 2M/r} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (27)$$

и решение Керра, Kerr (1963) (см. также Kerr (2009)):

$$ds_K^2 = (1 - 2M/\rho) dt^2 - 2 \frac{2M}{\rho} \frac{a}{r} \sin^2 \theta dt d\phi - \frac{\rho/r}{1 + 2M/r + a^2/r^2} dr^2 - r^2 \left( \frac{\rho}{r} d\theta^2 + \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2M}{\rho} \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (28)$$

В ОТО они описывают соответственно статическую метрику невращающегося сферически-симметричного тела массы  $M$  и радиуса Шварцшильда  $r_s = 2M$  и вращающуюся метрику тела массы  $M$  с угловым моментом  $J = aMc$ ,  $\rho = r + a^2 \cos^2 \theta/r$ , где  $a$  – стандартный параметр вращения размерности длины. Метрика обладает горизонтом событий радиуса  $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$  и горизонтом Коши радиуса  $r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2}$ . В пределе  $a \rightarrow 0$  метрика Керра совпадает с метрикой Шварцшильда, а  $\rho \rightarrow r$ ,  $r_+ \rightarrow r_s$  и  $r_- \rightarrow 0$ .

Нетрудно найти дифференциальные инварианты первого порядка тензора Римана, которые способны описать горизонты  $r_{\pm}$ , а также и эргоповерхность метрики Керра  $g_{tt} = 0$ :

$$DI_1 = -(\nabla \ln r)^2 = \frac{1}{r\rho} \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right), \quad (29a)$$

$$DI_2 = (\nabla \ln \rho)^2 - (\nabla \ln r)^2 = \frac{4}{\rho^2} \left( \frac{\rho}{r} - 1 \right) \left( 1 - \frac{2M}{\rho} \right). \quad (29b)$$

Таким образом, мы убеждаемся, что горизонты  $r_{\pm}$  являются геометрическими объектами, существование которых не зависит от выбора координат.

Изменения пространства-времени Керра в результате изменения параметра  $a$  лучше проследить, изучая изменение топологии эргоповерхности. Как видно из рис. 7, для  $a < M$  и  $a > M$  мы наблюдаем четкий переход от двух вложенных эргоповерхностей, каждая с топологией сферы, к эргоповерхности с топологией тора.

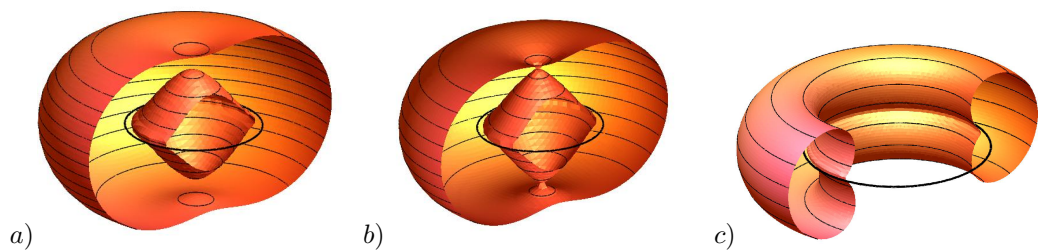


Рис. 7: Вид эргоповерхности а) для ЧДК:  $a < M$ ; б) для ЧДК:  $a = M$ ; в) для ГСК:  $a > M$ . Видна кольцевая особенность метрики Керра и изменение топологии от двух вложенных эргосфер к эрготору.

С математической точки зрения удобно использовать безразмерный бифуркационный параметр  $b = M/a \in [0, \infty)$ . Очевидно, что в точке  $b = 1$  происходит *бифуркация* эргоповерхности Керра. Когда параметр  $b$  нарастает от 0 до  $\infty$ , кольцевая сингулярность

<sup>2</sup>В единицах  $c = G = 1$ .

переходит последовательно в эрготор ( $b \in (0, 1)$ ), в точке  $b = 1$  имеем две слившиеся эргосферы, а после этого ( $b \in (1, \infty)$ ) - две отдельные эргосферы. В точке  $b = \infty$  внешняя эргосфера сливается с горизонтом событий Шварцшильда, а внутренняя эргосфера вырождается в точку, совпадая с сингулярностью метрики Шварцшильда  $r = 0$ .

## 8.7 Глава 7

Решения Шварцшильда и Керра представляют весьма грубую идеализацию реальных объектов. Реалистический подход состоит в изучении отклонений от точных решений методом теории возмущений, и для начала - в её первом линейном порядке, см. Fegaggi et al. (2008), Berti et al. (2009b), Konoplya et al. (2011). Таким способом можно получить:

- 1) Более реалистические модели гравитационных полей реальных тел.
- 2) Информацию о стабильности фоновых метрик Шварцшильда и Керра.
- 3) Информацию о поведении разных физических полей в указанном приближении.

Реализация такой программы была начата в пионерской работе Regge et al. (1957), где она сводится к решению РУРУ

$$\partial_{r_*}^2 R_{\omega,s,l} + (\omega^2 - V_{s,l}) R_{\omega,s,l} = 0, \quad (30)$$

написанного здесь с помощью координаты черепахи  $r_* = r + r_s \ln(|r/r_s - 1|)$ . Для аксиальных возмущений целочисленного спина  $s$  и углового момента  $l \geq |s|$  потенциал есть

$$V_{s,l}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + 2(1-s^2)\frac{M}{r^3}\right) \quad (31)$$

Теория возмущений метрики Керра намного сложнее, см. Chandrasekhar (1983), Galtsov (1986). Она основана на формализме Ньюмана-Пенроуза и разработана в пионерских работах Teukolsky (1972, 1973), Press et al. (1973), Teukolsky et al. (1974), где открыто "мастер уравнение Тьюкольского" (МУТ), из которого методом разделения переменных получены УУТ

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d}{d\theta} {}_s S_{\omega,E,m}(\theta) \right) + {}_s W_{\omega,E,m}(\theta) {}_s S_{\omega,E,m}(\theta) = 0, \quad (32a)$$

$${}_s W_{\omega,E,m}(\theta) = E + a^2 \omega^2 \cos^2 \theta - 2sa\omega \cos \theta - \frac{m^2 + s^2 + 2ms \cos \theta}{\sin^2 \theta}; \quad (32b)$$

и РУТ:

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left( \Delta^{s+1} \frac{d}{dr} {}_s R_{\omega,E,m}(r) \right) + {}_s V_{\omega,E,m}(r) {}_s R_{\omega,E,m}(r) = 0, \quad (33a)$$

$${}_s V_{\omega,E,m}(r) = \frac{1}{\Delta} K^2 - is \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dr} K - L. \quad (33b)$$

Азимутальное число принимает целые значения  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  в случаях целого спина или полуцелые значения  $m = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$  – для полуцелого спина. В уравнении (33)  $L = E - s(s+1) + a^2\omega^2 - 2ma\omega - 4is\omega r$ . Два, вообще говоря, *комплексных* параметра  $\omega$  и  $E$  должны определяться с помощью граничных условий соответствующих физических задач. Разные физические задачи в пространстве с метрикой Керра будут определяться разными граничными условиями. Из-за наличия горизонтов могут возникать и специфические граничные задачи без аналога в плоском случае. Функции

$${}_s\mathcal{K}_{\omega,E,m}(t, r, \theta, \varphi) \sim e^{-i\omega t} e^{im\varphi} {}_sS_{\omega,E,m}(\theta) {}_sR_{\omega,E,m}(r)$$

определяют факторизованное *ядро* общего интегрального представления решений МУТ:

$${}_s\Psi(t, r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \int dE \sum_m {}_sA_{\omega,E,m} e^{-i\omega t} e^{im\varphi} {}_sS_{\omega,E,m}(\theta) {}_sR_{\omega,E,m}(r), \quad (34)$$

из которого можно получить специфические представления решений, соответствующие разным граничным условиям. Как показано впервые в данной диссертации, при соответствующем виде амплитуд  ${}_sA_{\omega,E,m}$  в (34) можно использовать сингулярные факторизованные ядра МУТ, получая при этом регулярные решения  ${}_s\Psi(t, r, \theta, \varphi)$ .

Известно, см. Marcilhacy (1983), Blandin (1983), Galtsov (1989), что РУРУ (30), УУТ (32) и РУТ (33) (для  $a \neq M$ ) можно привести к конфлюэнтному уравнению Гойна, см. Desageau et al. (1995), Slavyanov et al. (2000), простейшая запись которого предложена в диссертации:

$$H'' + \left( \alpha + \frac{\beta+1}{z} + \frac{\gamma+1}{z-1} \right) H' + \left( \frac{\mu}{z} + \frac{\nu}{z-1} \right) H = 0. \quad (35)$$

Константы  $\mu$  и  $\nu$  в (35) связаны с константами  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ , принятыми в обозначении  $\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, z)$ , следующим образом:  $\delta = \mu + \nu - \alpha \frac{\beta+\gamma+2}{2}$ ,  $\eta = \frac{\alpha(\beta+1)}{2} - \mu - \frac{\beta+\gamma+\beta\gamma}{2}$ .

В диссертации впервые дано детальное описание решений РУРУ (30), УУТ (32) и РУТ (33) в терминах *конфлюэнтной функции Гойна*  $\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, z)$ . Она определяется как единственное локальное решение уравнения (35), которое регулярно в окрестности регулярной особой точки  $z=0$  и удовлетворяет условию  $\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, 0)=1$ .

## 8.8 Глава 8

Описаны все локальные решения РУРУ, записанного в явной форме

$$\frac{d^2 R_{\omega,s,l}}{dr^2} + \frac{1}{r(r-1)} \frac{dR_{\omega,s,l}}{dr} + \frac{\omega^2 r^4 - l(l+1)r^2 + (l(l+1) + s^2 - 1)r + 1 - s^2}{r^2(r-1)^2} R_{\omega,s,l} = 0, \quad (36)$$

и их основные свойства. Регулярными сингулярными точками одинакового типа для уравнения (36) являются начало  $r = 0$  и горизонт  $r = 1$ . Бесконечность  $r = \infty$  является нерегулярной сингулярной точкой.

## 8.9 Глава 9

Дано рассмотрение двухточечных сингулярных граничных задач для РУРУ, а также регулярно-сингулярные граничные задачи, в которых один из концов есть регулярная точка, а другой – сингулярная.

Двухточечные сингулярные задачи на интервалах  $(X, Y) = (1, \infty), (0, 1), (0, \infty)$  можно изобразить так, как показано на рис. 8. Они задают возмущения внешней или внутренней области метрики Шварцшильда, а также возмущения решения Фронсдала-Крускала-Шекереса.

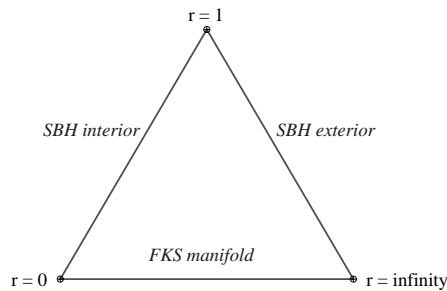


Рис. 8: Разные сингулярные двухточечные задачи для метрики Шварцшильда.

Пример регулярно-сингулярной задачи с граничным условием Дирихле  $\Phi_{\omega,s,l}(t, r_*) = 0$  ( $\Rightarrow$  полное отражение) для внешней области метрики Шварцшильда показан на рис. 9.

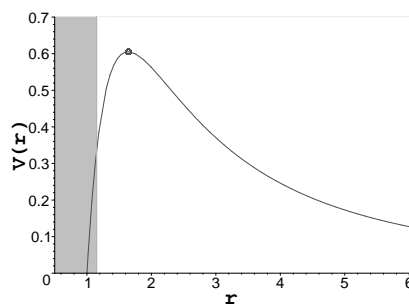


Рис. 9: Потенциал  $V_{s,l}(r)$  для  $s = 2$ ,  $l = 2$ . Область тени есть недостижимая область для распространения возмущений. Её левый край задаёт точку  $r_*$ . Точка  $r = 1$  есть горизонт событий.

При помощи точных решений в терминах конфлюэнтных функций Гойна сформулированы соответствующие граничные задачи, которые решаются численно с использованием пакета MAPLE. Для преодоления численных проблем сформулирован новый подход к нерегулярной особой точке. Для этого выбирается подходящий путь в комплексной области радиальной



переменной  $r$ . Такая процедура воспроизводит известные численные результаты для спектров КНМ ЧДШ и ЧДК, позволяя повысить их точность, а также получить впервые численные результаты для новых граничных задач, см. рис. 10. Видно, что, изучая экспериментально такие спектры, можно с уверенностью делать заключения о природе тела, создающего данное гравитационное поле. Согласно теореме Биркхофа, во внешней области всех сферически- симметричных распределений масс мы имеем всегда метрику Шварцшильда. Можно определить, имеется ли при этом горизонт событий, который определяет уникальные граничные условия, только изучая такие спектры.

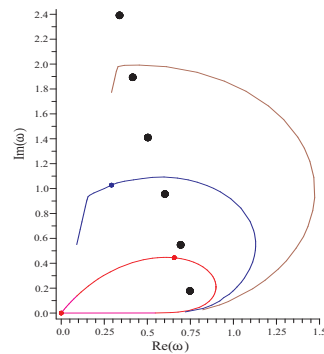


Рис. 10: Траектории в комплексной плоскости  $\mathbb{C}_\omega$  первых трех частот  $\omega_{r_*}$  КНМ компактного тела при  $r_* \in (1, \infty)$ . Для сравнения показаны первые шесть КНМ ЧДШ той же массы  $M$ , полученные нами.

Развитый нами новый  $\epsilon$  метод для численного анализа КНМ метрики Шварцшильда, в сочетании с предложенным нами новым алгоритмом нахождения нулей системы трансцендентных уравнений, включая уравнения, которые записываются через конфлюэнтные функции Гойна, позволяет решить проблему девятой моды КНМ ЧДШ и показать, что она не является алгебраически специальной.

## 8.10 Глава 10

Впервые изучены аналитически и численно точные решения РУРУ для внутренней области ЧДШ. Показано наличие решений непрерывного спектра и дискретного спектра. Изучено влияние на них полупроницаемой тонкой плёнки, находящейся на горизонте ЧДШ и впервые в гравитационной задаче обнаружено явление сближения и отталкивания уровней, см. рис. 11. Описаны свойства (не)устойчивости решений внутренней области ЧДШ.

## 8.11 Глава 11

Получен ряд до сих пор неизвестных свойств и соотношений для конфлюэнтных функций Гойна и их производных. Введён важный для физических приложений подкласс  $\delta_N$ -

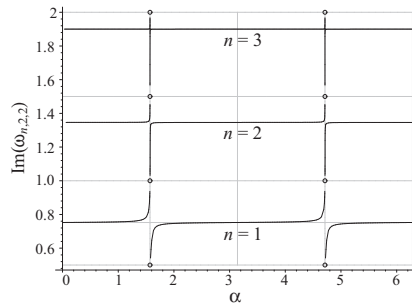


Рис. 11: Зависимость  $\Im(\omega_{n,2,2})$  от угла смешивания  $\alpha \in [0, 2\pi]$  падающих и отражённых волн.

конфлюэнтных функций Гойна и ассоциированные с ними функции, на базе тождества

$$\begin{aligned} \frac{d^{N+1}}{dz^{N+1}} \text{HeunC}\left(\alpha, \beta, \gamma, -\alpha\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + N+1\right), \eta, z\right) &= (N+1)! v_{N+1}\left(\alpha, \beta, \gamma, -\alpha\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + N+1\right), \eta\right) \times \\ &\times \text{HeunC}\left(\alpha, \beta+N+1, \gamma+N+1, -\alpha\frac{\beta+\gamma}{2}, \eta + \frac{N+1}{2}\left(N+1-\alpha+\beta+\gamma\right), z\right) \end{aligned}$$

– для всех  $\alpha, \beta, \gamma, \eta \in \mathbb{C}$  (когда  $\beta$  не является целым отрицательным числом) и для всех  $N \in \mathbb{Z}, N \geq 0$ . Доказан ряд свойств этих функций и рассмотрено условие, при котором они вырождаются в полиномы. Показано, что константы Старобинского с точностью до простых множителей совпадают с коэффициентами ряда Тейлора конфлюэнтных функций Гойна.

## 8.12 Глава 12

Дана полная классификация точных решений МУТ, основанная на разделении переменных Тьюкольского. Впервые описаны:

1. Эксплицитная форма 16-ти классов точных решений РУТ.
2. Классификация решений РУТ, основанная на свойствах конфлюэнтных функций Гойна.
3. Класс  $\delta_N$ -радиальных решений и, в частности, два до сих пор неизвестных класса точных решений эквидистантного спектра частот, как и двух новых классов полиномиальных решений РУТ.
4. Эксплицитная форма 16-ти классов точных решений УУТ.
5. Конкомитантная конфлюэнтная функция Гойна и её применение к УУТ.
6. Классификация решений УУТ, основанная на свойствах конфлюэнтных функций Гойна, в частности  $\delta_N$ -угловые решения.
7. Регулярные решения УУТ в терминах конфлюэнтных функций Гойна.
8. Два класса сингулярных решений УУТ.
9. 256 классов факторизованных решений МУТ.

### 8.13 Глава 13

Приводится новый общий вывод и обобщение тождеств Тьюкольского-Старобинского с использованием свойств конфлюэнтных функций Гойна, полученных в 11-й Главе, и специфических свойств точных решений, описанных в Главе 12. Получен ряд таких новых тождеств для РУТ и УУТ. Тождества такого типа до сих пор не были известны для РУРУ и для уравнения Зерилли.

### 8.14 Глава 14

Предлагается новый гравитационный механизм образования космических струй. Он основан на конструировании решений МУТ, описывающих коллимированные бегущие волны, в рамках развитой в диссертации теории возмущений метрики Керра. Рассмотрены две такие модели.

Первая модель космических струй основана на решениях МУТ непрерывного спектра. Они возникают только для возмущений спина  $1/2$  и  $1$ , для которых условия полиномиальности конфлюэнтных функций Гойна для РУТ и для УУТ совпадают вследствие совпадения констант Старобинского. Показано, как сконструировать точные решения МУТ вида

$${}_{\frac{\sigma}{2}}\Psi(t, r, \theta, \varphi) = \Delta(r)^{-\frac{1+\sigma}{4}} \sqrt{(|W_{\sigma}| + |W_{\sigma}|^{-1})/2} {}_{\frac{\sigma}{2}}\mathfrak{A}(T_{\sigma}, W_{\sigma}), \quad (37)$$

где  ${}_{\frac{\sigma}{2}}\mathfrak{A}(T_{\sigma}, W_{\sigma})$  есть произвольная аналитическая функция двух переменных  $T_{\sigma} = t + \sigma(r_* - ia \cos \theta)$  и  $W_{\sigma} = e^{i\phi_{\sigma}} \cot \frac{\theta_{\sigma}}{2}$ ,  $\phi_{\sigma} = \varphi + \frac{\sigma}{2p} \ln \left| \frac{r-r_+}{r-r_-} \right|$ , а  $\theta_{\sigma} = \theta$ , если  $\sigma = +1$ , или  $\theta_{\sigma} = \pi - \theta$ , если  $\sigma = -1$ . Вне горизонта событий эти решения задают *бегущую в одну сторону* волну возмущений: уходящие на бесконечность волны, если  $\sigma = -1$ , и приходящие из бесконечности бегущие волны, если  $\sigma = +1$ . Подбором амплитуд сконструированы два нетривиальных решения, которые являются всюду регулярными.

Вторая модель космических струй основана на решениях МУТ дискретного спектра и описывает первичные электромагнитные струи из ЧДК и ГСК. Используются новые граничные условия для УУТ, приводящие к полиномиальным решениям, которые изучались в Главе 12. Полученные нами впервые дискретные спектры струй из ЧДК и из ГСК для случая  $a = 0$  показаны на рис. 12. Они очевидным образом отличаются от спектров КНМ тех же объектов, см. рис. 10. Основным новым результатом является детальное описание качественного и количественного изменения поведения спектральных частот первичных электромагнитных струй при переходе от ЧДК к ГСК. Впервые такой переход рассматривается как бифуркация метрики Керра при переходе параметра вращения через критическое значение  $a = M$  (см. геометрию этой бифуркации на рис. 7). Дополнительная информация показана на рис. 13 - 15.

Оказалось, что новые дискретные спектры, полученные нами впервые, описывают устойчивые первичные электромагнитные струи как из ЧДК, так и из ГСК.

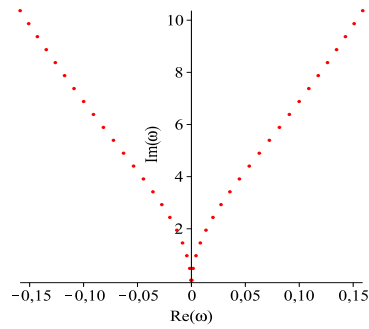


Рис. 12: Комплексные частоты первичных электромагнитных струй из ЧДК при  $a = 0$ .

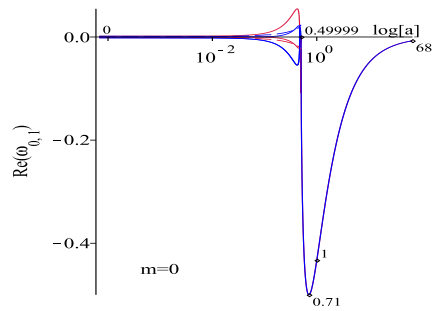


Рис. 13: Зависимость вещественной части частот первичных электромагнитных струй от параметра вращения  $a$ . На графике чётко выражен эффект бифуркации (показанный для типичного случая  $a = M = 0.5$ ).

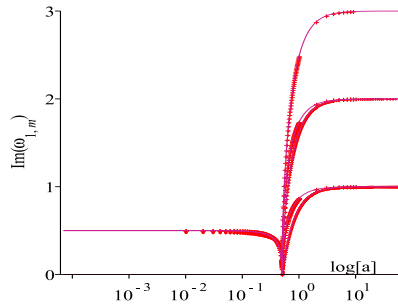


Рис. 14: Зависимость мнимой части частот первичных электромагнитных струй от параметра вращения  $a$ . На графике чётко выражен эффект бифуркации (показанный здесь для типичного случая  $a = M = 0.5$ ).

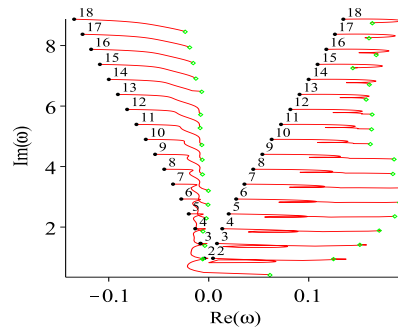


Рис. 15: Поведение некоторых частот в комплексной плоскости для разных значений  $n$ . Показаны частоты с  $m = 0$ ,  $\omega_{n,0}^+$ ,  $n = 2 - 18$ . Чёрные точки соответствуют случаю  $a = 0$ , зелёные значки – последней точке  $a$ , для которой удалось численно найти частоты.

На рисунках 13-15 представлена также зависимость спектров от параметра вращения  $a$  метрики Керра.

Другим неожиданным результатом является то, что полученная нами численная зависимость  $\omega_{n=0,1,m}(a)$  фитируется с очень хорошей точностью аналитической формулой

$$\omega_{n=0,1,m} = (-m + iN\sqrt{b^2 - 1})\Omega_+, \quad N = 0, 1$$

в двух случаях:  $n = N = 0, 1$  для всех  $m = 0, \pm 1, \pm 2$ , а также во всей области параметра  $a$  (за исключением нескольких точек с небольшими значениями параметра  $a$ ).

Так как в физических единицах имеем формулы для частоты возмущений  $\omega^{phys} = \Re(\omega)c^3/(2\pi GM)$  и для времени их затухания  $\tau^{phys} = GM/(c^3\Im(\omega))$ , то в единицах массы Солнца  $M_\odot$  получаем

$$\omega^{phys} = \frac{32310}{M/M_\odot} \Re(\omega)[Hz], \quad \tau^{phys} = \frac{0.4925 \times 10^{-5} M/M_\odot}{\Im(\omega)} [s].$$

Видно, что для ЧД массы  $10M_\odot$  получаем типичные оценки порядка соответствующих величин в виде  $\omega^{phys} \lesssim 1 - 100$  Hz,  $\tau^{phys} \sim 10^{-4} - 10^{-3}$  s. Для ЧД масс  $10^8 M_\odot$  будем иметь соответственно  $\omega^{phys} \lesssim 10^{-8} - 10^{-10}$  Hz,  $\tau^{phys} \sim 10^4 - 10^5$  s.

В последние годы не раз рассматривалось рождение микро ЧД на современных ускорителях частиц, см. Arefeva et al. (1996), Huitzu (2002), Seong (2012) и ссылки там. Согласно последним данным на ЛНС не наблюдаются ЧД массы меньше  $3.5 \text{ GeV}/c^2$ . Для таких ЧД наши результаты предсказывают электромагнитное излучение с параметрами  $\omega^{phys} \lesssim 10^{55} - 10^{57}$  Hz,  $\tau^{phys} \sim 10^{-59} - 10^{-58}$  s, что соответствует очень коротким импульсам гамма-квантов гипервысокой энергии порядка  $10^{40} - 10^{43}$  eV. Такие энергии в природе не наблюдались. Если принять, что ультравысокие энергии  $\sim 5 \times 10^{19}$  eV, которые наблюдаются в космических лучах, связаны с нашим механизмом генерирования коллимированного электромагнитного излучения, то получаем массы ЧД порядка  $\sim 0.1$  g. Это гораздо выше массы Планка  $\approx 2.1765 \times 10^{-5}$  g. Для экстремальных ЧД оценки могут быть существенно другими. Такие результаты следует рассматривать только как весьма грубые оценки порядка указанных величин.

Таким образом, мы убеждаемся, что наш метод, основанный на МУТ, действительно кажется способным дать общую картину коллимирования струй в рамках теории возмущений метрики Керра. Кажется интересным и то, что полученные нами спектры в принципе позволяют бесспорным образом установить наличие ЧДК или ГСК в центральных двигателях реальных астрофизических объектов, которые генерируют космические струи, так как являются "отпечатками пальцев" ЧДК или ГСК. Таким образом можно исследовать действительную природу этих пока загадочных объектов, что является актуальной задачей первостепенной важности современной астрофизики.

## Литература

(Неполный список)

- [Arbuzov et al. (2006)] A. B. Arbuzov, B. M. Barbashov, R. G. Nazmitdinov, V. N. Pervushin, A. Borowiec, Phys. Lett. B **691** 230-233 (2010).
- [Arbuzov et al. (2011)] A. B. Arbuzov, B. M. Barbashov, , R. G. nazmitdinov, V. N. Pervushin, A. Borowiec, K. N. Pichugin, and A. F. Zakharov, PEPAN Lett. **8** 318-342 (2011)
- [Arefeva et al. (1996)] I. Ya. Arefeva, K. S. Viswanathan, I. V. Volovich, Int. J. Mod. Phys.D **5** 707-722 (1996).
- [Arefeva et al. (2011)] I. Ya. Aref'eva, N. V. Bulatov, R. V. Gorbachev, FRW Cosmology with Non-positively Defined Higgs Potentials, arXiv:1112.5951.
- [Barbashov et al. (2006)] B. M. Barbashov, V. N. Pervushin, A. F. Zakharov, V. A. Zinchuk, Phys. Lett. B **633** 458-462 (2006).
- [Berti et al. (2009b)] E. Berti, V. Cardoso, A. O. Starinets, Class. Quantum Grav. *26* 163001 (108pp)(2009)
- [Blandin (1983)] Blandin J., Pons R., Marcilhacy G., Lett. Nuovo Cim. **38** 561-567 (1983).
- [Chandrasekhar (1983)] Chandrasekhar S., *The Mathematical Theory of Black Holes* vol 1,2, Oxford: Oxford University Press,1983
- [Decarreau et al. (1995)] Decarreau A., Maroni P. and Robert A., *Heun's Differential Equations* ed Roneaux A Oxford: Oxford Univ. Press, 1995.
- [Dirac (1973)] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A **333** 403-418 (1973).
- [Ferri et al. (2008)] V. Ferrari, L. Gualtieri *Quasi-normal modes and gravitational wave astronomy* Gen. Relativ. Gravit., **40** 945–970 (2008).
- [Galtsov (1986)] Galtsov D. V., *Particles and fields in vicinity of black holes*, MSU Press, 1986 (in Russian).
- [Galtsov (1989)] Galtsov D. V., Ershov A. A., Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Fiz. **32**, 13 (1989)[Sov. Phys. J. **32**, 764 (1990)].
- [Gorbunov et al. (2011)] Gorbunov D. S., Rubakov V. A., Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot Big Bang Theory, World Scientific, 2011.
- [O'Hanlon (1974)] O'Hanlon, Phys. Rev. Lett. **29** 137 (1974).
- [Huitzu (2002)] Huitzu Tu, Surveys High Energ.Phys. **17** 149-163 (2002).

- [Kerr (1963)] R. P. Kerr, *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*, Phys. Rev. Lett. **11**, 237-238 (1963).
- [Kerr (2009)] R. P. Kerr, *Discovering the Kerr and Kerr–Schild metrics*, in The Kerr Spacetime, Eds D. L. Wiltshire, M. Visser and S. M. Scott, Cambridge Univ. Press, 2009.
- [Konoplya et al. (2011)] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, *Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory*, Reviews of Modern Physics, **83** 793-836 (2011).
- [Marcilhacy (1983)] Marcilhacy G., Lett. Nuovo Cim. **37** 300-302 (1983).
- [Press et al. (1973)] Press W. H., Teukolsky S. A. 1973 ApJ **185**, 649.
- [Regge et al. (1957)] T. Regge, J. A. Wheeler, Phys. Rev. **108**, 1063 (1957).
- [Schwarzschild (1916)] K. Schwarzschild, *On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189-196 (1916).
- [Seong (2012)] Seong Chan Park, *Black holes and the LHC: A review*, arXiv:1203.4683, to be published in Progress of Particle and Nuclear Physics.
- [Slavyanov et al. (2000)] S. Y. Slavyanov, W. Lay *Special Functions, A Unified Theory Based on Singularities*, Oxford: Oxford Mathematical Monographs, 2000.
- [Sotiriou et al. (2010)] T. P. Sotiriou, V. Faraoni, *f(R) theories of gravity*, Rev. Mod. Phys. **82** 451-497 (2010).
- [Starobinsky (1980, 1983)] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. **B91**, 99 (1980); Sov. Astron. Lett. **9**, 302 (1983).
- [Starobinsky (2007)] A. A. Starobinsky, *Disappearing cosmological constant in f(R) gravity*, JETP Lett. **86** 157-163 (2007).
- [Stephani et al. (2003)] H. Stephani, D. Kramer, M. Maccallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* Cambridge University Press, 2003.
- [Teukolsky (1972, 1973)] Teukolsky S. A., 1972 PRL **16**, 1114.  
Teukolsky S. A., 1973 ApJ **185**, 635.
- [Teukolsky et al. (1974)] Teukolsky S. A., Press W. H., 1974 ApJ **193**, 443.
- [Weyl (1921)] Weyl H., 1921 Phys. Z. **22** 273
- [Will (2006)] C. M. Will *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, Living Reviews in Relativity (2006); <http://www.livingreviews.org/lrr-2001-4>.