

С326.

Б-903



ЛЕКЦИИ
ДЛЯ МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ

В.Бужек

**Введение в метод
СТОХАСТИЧЕСКОГО КВАНТОВАНИЯ**

ДУБНА

P2-84-419

В.Бужек*

с 326

Б-903

**Введение в метод
стохастического квантования**

122086

Дубна 1984

* Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова



ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Выпуск 30

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

*Д. В. Ширков - председатель
А. Н. Сисакян - зам. председателя
Г. М. Гавриленко - ученый секретарь
В. Г. Маханьков
В. А. Никитин
В. Р. Саранцева
С. Ю. Шамаков*

В В Е Д Е Н И Е

В последние годы связь между стохастическими дифференциальными уравнениями и евклидовой квантовой теорией поля привлекает к себе постоянное внимание^{/1-4/}. В частности, идеи стохастического квантования^{/5-II/} представляются особо интересными, так как на их основе можно развить альтернативный подход к квантованию евклидовых полей, наряду с каноническим квантованием и квантованием при помощи интегралов по путям. Среди разных формулировок стохастического квантования выделяются те, которые основаны на введении в теорию новых параметров, представляющих собой дополнительные размерности исходного пространства^{/12-16/}. К последним относится также метод стохастического квантования, предложенный Паризи и Ву^{/17/} (см. также^{/18-19/}).

Паризи и Ву построили схему стохастического квантования для калибровочных теорий, которая свободна от введения в лагранжиан дополнительных членов, фиксирующих калибровку. При построении квантовой теории неабелевых полей метод стохастического квантования (МСК) Паризи и Ву дает возможность избежать неоднозначностей Гриббова^{/20,21/}. В теории возмущений МСК представляет собой схему квантования, свободную от духов Фаддеева-Попова^{/22-25/}.

Благодаря этим свойствам метод квантования, предложенный Паризи и Ву, привлек к себе большое внимание при изучении евклидовой квантовой теории поля^{/26-34/}.

На сегодняшний день идеи МСК нашли свое применение также при исследовании калибровочных теорий на решетках^{/35-43/}, при численном моделировании теории поля на ЭВМ^{/44-46/} и в решении конкретных физических проблем^{/47,48/}.

Суть метода стохастического квантования заключается во введении в теорию евклидовых полей нового пятого параметра t (часто называемого фиктивным "временем") и постулировании некоторого стохастического дифференциального уравнения. Это уравнение описывает гипотетический процесс винеровского типа, протекающий в фиктивном времени t , корреляционные функции которого в равновесном состоянии эквивалентны функциям Грина^{x)} стандартной евклидовой квантовой теории поля.

Настоящий обзор является введением в метод стохастического квантования. Он посвящен как описанию самого метода, так и его применению к квантованию физических полей. В частности, в § I описаны основные

x) Евклидовы функции Грина в литературе называются часто функциями Швингера.

положения МЖ и приведены доказательства равенства при $t \rightarrow \infty$ корреляционных функций и функций Грина евклидовой КТП (см./17-19,26-29/). §2 посвящен описанию стохастической диаграммной техники (см./17,26,49/). В § 3 и § 4 метод стохастического квантования обобщен на случай калибровочных (см./17-19,21,23-26,28/) и спинорных (см./17,26,51-54/) полей. В § 5 построен производящий функционал для стохастических диаграмм (см./30/ и/50/).

§ 2. ТЕОРИЯ ПОЛЯ И СТОХАСТИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ

Пусть $\mathcal{L}(\Phi(x))$ — лагранжиан плотности, описывающая некоторую физическую систему. \mathcal{L} является функцией набора полей $\Phi(x)$ и их первых производных в D -мерном евклидовом пространстве. $S[\Phi]$ есть соответствующий функционал действия. Как известно, функции Грина в КТП представляют собой вакуумные ожидания произведений полей и определяются следующим соотношением:

$$\langle \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) \rangle_0 = \frac{\int D\Phi e^{-S[\Phi]} \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)}{\int D\Phi e^{-S[\Phi]}} \quad (I.1)$$

В стохастическом подходе вводится дополнительное измерение t (фиктивное время) и предполагается, что поле зависит от $D+1$ переменных. Эволюция по дополнительному параметру t описывается релаксационным стохастическим уравнением (уравнением Ланжевена^{/57,58/}):

$$\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} = - \frac{\delta S[\Phi]}{\delta \Phi(x,t)} + \eta(x,t) \quad (I.2)$$

с начальным условием $\Phi(x,0) = 0$. На самом деле это начальное значение может быть заменено более общим $\Phi(x,0) = C(x)$, где $C(x)$ — произвольная функция. Можно показать^{/28/}, что в пределе $t \rightarrow \infty$ решение уравнения (I.2) $\Phi_\eta(x,t)$ не зависит от выбора $C(x)$. Случайная величина $\eta(x,t)$ является гауссовым шумом^{x)} со следующим распределением:

$$\begin{aligned} \langle \eta(x,t) \eta(x',t') \rangle_\eta &= 2 \delta^D(x-x') \delta(t-t') \\ \langle \eta(x_1, t_1) \dots \eta(x_{2n+1}, t_{2n+1}) \rangle_\eta &= 0 \\ \langle \eta(x_1, t_1) \dots \eta(x_{2n}, t_{2n}) \rangle_\eta &= \sum_{\text{комб. пар}} \prod \langle \eta(x_i, t_i) \eta(x_j, t_j) \rangle_\eta \end{aligned} \quad (I.3)$$

x) Иногда называемое "белым шумом".

Корреляционные функции $\langle \varphi_1(x_1, t_1) \dots \varphi_n(x_n, t_n) \rangle_n$ можно определить как средние по белому шуму $\zeta(x, t)$:

$$\langle \varphi_1(x_1, t_1) \dots \varphi_n(x_n, t_n) \rangle_n = \int D\zeta e^{-\frac{1}{2} \int d^D x dt \zeta^2(x, t)} \varphi_1(x_1, t_1) \dots \varphi_n(x_n, t_n) \quad (I.4)$$

Если ввести в рассмотрение функционал плотности распределения вероятности $P[\varphi, t]$

$$P[\varphi, t] = \frac{\int D\zeta e^{-\frac{1}{2} \int d^D x dt \zeta^2(x, t)} \prod_y \delta[\varphi(y) - \varphi_2(y, t)]}{\int D\zeta e^{-\frac{1}{2} \int d^D x dt \zeta^2(x, t)}} \quad (I.5)$$

то одновременные корреляционные функции могут быть представлены в виде:

$$\langle \varphi_1(x_1, t) \dots \varphi_n(x_n, t) \rangle_n = \int D\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) P[\varphi, t] \quad (I.6)$$

Величина $P[\varphi, t]$, которую можно рассматривать как функционал плотности вероятности перехода из $\varphi(x, 0)$ в $\varphi(x, t)$, удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial P[\varphi, t]}{\partial t} = \int d^D x \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \left\{ \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi(x)} \right\} P[\varphi, t] \quad (I.7)$$

с начальным условием $P[\varphi, 0]$.

Действительно, так как для любого функционала выполняется соотношение

$$\langle F[\varphi_1(x, t)] \rangle_n = \int D\varphi F[\varphi(x)] P[\varphi, t] \quad (I.8)$$

то имеет место равенство:

$$\langle F[\varphi_1(x, t + \Delta t)] \rangle_n = \int D\varphi F[\varphi(x)] P[\varphi, 0; t + \Delta t, 0] \quad (I.9)$$

В силу стохастической природы белого шума функционал распределения вероятности перехода из состояния $\varphi(x, 0) = 0$ в момент "времени" $t = 0$ в состояние $\varphi(x, t)$ в момент "времени" t определяется соотношением:

$$P[\varphi, 0; t + \Delta t, 0] = \int D\tilde{\varphi} P[\varphi, \tilde{\varphi}; t + \Delta t, t] P[\tilde{\varphi}, 0; t, 0] \quad (I.10)$$

Равенство (I.10) выражает основное свойство функционала распределения вероятностей марковского процесса^{67/} и служит исходным моментом для вывода уравнения Фоккера-Планка (I.7). Подставляя (I.10) в равенство (I.9), получим формулу

$$\langle F[\varphi_1(x, t + \Delta t)] \rangle_n = \int D\varphi D\tilde{\varphi} P[\varphi, \tilde{\varphi}; t + \Delta t, t] P[\tilde{\varphi}, 0; t, 0] F[\varphi(x)] \quad (I.11)$$

После разложения функционала $F[\Phi(x)]$ в "точке" $\Phi(x) = \tilde{\Phi}(x)$

$$F[\Phi(x)] = F[\tilde{\Phi}(x)] + \int d^D x \Delta \Phi(x) \left. \frac{\delta F[\Phi]}{\delta \Phi(x)} \right|_{\Phi=\tilde{\Phi}} + \frac{1}{2} \int d^D x_1 d^D x_2 \Delta \Phi(x_1) \Delta \Phi(x_2) \left. \frac{\delta^2 F[\Phi]}{\delta \Phi(x_1) \delta \Phi(x_2)} \right|_{\Phi=\tilde{\Phi}} + \dots \quad (I.12)$$

с учетом того, что

$$\int D\Phi P[\Phi, \tilde{\Phi}, t + \Delta t, t] = 1, \quad (I.13)$$

из (I.11) получим соотношение:

$$\begin{aligned} & \int D\Phi F[\Phi] (P[\Phi, 0; t + \Delta t, 0] - P[\Phi, 0; t, 0]) = \\ & = \int D\Phi P[\Phi, 0; t, 0] \left\{ \int d^D x \langle \Delta \Phi \rangle_x \frac{\delta F[\Phi]}{\delta \Phi(x)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int d^D x_1 d^D x_2 \langle \Delta \Phi(x_1) \Delta \Phi(x_2) \rangle_x \frac{\delta^2 F[\Phi]}{\delta \Phi(x_1) \delta \Phi(x_2)} + \dots \right\}, \quad (I.14) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \langle \Delta \Phi \rangle_x &= - \frac{\delta S}{\delta \Phi} \cdot \Delta t \\ \langle \Delta \Phi(x_1) \Delta \Phi(x_2) \rangle_x &= 2 \delta^D(x_1 - x_2) \Delta t + O((\Delta t)^2). \end{aligned} \quad (I.15)$$

Функциональное интегрирование по частям в (I.14) с последующим предельным переходом $\Delta t \rightarrow 0$ дает искомое уравнение Фоккера-Планка (I.7).

Метод стохастического квантования, предложенный Паризи и Ву, основан на следующем свойстве корреляционных функций (I.4):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \Phi_2(x_1, t) \dots \Phi_2(x_n, t) \rangle_2 = \langle \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) \rangle_0, \quad (I.16)$$

или, что эквивалентно,

$$w. \lim_{t \rightarrow \infty} P[\Phi, t] = P^{eq}[\Phi] = \frac{e^{-S[\Phi]}}{\int D\Phi e^{-S[\Phi]}}. \quad (I.17)$$

Это означает, что при больших "временах" распределение вероятностей

достигает равновесного значения, определенного формулой (I.17), и корреляционные функции $\langle \Phi_1(x_1, t) \dots \Phi_n(x_n, t) \rangle_{\eta}$ в равновесном состоянии, т.е. при $t \rightarrow \infty$, эквивалентны функциям Грина евклидовой квантовой теории поля.

Заметим, что предел по t в формуле (I.17) понимается в слабом смысле, так как $P[\Phi, t]$ является функционалом.

Таким образом, в МСК квантовые флуктуации заменяются гауссовым шумом в классической системе, и вместо квантования системы при помощи функциональных средних решается классическое уравнение Ланжевена с гауссовым шумом.

Докажем теперь основное равенство (I.16). Для этого будем рассматривать локальное самодействующее скалярное поле в D -мерном евклидовом пространстве (соотношение (I.16) для калибровочных полей будет доказано в § 3). Действие такого скалярного поля имеет вид

$$S[\Phi] = \int d^D x \left\{ \mathcal{L}_0(\Phi) + \mathcal{L}_I(\Phi) \right\}$$

$$\mathcal{L}_0(\Phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 ; \quad \mathcal{L}_I = g(\Phi)^n . \quad (I.18)$$

Функции Грина в теории возмущений представляются в виде ряда по константе связи g . Разложим по степеням g функционал распределения вероятности $P[\Phi, t]$:

$$P[\Phi, t] = \sum_{k=0}^{\infty} g^k P_{(k)}[\Phi, t] . \quad (I.19)$$

Тогда вклад в n -точечную одновременную корреляционную функцию в k -том порядке теории возмущений можно представить в виде

$$\langle \Phi_1(x_1, t) \dots \Phi_n(x_n, t) \rangle_{\eta}^{(k)} = g^k \int D\Phi \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) P_{(k)}[\Phi, t] \quad (I.20)$$

и вычислить его как сумму соответствующих регуляризованных диаграмм Фейнмана. Используя разложение (I.19), уравнение Фоккера-Планка (I.7) можно записать в виде

$$\frac{\partial P_{(k)}[\Phi, t]}{\partial t} = \int d^D x \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} \left\{ \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} + \frac{\delta S_0[\Phi]}{\delta \Phi(x)} \right\} P_{(k)}[\Phi, t] +$$

$$+ \int d^D x \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} \left\{ \frac{\delta S_I[\Phi]}{\delta \Phi(x)} P_{(k-1)}[\Phi, t] \right\} . \quad (I.21)$$

Начальные условия при этом имеют вид

$$P_{(k)}[\Phi, 0] = \prod_y \delta[\Phi(y)]$$

$$P_{(k)}[\Phi, 0] = 0 ; \quad k \geq 1 . \quad (I.22)$$

Доказательство равенства (I.16) проведем по индукции. Непосредственным вычислением можно убедиться в том, что функционал $P_0[\Phi, t]$ для теории голя с действием (I.18) имеет вид

$$P_0[\Phi, t] = N_0^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^D k \Phi(k) \frac{k^2 + m^2}{1 - \exp\{-2t(k^2 + m^2)\}} \Phi(-k) \right\} \quad (I.23)$$

и что при $t \rightarrow \infty$ равен P_0^{eq} :

$$w. \lim_{t \rightarrow \infty} P_0[\Phi, t] = P_0^{eq} = N_0^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^D k \Phi(k) (k^2 + m^2) \Phi(-k) \right\}. \quad (I.24)$$

Для функционалов $P_\ell[\Phi, t]$, $\ell \geq 1$ выполнение (I.16) основано на следующей лемме:

$$w. \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} P_\ell[\Phi, t] = 0; \quad (I.25)$$

ее доказательство см., напр., в^{28/}. Это соотношение имеет простой физический смысл: при $t \rightarrow \infty$ распределение вероятности (более точно - коэффициенты разложения функционала распределения вероятности в ряд по теории возмущений) становится стационарным.

Если далее предположить, что функционалы $P_\ell[\Phi, t]$, $1 \leq \ell \leq k-1$ равномерно ограничены и удовлетворяют предельному соотношению

$$w. \lim_{t \rightarrow \infty} P_\ell[\Phi, t] = P_\ell^{eq}[\Phi], \quad (I.26)$$

то функционал $P_k[\Phi, t]$ достигает предельного распределения $P_k[\Phi, \infty]$, которое удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \int \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} \left\{ \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} + \frac{\delta S_0[\Phi]}{\delta \Phi(x)} \right\} P_k[\Phi, \infty] d^D x &= \\ = \int \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} \left\{ \frac{\delta S_r[\Phi]}{\delta \Phi(x)} P_{k-1}[\Phi, \infty] \right\} d^D x. \end{aligned} \quad (I.27)$$

Оно эквивалентно уравнению Швингера-Дэйсона, если $P_k[\Phi, \infty] = P_k^{eq}[\Phi]$ и $P_{k-1}[\Phi, \infty] = P_{k-1}^{eq}[\Phi]$. Благодаря индуктивному предположению (I.26) второе из этих равенств выполняется, и поскольку уравнение Швингера-Дэйсона имеет единственное решение для регуляризованных, но не перенормированных теорий, то $P_k[\Phi, \infty]$ идентично $P_k^{eq}[\Phi]$, что и требовалось доказать. В случае перенормированных теорий единственность решения уравнения (I.27) имеет место с точностью до ренорм-групповых преобразований.

Заметим, что в доказательстве неявно предполагалось существование равновесных распределений $P_k^{eq}[\Phi]$ для всех k . Для калибровочных теорий последнее неверно (см. § 3).

Для полноты описания основных черт метода стохастического квантования приведем еще непertурбативное доказательство того, что функционал распределения $P[\Phi, t]$ достигает при $t \rightarrow \infty$ стационарного предела (I.17). Для этого запишем $P[\Phi, t]$ в следующем виде:

$$P[\Phi, t] = e^{-\frac{1}{2}S[\Phi]} \cdot \Psi[\Phi, t]. \quad (I.28)$$

Тогда уравнение Фоккера-Планка принимает форму

$$-\frac{\partial \Psi[\Phi, t]}{\partial t} = H^{F.P.} \Psi[\Phi, t], \quad (I.29)$$

где $H^{F.P.}$ называется гамильтонианом Фоккера-Планка и представляется формулой

$$H^{F.P.} = \int dx \alpha^\dagger(x) \alpha(x),$$

$$\alpha(x) = -i \left(\frac{\delta}{\delta \Phi(x)} + \frac{1}{2} \frac{\delta S[\Phi]}{\delta \Phi(x)} \right). \quad (I.30)$$

Так как гамильтониан $H^{F.P.}$ формально является самосопряженным, то решение уравнения (I.29) можно представить в виде разложения по полному набору собственных функций оператора $H^{F.P.}$:

$$\Psi[\Phi, t] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-\lambda_n t} \Psi_n[\Phi], \quad (I.31)$$

где собственные функции $\Psi_n[\Phi]$ удовлетворяют уравнению

$$H^{F.P.} \Psi_n[\Phi] = \lambda_n \Psi_n[\Phi]. \quad (I.32)$$

Из положительности оператора $H^{F.P.}$ следует, что все собственные значения $\lambda_n \geq 0$. Ясно также, что функционал

$$\Psi_0[\Phi] = \frac{e^{-\frac{1}{2}S[\Phi]}}{N} \quad (I.33)$$

является собственной функцией гамильтониана Фоккера-Планка, соответствующей нулевому собственному значению $\lambda_0 = 0$. Если предположить, что собственное значение λ_0 отделено конечной щелью от остальных собственных значений λ_i оператора $H^{F.P.}$, т.е. $\lambda_i > 0$ при $i \geq 1$, то из формул (I.28) и (I.31) при $t \rightarrow \infty$ следует:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[\Phi, t] = e^{-\frac{1}{2}S[\Phi]} \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi[\Phi, t] = \frac{e^{-S[\Phi]}}{\int D\Phi e^{-S[\Phi]}}, \quad (I.34)$$

что и устанавливает связь между стохастическими средними и евклидовой квантовой теорией поля. Заметим, что справедливость соотношения (I.34) существенно зависит от положительности оператора и существования "энергетической" щели в его спектре. Дополнительное требование

заключается в том, чтобы начальное условие для функционала не было ортогональным к волновой функции основного состояния оператора $H^{F.P.}$.

Прежде чем закончить настоящий параграф, обратим внимание на замечание Паризи и Ву^[17] о том, что уравнение Ленжевена не является единственным релаксационным уравнением, приводящим к равновесному состоянию (I.16). На языке уравнения Фоккера-Планка для функционала распределения $P[\varphi, t]$ это означает, что гамильтониан Фоккера-Планка может приобретать и другие формы, кроме (I.30).

Рассмотрим, какими именно могут быть формы оператора $H^{F.P.}$. Будем предполагать, что функционал распределения удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial P[\varphi, t]}{\partial t} = H^{F.P.} P[\varphi, t] \quad (I.35)$$

и достигает при $t \rightarrow \infty$ равновесного состояния

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[\varphi, t] = N^{-1} \exp\{-S[\varphi]\}, \quad (I.36)$$

причем при любых t

$$\int D\varphi P[\varphi, t] = 1. \quad (I.37)$$

После дифференцирования условия нормировки по "времени" получаем с учетом (I.35) следующее равенство:

$$\int D\varphi H^{F.P.} P[\varphi, t] = 0. \quad (I.38)$$

Представление в виде

$$\frac{\delta}{\delta\varphi} \cdot \hat{K} = H^{F.P.}$$

оператора $H^{F.P.}$, где \hat{K} определяется ниже, является достаточным условием для выполнения равенства (I.38).

Представим далее $P[\varphi, t]$ в виде разложения по собственным функциям оператора $H^{F.P.}$:

$$P[\varphi, t] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t} \psi_n[\varphi]. \quad (I.39)$$

Если опять предположить, что $\lambda_i = 0$ ($i > 1$) и $\lambda_0 = 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[\varphi, t] = \psi_0[\varphi]. \quad (I.40)$$

В силу требования (I.36), $\psi_0[\varphi]$ принимает вид

$$\psi_0[\varphi] = N^{-1} \exp\{-S[\varphi]\}, \quad (I.41)$$

причем $\Psi[\Phi]$, очевидно, удовлетворяет равенству

$$\left(\frac{\delta}{\delta\Phi(x)} + \frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi(x)} \right) \Psi[\Phi] = 0. \quad (1.42)$$

Так как $\Psi[\Phi]$ является собственной функцией оператора $H^{F.P.}$ с нулевым собственным значением, то $H^{F.P.}$ должен содержать в правой части оператор $\left(\frac{\delta}{\delta\Phi} + \frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi} \right)$. Поэтому $H^{F.P.}$ мы можем представить в виде

$$H^{F.P.} = \int d^Dx d^Dy \frac{\delta}{\delta\Phi(x)} K(x, y; \Phi) \left(\frac{\delta}{\delta\Phi(y)} + \frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi(y)} \right). \quad (1.43)$$

Потребуем для простоты, чтобы оператор $K(x, y; \Phi)$ не содержал функциональных производных.

Далее, для того чтобы придать оператору $H^{F.P.}$ явно эрмитову форму, сделаем следующее преобразование:

$$\tilde{H}^{F.P.} = e^{\frac{1}{2}S[\Phi]} H^{F.P.} e^{\frac{1}{2}S[\Phi]} \quad (1.44)$$

Это дает

$$\tilde{H}^{F.P.} = \int d^Dx d^Dy \alpha^+(x) K(x, y; \Phi) \alpha(y), \quad (1.45)$$

где

$$\alpha(x) = -i \left(\frac{\delta}{\delta\Phi(x)} + \frac{1}{2} \frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi(x)} \right). \quad (1.46)$$

Если оператор $K(x, y; \Phi)$ - эрмитов, то и $\tilde{H}^{F.P.}$ является эрмитовым оператором.

Выражение (1.45) представляет собой наиболее общую форму оператора Фоккера-Плэнка. Именно в такой форме мы его используем при стохастическом квантовании спинорных полей в § 4.

§ 2. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИАГРАММЫ

В методе стохастического квантования, так же, как и в стандартной КТП, можно использовать теорию возмущений и ввести диаграммную технику. Стохастические диаграммы мы рассмотрим на примере самодействующего евклидова скалярного поля с функционалом действия:

$$S[\Phi] = \int d^Dx \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \frac{1}{3!} g \Phi^3 + \frac{1}{4!} \lambda \Phi^4 \right\}. \quad (2.1)$$

Уравнение Ленжевена (1.2) для скалярной теории поля с действием (2.1) может быть представлено в виде интегрального уравнения в импульсном пространстве

$$\Psi(k, t) = \int_0^t ds G(k, t-s) \left\{ \eta(k, s) - \frac{g}{2!} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \Psi(p, s) \Psi(k-p, s) - \frac{\lambda}{3!} \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} \Psi(p, s) \Psi(q, s) \Psi(k-p-q, s) \right\}, \quad (2.2)$$

где

$$G(k, t-s) = \exp\{-(t-s)(k^2 + m^2)\} \quad (2.3)$$

с начальным условием $\Phi(k, 0) = 0$.

Решая уравнение (2.2) при помощи итераций, легко записать $\Psi(k, t)$ в виде разложения по константе взаимодействия. Графическое решение уравнения (2.2) представляется так:

$$\Psi(k, t) = \text{---} \circ + \text{---} \begin{matrix} p, s \\ \text{---} \\ s \\ \text{---} \\ k-p, s \end{matrix} + \text{---} \begin{matrix} p, s \\ \text{---} \\ s \\ \text{---} \\ q, s \\ \text{---} \\ k-p-q, s \end{matrix} + \text{---} \begin{matrix} p, s \\ \text{---} \\ s \\ \text{---} \\ k-p, s \end{matrix} \begin{matrix} q, s' \\ \text{---} \\ p-q, s' \end{matrix} + \dots \quad (2.4)$$

где G отвечает прямая линия, а гауссову шуму η — значок \circ . Такая диаграммная запись включает в себя интегрирование по импульсам и фиктивным временам во всех обычных вершинах и кружочках \circ .

Рассмотрим теперь n -точечную корреляционную функцию $\langle \Psi_n(x_1, t_1) \dots \Psi_n(x_n, t_n) \rangle_n$ и подставим в нее $\Psi_n(k, t)$ в виде диаграммного решения (2.4). После усреднения по гауссову шуму значки \circ попарно соединяются всеми возможными способами (в силу свойств белого шума (1.3)). Полученные таким образом диаграммы будем называть стохастическими. Каждая из них имеет форму диаграммы Фейнмана теории с действием (2.1). Различие заключается в том, что в стохастических диаграммах появляются линии с кружочками, которые соответствуют свертке двух η -функций. Таким образом, каждая стохастическая диаграмма имеет форму стандартной фейнмановской диаграммы теории поля с действием (2.1). И, наоборот, каждой фейнмановской диаграмме соответствует некоторое число стохастических диаграмм той же топологии.

В работе^{/49/} доказано, что сумма всех стохастических диаграмм одинаковой топологии при $t \rightarrow \infty$ эквивалентна вкладу соответствующей диаграммы Фейнмана. Например, в третьем порядке по теории возмущений 3-точечную корреляционную функцию $\langle \varphi_2(k, t_1) \varphi_2(k_1, t_2) \varphi_2(k_2, t_3) \rangle_n$ можно представить суммой стохастических диаграмм (см. рис. 1), которая при $t \rightarrow \infty$ эквивалентна вкладу соответствующей диаграммы Фейнмана. В силу определения белого шума, интегрирование по внутренним импульсам такое же, как в стандартной диаграмме Фейнмана.

Свойства белого шума также дают возможность провести интегрирование по временам по обе стороны кружочков в диаграмме. Такое интегрирование приводит к стохастическому пропагатору:

$$D(k, t, t') = 2 \int_0^{\min(t, t')} ds G(k, t-s) G(k, t'-s) = \\ = \frac{e^{-k^2 m^2 (t-t')}}{k^2 + m^2} - \frac{e^{-k^2 m^2 (t+t')}}{k^2 + m^2}; \quad (2.5)$$

t и t' суть времена вершин, соединенных стохастическим пропагатором. Таким образом, в стохастических диаграммах простые линии отвечают функциям Грина G уравнения Ленжевена; линии с кружочками соответствуют стохастическим пропагаторам D (см. рис. 2).

Чтобы вычислить вклад каждой стохастической диаграммы, кроме интегрирования по внутренним импульсам необходимо также провести интегрирование по внутренним временам, которые характеризуют вершины диаграмм. Для этого вначале необходимо провести упорядочение по всем временам, а затем произвести интегрирование по внутренним временам. Окончательное выражение для стохастической диаграммы представляется суммой вкладов интегралов, "в которых учитываются все возможные последовательности времен".

§ 3. МСК И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

В теориях, обладающих локальной калибровочной инвариантностью, доказательство соотношения $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \varphi, t \rangle - \rho^c[\varphi]$ в том виде, как оно было приведено для скалярных полей, перестает иметь силу. Это происходит потому, что не существует предельного при $t \rightarrow \infty$ распределения даже для $\rho_0[\varphi, t]$. С другой стороны, Паризи и Ву^{/17/} показали, что для средних значений по \int от калибровочно-инвариантных величин предел при $t \rightarrow \infty$ существует.

Объясним последнее более подробно. Пусть $F[A]$ является функцией от калибровочного поля. Его среднее значение по белому шуму

определяется, как и ранее, функциональным интегралом:

$$\langle F[A_\mu(t)] \rangle_\mu = \int DA F[A] P[A, t], \quad (3.1)$$

где функционал распределения вероятностей $P[A, t]$ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка. Стохастическое квантование калибровочных полей основано на том, что хотя $P[A, t]$ и не имеет предела при $t \rightarrow \infty$, среднее (3.1) для калибровочно-инвариантных функционалов существует и равно обыкновенному квантовому среднему.

Поля $A_\mu^a(x)$ при инфинитезимальных калибровочных преобразованиях с параметрами $\theta^b(x)$ преобразуются следующим образом:

$$\delta A_\mu^a(x) = \delta_\mu^{ab} \theta^b(x) \equiv \delta^{ab} \partial_\mu^b \theta^b(x) - f^{abc} \theta^b(x) A_\mu^c(x). \quad (3.2)$$

Соответственно этому, функционал $F[A]$ имеет приращение

$$\delta F[A] = - \int d^D x \theta^a(x) D_\mu^{ab} \frac{\delta F[A]}{\delta A_\mu^b(x)}. \quad (3.3)$$

По определению, калибровочно-инвариантный функционал удовлетворяет равенству

$$D_\mu^{ab} \frac{\delta F[A]}{\delta A_\mu^b(x)} = 0. \quad (3.4)$$

Согласно Паризи Ву^{/17/} и Цванцигеру^{/18/}, суть стохастического квантования калибровочных полей состоит в том, что при вычислении средних (3.1) от калибровочно-инвариантных функционалов необходимо видоизменить уравнение Ланжевена следующим образом:

$$\frac{\partial A_\mu^a(x, t)}{\partial t} = - \frac{\delta S[A]}{\delta A_\mu^a(x, t)} - D_\mu^{ab} V^b[A] + \zeta_\mu^a(x, t), \quad (3.5)$$

где $V^b[A]$ является произвольным калибровочно-неинвариантным функционалом поля A_μ^a . Используя (3.5), мы можем вычислить "временную" зависимость калибровочно-инвариантного функционала $F[A]$, удовлетворяющего условию (3.4):

$$\frac{\partial F[A]}{\partial t} = \int d^D x \frac{\partial A_\mu^a(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{\delta F[A]}{\delta A_\mu^a(x, t)}. \quad (3.6)$$

Подставим (3.5) в выражение (3.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[A]}{\partial t} = \int d^D x \left\{ - \frac{\delta S[A]}{\delta A_\mu^a(x, t)} + \zeta_\mu^a(x, t) \right\} \frac{\delta F[A]}{\delta A_\mu^a(x, t)} + \\ + \int d^D x \left(- D_\mu^{ab} V^b[A] \right) \frac{\delta F[A]}{\delta A_\mu^a(x, t)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

После интегрирования по частям (3.7) можно переписать в виде

$$\frac{\partial F[A]}{\partial t} = \int d^D x \left\{ - \frac{\delta S[A]}{\delta A_\mu^a(x,t)} + \Gamma^a(x,t) \right\} \frac{\delta F[A]}{\delta A_\mu^a(x,t)} + \int d^D x V^b[A] D_{\Gamma}^{ab} \frac{\delta F[A]}{\delta A_\mu^a(x,t)} \quad (3.8)$$

Теперь видно, что член, пропорциональный $V^b[A]$, в силу (3.4) не дает вклада в (3.6).

Видоизмененному уравнению Ланжевена можно поставить в соответствие следующее уравнение Фоккера-Планка для функционала распределения вероятности $P_V[A,t]$:

$$\frac{\partial P_V[A,t]}{\partial t} = \int d^D x \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \left\{ \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} + \frac{\delta S[A]}{\delta A_\mu^a(x)} + D_{\Gamma}^{ab} V^b[A] \right\} P_V[A,t] \quad (3.9)$$

Еще раз отметим, что калибровочно-инвариантные величины $F[A]$ не зависят от выбора $V^b[A]$. Другими словами, не имеет значения, используем ли мы функционал распределения $P[A,t]$ или модифицированное распределение $P_V[A,t]$. Конечно, такое положение дел не имеет места для калибровочно-неинвариантных функционалов.

Поскольку функционал $V[A]$ по определению не является калибровочно-инвариантным, уравнение Фоккера-Планка приводит к решению $P_V[A,t]$, которое допускает предельный переход $t \rightarrow \infty$, по крайней мере, в теории возмущений. В силу последнего, доказательство формулы (I.17) можно распространить и на случай калибровочных полей.

Пусть $V^a[A]$ имеет вид

$$V^a[A] = \frac{1}{\alpha} \left(\partial_\mu A_\mu^a(x) \right), \quad (3.10)$$

где α - произвольная константа. Разложим далее функционал $P_V[A,t]$ по константе связи g :

$$P_V[A,t] = \sum_{k=0}^{\infty} g^k P_{(k)}[A,t] \quad (3.11)$$

В силу того, что функционал действия содержит члены, пропорциональные как g , так и g^2 , то уравнение Фоккера-Планка для коэффициентных функций $P_{(k)}[A,t]$ разложения функционала $P_V[A,t]$ (3.11) связывает между собой $P_{(k)}[A,t]$, $P_{(k-1)}[A,t]$ и $P_{(k-2)}[A,t]$ для $k \geq 3$. Сделаем так же, как и в случае скалярных полей, индуктивное предположение (I.23), и особо рассмотрим $P_{(0)}[A,t]$, значение которого (см. /28/) есть

$$P_{(0)}[A, t] = N_0^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4k A_\mu^a(k) \left(\Delta_{\mu\nu}^{ab} \right)^{-1} A_\nu^b(-k) \right\}, \quad (3.12)$$

где

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab} = \frac{\delta^{ab}}{k^2} \left\{ \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \left(1 - e^{-2k^2 t} \right) + \alpha \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \left(1 - e^{-\frac{2k^2 t}{\alpha}} \right) \right\}. \quad (3.13)$$

Видно, что при $\alpha = 1$ мы получаем стохастический "фейнмановский" пропагатор при конечных временах. Из формул (3.12) и (3.13) следует, что имеет место предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{(0)}[A, t] = P_{(0)}^{eq}[A], \quad (3.14)$$

которое и доказывает справедливость индуктивного предположения для $t=0$. Дальнейшее доказательство совершенно аналогично приведенному нами в § I.

Отсюда следует вывод, что при $t \rightarrow \infty$ мы получаем регуляризованный ряд для функционального распределения вероятностей. Заметим, что корреляционные функции, которые можно вычислить при помощи функционала $P_V[A, t]$, не совпадают при $t \rightarrow \infty$ с функциями Грина стандартной теории с фиксированной калибровкой в виде $(\partial_\mu A_\mu)^2$. Последнее является следствием того, что в только что описанном подходе явным образом не присутствуют духи Фаддеева-Попова, вклад которых заменен более сложной структурой вершин. Как показал Цвенцигер (см. /18, 19/), функционал $V[A]$ можно выбрать таким образом, что МСК будет полностью имитировать вклад духов Фаддеева-Попова.

Немики и другие /24/ заметили, что модификация уравнения Фоккера-Планка (3.7) может служить введением в теорию процедуры фиксации калибровки. В качестве альтернативы они предложили рассмотреть квантование на основе исходного уравнения Ленжевена.

Рассмотрим вкратце предложенный этими авторами подход. Для этого выберем действие калибровочного векторного поля в виде

$$S_0[A] = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) \left[-\square \delta_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \right] A_\nu(x). \quad (3.15)$$

После Фурье-преобразования поля $A_\mu(x)$ к импульсному представлению уравнение Ленжевена можем записать в виде

$$\frac{\partial A_\mu(k, t)}{\partial t} = -k^2 \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) A_\nu(k, t) + \zeta_\mu(k, t). \quad (3.16)$$

При начальном условии $A_\mu(x, 0) = 0$ решение уравнения (3.16) можно представить так:

$$A_{\mu}(k, t) = \int_0^t dt' \left\{ \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right) e^{-k^2 |t-t'|} + \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right\} Z_{\nu}(k, t'). \quad (3.17)$$

Двухточечная корреляционная функция записывается следующим образом:

$$\langle A_{\mu}(k, t) A_{\nu}(k', t') \rangle_2 \equiv D_{\mu\nu}^{(0)}(k, t | k', t') = \delta^4(k+k') D_{\mu\nu}^{(0)}(k, t, t'), \quad (3.18)$$

где

$$D_{\mu\nu}^{(0)}(k, t, t') = \Delta_{\mu\nu}^{(0)T}(k) \begin{bmatrix} e^{-k^2 |t-t'|} & -k^2 |t-t'| \\ -e^{-k^2 |t-t'|} & -k^2 |t-t'| \end{bmatrix} + 2 \min(t, t') \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \quad (3.19)$$

и

$$\Delta_{\mu\nu}^{(0)T}(k) = \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right); \quad (3.20)$$

122086 $\Delta_{\mu\nu}^{(0)}(k)$ является стандартным пропагатором в калибровке Лэндау. Из (3.19) видно, что поперечная компонента одновременной корреляционной функции (3.18) при $t \rightarrow \infty$ стремится к $\Delta_{\mu\nu}^{(0)T}$. При этом продольная часть, пропорциональная $2t \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2}$, исчезает для калибровочно-инвариантных величин в абелевых калибровочных теориях. Еще раз подчеркнем, что в этом и заключается основная идея МСК для калибровочных полей.

Таким образом, МСК не нуждается в видоизменении легренжиана с целью фиксации калибровки.

Более точно, в методе МСК нужно подходящим образом подбирать начальные условия $A_{\mu}(k, 0)$, так как они тесно связаны с введением в теорию калибровочного параметра. Чтобы исследовать эту проблему, удобно разложить уравнение Лэнжевена на продольную и поперечную части:

$$\frac{\partial A_{\mu}^L(k, t)}{\partial t} = Z_{\mu}^L(k, t); \quad (3.21a)$$

$$\frac{\partial A_{\mu}^T(k, t)}{\partial t} = -k^2 A_{\mu}^T(k, t) + Z_{\mu}^T(k, t), \quad (3.21b)$$

где

$$A_{\mu}^L(k, t) = \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} A_{\nu}(k, t); \quad (3.22a)$$

$$A_{\mu}^T(k, t) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right) A_{\nu}(k, t). \quad (3.226)$$

В общем виде

$$A_{\mu}^T(k, t) = A_{\mu}^{T(0)}(k, t) + A_{\mu}^T(k, 0) e^{-k^2 t}. \quad (3.23)$$

Из (3.23) ясно, что при $t \rightarrow \infty$ выбор начальных условий не будет влиять на значение поля $A_{\mu}^T(k, \infty)$. Такое поведение поперечной части при $t \rightarrow \infty$ является следствием действия "затухающей силы" $-k^2 A_{\mu}^T(k, t)$ в правой части уравнения (3.21а). Напротив, в уравнении (3.21б) для продольной части поля $A_{\mu}^L(k, t)$ нет "затухающей силы", и начальные условия играют существенную роль даже при $t \rightarrow \infty$. Если выбрать начальное значение $A_{\mu}^L(k, 0) = \frac{k_{\mu}}{k^2} \Phi(k)$, где $\Phi(k)$ — скалярная функция, то для уравнения (3.21б) получаем следующее решение:

$$A_{\mu}^L(k, t) = \frac{k_{\mu}}{k^2} \Phi(k) + A_{\mu}^{L(0)}(k, t), \quad (3.24a)$$

где

$$A_{\mu}^{L(0)}(k, t) = \int_0^t dt' \zeta(k, t'). \quad (3.24b)$$

Корреляционная функция, соответствующая такому выбору начальных условий, имеет вид

$$\langle A_{\mu}(k, t) A_{\nu}(k', t) \rangle_t = \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2 k'^2} \Phi(k) \Phi(k') + D_{\mu\nu}^{(0)}(k, t, t) \delta^{\nu}(k+k'). \quad (3.25)$$

Заметим, что простое произведение двух скалярных функций $\Phi(k) \Phi(k')$ не может привести к множителю $\delta^{\nu}(k+k')$, выражающему трансляционную инвариантность. Поэтому для восстановления правильной формы правой части (3.25) можно положить $\Phi(k) = 0$, т.е. ввести δ -образное функциональное распределение для начальных условий. Но в теории стохастических процессов такое распределение необычно. Более естественным является определение начального условия в виде случайного поля с некоторым функционалом распределения вероятности. Тогда корреляционные функции получаются в результате усреднения не только по гауссовому шуму ζ , но и по случайному полю начальных условий:

$$\overline{\langle A_{\mu}(k, t) A_{\nu}(k', t) \rangle_t} = \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2 k'^2} \Phi(k, k') + D_{\mu\nu}^{(0)}(k, t, t), \quad (3.26)$$

где $\Phi(k, k')$ является функциональным средним произведения по случайному начальному полю. Если подобрать подходящее функциональное распределение для случайного поля начальных условий, то $\Phi(k, k')$ можно представить в виде

$$\Phi(k, k') = \alpha \delta^D(k+k'), \quad (3.27)$$

где α является безразмерным положительным параметром. Тогда для

$\langle A_{\mu}(k, t) A_{\nu}(k', t') \rangle_{\eta}^0$ имеем

$$\begin{aligned} \langle A_{\mu}(k, t) A_{\nu}(k', t') \rangle_{\eta}^0 &= \alpha \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^4} \delta^D(k+k') + D_{\mu\nu}^{(0)}(k, t | k', t') \xrightarrow{t, t' \rightarrow \infty} \\ &= \delta^D(k+k') \left[\frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right) + 2t \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Из уравнения (3.28) следует, что выбор распределения начального состояния соответствует фиксации калибровочного параметра. Отсюда видно, что МСК не является совершенно свободным от фиксации калибровки. С другой стороны, мы должны подчеркнуть, что в МСК можно вычислить пропагатор калибровочного поля без использования стандартной процедуры выбора калибровки, основанной на введении в лагранжиан специального члена. (Напр., $\frac{1}{2\alpha} (\partial_{\rho} A_{\rho})^2$).

Причина последнего заключается в специфическом характере оператора

$$\delta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial t} + (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu}). \quad (3.29)$$

В отличие от обычной квантовой теории поля, в которой нет оператора $\delta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial t}$, а присутствует только проекционный оператор $(k^2 \delta_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu})$, в МСК оператор (3.29) – несингулярный и допускает построение обратной по отношению к нему величины $G_{\mu\nu}(k, t-t')$.

Таким образом, введение фиктивного 'времени' и продольного случайного гауссова шума ζ_{μ}^t порождает дополнительную степень свободы калибровочного поля. Действительно, корреляционная функция (3.28) содержит наряду с поперечной частью $\Delta_{\mu\nu}^{T(0)}(k)$ и продольную.

Описанный только что метод для вычисления пропагатора в нулевом порядке по теории возмущений можно обобщить на случай неабелевых калибровочных полей. Поскольку обычно калибровка в неабелевых калибровочных полях фиксируется введением в теорию духов Фадденва-Попова, то естественно предполагать, что неабелевы калибровочные поля в рассматриваемом формализме могут быть проквантованы без такого введения полей духов.

Рассмотрим случай неабелевых калибровочных полей более подробно. Пусть в D -мерном евклидовом пространстве определено неабелево калибровочное поле с функционалом действия:

$$S = \frac{1}{4} \int d^D x F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x); \quad F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a - g f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c \quad (3.30)$$

где a, b и c описывают цветные (внутренние) степени свободы. Соответствующее уравнение Ланжевена имеет вид

$$\frac{\partial A_{\mu}^a(k, t)}{\partial t} = -(k^2 \delta_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu}) A_{\nu}^a(k, t) + Y_{\mu}^a(k, t), \quad (3.31)$$

где

$$Y_{\mu}^a(k, t) = \gamma_{\mu}^a(k, t) + \frac{g}{(2\pi)^6} \int d^3k_1 d^3k_2 \delta^D(k - k_1 - k_2) V_{\mu\kappa\lambda}^{abc}(k, -k_1, -k_2) * \\ * A_{\kappa}^b(k_1, t) A_{\lambda}^c(k_2, t) + \frac{g^2}{(2\pi)^{10}} \int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 \delta^D(k - k_1 - k_2 - k_3) * \\ * W_{\mu\nu\kappa\lambda}^{abcd} A_{\nu}^b(k_1, t) A_{\kappa}^c(k_2, t) A_{\lambda}^d(k_3, t), \quad (3.32)$$

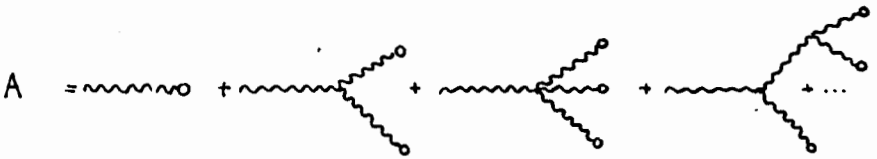
а величины $V_{\mu\kappa\lambda}^{abc}(k, -k_1, -k_2)$ и $W_{\mu\nu\kappa\lambda}^{abcd}$ определены в табл. I.

Так же, как и в случае скалярной теории, можно воспользоваться стохастической диаграммной техникой (см. табл. I) и решить уравнение Ланжевена с начальным условием $A_{\mu}^a(k, 0) = 0$. При этом уравнение Ланжевена представляется в интегральной форме:

$$A_{\mu}^a(k, t) = \int_0^t \Gamma_{\mu\nu}^{ab}(k, t-t') Y_{\nu}^b(k, t') dt', \quad (3.33)$$

где $\Gamma_{\mu\nu}^{ab}(k, t-t')$ является нулевым приближением для функции Грина (см. табл. I), которое мы обсудили раньше, изучая абелевы калибровочные поля.

Уравнение (3.33) можно решить методом последовательных итераций, и решение записать в виде ряда по теории возмущений. Графически оно представляется следующим образом:



Следующей задачей является вычисление 2-точечной корреляционной функции $\langle A_{\mu}^a(k, t) A_{\nu}^b(k', t') \rangle_{\lambda}$. Как уже было отмечено, такие корреляционные функции содержат члены, расходящиеся при $t \rightarrow \infty$. Такие члены являются характерными для калибровочно-неинвариантных величин, подобных рассматриваемой корреляционной функции $\langle AA \rangle$. Напротив, в калибровочно-инвариантных величинах указанные расходимости отсутствуют. Последнее доказано прямым вычислением в^[24] для $\langle F_{\mu\nu}^a(k, t) F_{\kappa\lambda}^b(k', t') \rangle_{\lambda}$.

Поэтому далее можно учитывать только члены, конечные при $t \rightarrow \infty$.

Во втором порядке по теории возмущений для корреляционной функции $\langle A_\mu^a(k,t) A_\nu^b(k',t') \rangle_L$ имеем

$$\langle A_\mu^a(k,t) A_\nu^b(k',t') \rangle_L = \delta^p(k+k') D_{\mu\nu}^{ab}(k,t,t'), \quad (3.34)$$

где

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k,t,t') = a + 2\delta + 2\beta + 2\gamma + 3\delta + e, \quad (3.35)$$

причем (a)-(e) представляют собой вклады от соответствующих стохастических диаграмм (рис. 3).

Как было замечено в [24], в диаграммах на рис. 3 именно продольные компоненты внутренних линий порождают члены в корреляционных функциях $\langle AA \rangle$, соответствующие вкладам духов Фейдеева-Попова стандартной теории.

В [24] явно показано во втором порядке теории возмущений, что МСК автоматически ведет к правильному выражению для пропагатора неабелева калибровочного поля, содержащему вклады духов Фейдеева-Попова.

§ 4. СТОХАСТИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ СПИНОРНЫХ ПОЛЕЙ

Специфика стохастического квантования спинорных полей заключается в том, что эти поля не имеют классического аналога. Выражаясь операторным языком, чисто квантовая природа фермионных полей отражается в появлении операторов, не являющихся положительно определенными.

В [51] был развит МСК для массивных фермионных полей, в котором используются диагональные по спинорным индексам функции Грина. Оказывается, такие функции сходятся при $t \rightarrow \infty$. Квантование безмассовых полей в рамках такого подхода можно провести только после введения в теорию фиктивной фермионной массы. Это, однако, является неудобным при рассмотрении полей с киральной симметрией.

Поэтому далее мы рассмотрим стохастическое квантование фермионных полей, основанное на модификации исходного уравнения Ланжевена (I.2). При этом уравнение Ланжевена будет видоизменено так, чтобы была обеспечена сходимость функций Грина при $t \rightarrow \infty$.

В § I мы уже отмечали, что уравнение Ланжевена и, естественно, уравнение Фоккера-Планка не являются единственными релаксационными уравнениями, которые при $t \rightarrow \infty$ приводят систему в "квантовое" состояние.

Рассмотрим обобщенное уравнение Ланжевена

$$\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} = - \int d^4y V(x,y) \frac{\delta S[\Phi]}{\delta \Phi(y,t)} + \eta(x,t), \quad (4.1)$$

где корреляционные функции для белого шума $\zeta(x, t)$ имеют вид

$$\langle \zeta(x_1, t_1) \zeta(x_2, t_2) \rangle_{\zeta} = 2 V(x_1, x_2) \delta(t_1 - t_2). \quad (4.2)$$

Ядро $V(x, y)$ для случая фермионных полей $\Psi(x, t)$ можно выбрать следующим образом:

$$V(x, y) \equiv K(x, y) = [i \hat{\partial}_x + m] \delta^D(x - y) = [i \gamma_\mu \partial_\mu + m] \delta^D(x - y). \quad (4.3)$$

В результате (4.1) примет вид

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = (\partial^2 + m^2) \Psi(x, t) + \Theta(x, t), \quad (4.4)$$

где спинор $\Theta(x, t)$ описывает белый шум, причем

$$\langle \Theta(x, t) \rangle_{\Theta \bar{\Theta}} = \langle \bar{\Theta}(x, t) \rangle_{\Theta \bar{\Theta}} = 0; \quad (4.5)$$

$$\langle \Theta(x_1, t_1) \bar{\Theta}(x_2, t_2) \rangle_{\Theta \bar{\Theta}} = 2 [i \hat{\partial}_x + m] \delta^D(x_1 - x_2) \delta(t_1 - t_2).$$

Таким образом, вся информация о фермионной природе теории заключается теперь в стохастических средних для шума Θ . Для произвольного функционала $F[\Theta, \bar{\Theta}]$ имеем

$$\langle F[\Theta, \bar{\Theta}] \rangle_{\Theta \bar{\Theta}} = N^{-1} \int D\Theta D\bar{\Theta} F[\Theta, \bar{\Theta}] e^{-\frac{1}{2} \int d^D x dt \bar{\Theta}(x, t) [i \hat{\partial} + m] \Theta(x, t)}. \quad (4.6)$$

Поскольку мы изменили уравнение Ланжевена, то необходимо доказать, что при $t \rightarrow \infty$ корреляционные функции, построенные из решений (4.4) будут совпадать со стандартными вакуумными ожиданиями:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle F[\Psi_{\Theta}(x, t), \bar{\Psi}_{\bar{\Theta}}(x, t)] \rangle_{\Theta \bar{\Theta}} = \langle F[\Psi(x), \bar{\Psi}(x)] \rangle_0. \quad (4.7)$$

Доказательство проведем на основе обобщенного уравнения Фоккера-Планка, для вывода которого воспользуемся результатами § I. Заметим, что обобщенное уравнение Ланжевена (4.1) приводит к изменению средних значений приращений поля (ср. с (I.15)):

$$\langle \Delta \Phi \rangle_{\zeta} = - \int d^D y V(x, y) \frac{\delta S}{\delta \Phi(y)} \cdot \Delta t; \quad (4.8)$$

$$\langle \Delta \Phi(x) \Delta \Phi(y) \rangle_{\zeta} = 2 V(x, y) \Delta t + O((\Delta t)^2).$$

Откуда следует, что обобщенное уравнение Фоккера-Планка имеет вид

$$\frac{\partial P[\Phi, t]}{\partial t} = \int d^D x d^D y V(x, t) \frac{\delta}{\delta \Phi(y)} \left(\frac{\delta}{\delta \Phi(x)} + \frac{\delta S}{\delta \Phi(x)} \right) P[\Phi, t]. \quad (4.9)$$

В случае фермионных полей определим функционал распределения вероятности следующим образом:

$$P[\Psi, \bar{\Psi}, t] = N^{-1} \int D\theta D\bar{\theta} \delta[\Psi - \Psi_\theta] \delta[\bar{\Psi} - \bar{\Psi}_\theta] * \exp\left\{-\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \bar{\theta}(x, t) K^{-1}(x, y) \theta(y, t)\right\}, \quad (4.10)$$

так что стохастические корреляционные функции могут быть записаны в виде

$$\langle F[\Psi_\theta, \bar{\Psi}_\theta] \rangle_{\theta \bar{\theta}} = \int D\Psi D\bar{\Psi} F[\Psi, \bar{\Psi}] P[\Psi, \bar{\Psi}, t]. \quad (4.11)$$

Для функционала распределения (4.10) обобщенное уравнение Фоккера-Плэнка имеет вид

$$\frac{\partial P[\Psi, \bar{\Psi}, t]}{\partial t} = \int d^d x d^d y K(x, y) \left\{ \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}(x)} \left(\frac{\delta}{\delta \Psi(y)} P[\Psi, \bar{\Psi}, t] \right) - \frac{\delta}{\delta \Psi(x)} \left(\frac{\delta S}{\delta \bar{\Psi}(y)} P[\Psi, \bar{\Psi}, t] \right) + 2 \frac{\delta^2 P[\Psi, \bar{\Psi}, t]}{\delta \Psi(x) \delta \bar{\Psi}(y)} \right\}. \quad (4.12)$$

При выводе уравнения (4.12) необходимо учитывать антикоммутирующий характер поля Ψ .

Для доказательства того, что уравнение Фоккера-Плэнка (4.12) приводит при $t \rightarrow \infty$ систему к "квантовому" равновесному состоянию, воспользуемся волновым функционалом $\Psi[\Psi, \bar{\Psi}, t]$:

$$P[\Psi, \bar{\Psi}, t] = e^{-\frac{1}{2} S[\Psi, \bar{\Psi}]} \Psi[\Psi, \bar{\Psi}, t]. \quad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в уравнение (4.12), для функционала $\Psi[\Psi, \bar{\Psi}, t]$ получим функциональное уравнение

$$\frac{\partial \Psi[\Psi, \bar{\Psi}, t]}{\partial t} = -H^{F.P.} \Psi[\Psi, \bar{\Psi}, t] \quad (4.14)$$

с гамильтонианом

$$H^{F.P.} = \int d^d x d^d y K(x, y) \left\{ \frac{1}{2} \frac{\delta S}{\delta \bar{\Psi}(x)} \frac{\delta S}{\delta \Psi(y)} - \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\Psi}(x) \delta \Psi(y)} - 2 \frac{\delta^2}{\delta \bar{\Psi}(x) \delta \Psi(y)} \right\}. \quad (4.15)$$

Для элементов $\Psi_{(1)}$ и $\Psi_{(2)}$ расширенного гильбертова пространства, определенного гамильтонианом (4.15), введем произведение

$$\langle \Psi_{(1)} | \Psi_{(2)} \rangle = \int D\Psi D\bar{\Psi} \Psi_{(1)}^*[\Psi, \bar{\Psi}] \Psi_{(2)}[\Psi, \bar{\Psi}]. \quad (4.16)$$

С помощью этого определения можно убедиться, что правильно нормирован-

ная собственная функция с нулевым значением гамильтониана (4.15) имеет вид

$$\Psi_0[\psi, \bar{\psi}] = N^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} S[\psi, \bar{\psi}]\right\}. \quad (4.17)$$

Если такая собственная функция не вырождена и является основным состоянием гамильтониана (4.15), то, разложив решение уравнения (4.14) по собственным функциям гамильтониана (4.15),

$$\Psi[\psi, \bar{\psi}, t] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Psi_n[\psi, \bar{\psi}] e^{-\lambda_n t}, \quad (4.18)$$

получаем, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi[\psi, \bar{\psi}, t] \rightarrow \Psi_0[\psi, \bar{\psi}]$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда

$$P[\psi, \bar{\psi}, t] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} N^{-1} \exp\{-S[\psi, \bar{\psi}]\}, \quad (4.19)$$

что и требовалось доказать.

На этом мы закончим рассмотрение стохастического квантования спинорных полей. Отметим только, что так же, как и в случае скалярной теории, для фермионных полей можно ввести стохастическую диаграммную технику^{/26/}.

В работах^{/26, 52/} было рассмотрено взаимодействие ферми-полей с калибровочными полями на примере безмассовой электродинамики. Соответствующие уравнения Ланжевена имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} &= \partial^2 \Psi(x, t) - ie \hat{\partial} (\hat{A} \Psi) + \Theta(x, t); \\ \frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial t} &= \partial^2 \bar{\Psi}(x, t) - ie \hat{\partial} (\hat{A} \bar{\Psi})^T + \bar{\Theta}(x, t); \\ \frac{\partial A_\mu(x, t)}{\partial t} &= \partial^2 A_\mu(x, t) - \partial_\mu (\partial A) + e \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi + \zeta_\mu(x, t). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Было показано, что однопетлевой вклад в поляризационный оператор в стохастическом подходе эквивалентен вкладу в стандартной КТП.

Таким образом, в стохастическом подходе развиты процедуры квантования как бозонных, так и фермионных полей. Это дает возможность изучать суперсимметричные теории в рамках МСК (см. ^{/60-65/}).

§ 5. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В МСК

Целью настоящего параграфа является построение производящего функционала $Z^{F.F.}[J]$ (называемого производящим функционалом Фоккера-Пленка), при помощи которого можно вычислять корреляционные функции $\langle \Phi_1(x_1, t_1) \dots \Phi_n(x_n, t_n) \rangle_J$:

$$\langle \varphi_1(x_1, t_1) \dots \varphi_n(x_n, t_n) \rangle_{\eta} = \frac{\delta^n Z^{F.P.}[J]}{\delta J(x_1, t_1) \dots \delta J(x_n, t_n)} \Big|_{J=0}, \quad (5.1)$$

где $\varphi_i(x_i, t_i)$ является решением уравнения Ланжевена (I.2) с начальным распределением $P[\varphi_0]$.

Введем в рассмотрение функционал $Z_{\eta}[J]$:

$$Z_{\eta}[J] = \int \tilde{D}\varphi \delta[\varphi(x, t) - \varphi_{\eta}(x, t)] e^{-\int_0^t dx dt' J(x, t') \varphi(x, t')} * P[\varphi_0], \quad (5.2)$$

где $\tilde{D}\varphi = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N D\varphi(x, \tau_i)$ а $\varphi(x, \tau_i)$ есть полевая конфигурация в момент времени τ_i ; $i \in (\epsilon = \frac{t}{N})$. Другими словами, интегральная мера $\tilde{D}\varphi$ является произведением стандартных интегральных мер при разных значениях времени τ_i :

$$\tilde{D}\varphi = \prod_{x, t} D\varphi(x, t). \quad (5.3)$$

Усредним функционал $Z_{\eta}[J]$ по белому шуму η :

$$Z^{F.P.}[J] = \int \tilde{D}\eta e^{-\frac{1}{4} \int_0^t dx dt' \eta^2(x, t')} Z_{\eta}[J]; \quad (5.4)$$

примем (5.4) за определение производящего функционала Фоккера-Планка.

После подстановки (5.2) в (5.4) будем иметь

$$Z^{F.P.}[J] = \int \tilde{D}\varphi \tilde{D}\eta e^{-\frac{1}{4} \int_0^t \eta^2(x, t') dx dt'} P[\varphi_0] * \delta[\varphi - \varphi_{\eta}] e^{-\int_0^t dx dt' J(x, t') \varphi(x, t')} \quad (5.5)$$

Выберем начальное распределение в виде

$$P[\varphi_0] = \delta[\varphi(x, 0) - \varphi_0(x)]. \quad (5.6)$$

С учетом замены

$$\delta(\varphi - \varphi_{\eta}) = \delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\delta S}{\delta \varphi} - \eta\right) \cdot \left\| \frac{\delta \eta}{\delta \varphi} \right\| \quad (5.7)$$

производящий функционал (5.5) принимает вид

$$Z^{F.P.}[J] = \int \tilde{D}\eta \tilde{D}\varphi \delta[\varphi(x, 0) - \varphi_0(x)] e^{-\frac{1}{4} \int_0^t dx dt' \eta^2(x, t')} * e^{\int_0^t dx dt' J(x, t') \varphi(x, t')} \delta\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\delta S}{\delta \varphi} - \eta\right] \cdot \left\| \frac{\delta \eta}{\delta \varphi} \right\|. \quad (5.8)$$

После взятия интеграла по белому шуму получаем

$$Z^{F.P.}[J] = \int \tilde{D}\varphi \exp \left\{ \int_0^t dx dt \left(-\frac{i}{4} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\delta S}{\delta \varphi} \right) + J(x,t) \varphi(x,t) \right) \right\} \left\| \frac{\delta Z}{\delta \varphi} \right\|. \quad (5.9)$$

Очевидно, функционал $Z^{F.P.}[J]$ нормирован следующим образом:

$$Z^{F.P.}[J] = \frac{Z^{F.P.}[J]}{Z^{F.P.}[0]}. \quad (5.10)$$

Величина $\left\| \frac{\delta Z}{\delta \varphi} \right\|$ представляет собой якобиан преобразования $\mathcal{L} \rightarrow \varphi$. Используя уравнение Ланжевена, $\left\| \frac{\delta Z}{\delta \varphi} \right\|$ можно представить в виде

$$\left\| \frac{\delta Z}{\delta \varphi} \right\| = \det \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(t) \delta \varphi(t')} \right) \delta(t-t') \right\}, \quad (5.11)$$

или

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\delta Z}{\delta \varphi} \right\| &= \exp \operatorname{tr} \operatorname{lg} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(t) \delta \varphi(t')} \right) \delta(t-t') = \\ &= \exp \operatorname{tr} \operatorname{lg} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\delta(t-t') + \left(\frac{\partial}{\partial t'} \right)^{-1} \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(t) \delta \varphi(t')} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где мы воспользовались формальным равенством

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t'} \right)^{-1} = \delta(t-t'). \quad (5.13)$$

Столь же формально

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} \right)^{-1} = \theta(t-t'). \quad (5.14)$$

Поэтому для якобиана (5.11) получаем выражение

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\delta Z}{\delta \varphi} \right\| &= \exp \operatorname{tr} \left\{ \operatorname{lg} \frac{\partial}{\partial t} + \operatorname{lg} \left[\delta(t-t') + \theta(t-t') \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(t) \delta \varphi(t')} \right] \right\} = \\ &= \left(\exp \operatorname{tr} \left\{ \operatorname{lg} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \right) * \exp \operatorname{tr} \left\{ \operatorname{lg} \left[\delta(t-t') + \theta(t-t') \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(t) \delta \varphi(t')} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Член $\exp \operatorname{tr} \left\{ \operatorname{lg} \frac{\partial}{\partial t} \right\}$ сокращается с аналогичным ему членом в нормировке и $\left\| \frac{\delta Z}{\delta \varphi} \right\|$ принимает вид

$$\left\| \frac{\delta Z}{\delta \varphi} \right\| = \exp \operatorname{tr} \left\{ \operatorname{lg} \left[\delta(t-t') + \theta(t-t') \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(t) \delta \varphi(t')} \right] \right\}, \quad (5.16)$$

откуда

$$\left\| \frac{\delta Z}{\delta \varphi} \right\| = \exp \frac{1}{2} \int_0^t dt' \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^2(t')}, \quad (5.17)$$

где принято, что $\theta(0) = 1/2$ /59/.

В результате производящий функционал $Z^{F.P.}[J]$

выглядит

так:

$$Z^{F.P.}[J] = \int \tilde{D}\Phi \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\delta S}{\delta \Phi} \right)^2 dx dt' \right\} * \\ * \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t dx dt' \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi^2(x,t')} + \int_0^t dx dt' J(x,t') \Phi(x,t') \right\} \quad (5.18)$$

Далее, поскольку (см. /59/)

$$-\frac{1}{2} \int_0^t dt' dx' \frac{\partial \Phi(x,t')}{\partial t'} \frac{\delta S}{\delta \Phi(x,t')} = \frac{1}{2} \int dx' \left\{ S[\Phi(x)] - S[\Phi(x,t')] \right\}, \quad (5.19)$$

то

$$Z^{F.P.}[J] = \exp \left\{ \frac{1}{2} S[\Phi_0] \right\} \int \tilde{D}\Phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} S[\Phi] - \int_0^t dx dt' \mathcal{L}^{F.P.} \right\} * \\ * \exp \left\{ \int_0^t J(x,t') \Phi(x,t') dx dt' \right\}, \quad (5.20)$$

где

$$\int_0^t dt' dx' \mathcal{L}^{F.P.} = \int_0^t dx' dt' \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t'} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\delta S}{\delta \Phi} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi^2} \right\} \quad (5.21)$$

Произведем в (5.21) изменение шкалы фиктивного времени $t \rightarrow t/2$:

$$\int_0^t dt' \mathcal{L}^{F.P.} dx' \rightarrow \int_0^{t/2} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t'} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{\delta S}{\delta \Phi} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi^2} \right\} dx' dt'. \quad (5.21')$$

Полученная формула представляет собой "евклидово" действие для гамма-милтониана Фоккера-Планка $H^{F.P.}$, введенного в § I (I.30).

Из выражения для производящего функционала (5.20) следует, что после интегрирования по белому шуму роль лагранжиана в функциональном подходе играет новый "эффективный" лагранжиан Фоккера-Планка $\mathcal{L}^{F.P.}$.

Теория возмущений, построенная с помощью производящего функционала (5.20), порождает правила Фейнмана для лагранжиана $\mathcal{L}^{F.P.}$. Эта новая теория возмущений аналогична той, которую можно резюмировать, исходя непосредственно из уравнения Ленжевена (см. § 2). Отличие состоит в том, что в функциональном подходе не нужно усреднять по белому шуму на уровне диаграммы, так как это усреднение уже было проведено на уровне производящего функционала $Z^{F.P.}$.

Нужно заметить, что количество диаграмм в обоих случаях очень большое. В рассмотренном только что функциональном подходе большое число диаграмм связано с наличием в лагранжиане дополнительных вершин,

определенных выражением $\{ + \frac{1}{8} (\delta^2 / \delta \varphi)^2 - \frac{1}{4} \delta^2 / \delta \varphi^2 \}$.

Формула (5.20) задает производящий функционал $Z^{F.P.}$, при помощи которого можно вычислить n -точечные корреляционные функции (5.1). Но, как уже было отмечено, диаграммная техника, порожденная функционалом $Z^{F.P.}[J]$, не совпадает со стохастической диаграммной техникой, описанной в § 2. Поэтому имеет смысл построить производящий функционал $Z[J]$ непосредственно для стохастических диаграмм. Рассмотрим для определенности скалярную теорию с взаимодействием $g/\lambda! \varphi^3$. Функционал действия имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \varphi(k) (k^2 + m^2) \varphi(-k) + \frac{g}{3!} \int \frac{d^D k_1 d^D k_2 d^D k_3}{(2\pi)^{3D}} * \delta(k_1 + k_2 + k_3) \varphi(k_1) \varphi(k_2) \varphi(k_3). \quad (5.22)$$

Уравнение Ланжевена представим в интегральной форме

$$\varphi(k, t) = \int_0^t ds G(k, t-s) \left\{ \eta(k, s) - \frac{g}{2!} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \varphi(p, s) \varphi(k-p, s) \right\}. \quad (5.23)$$

Его решение запишем в виде разложения по константе связи

$$\varphi_2(k, t) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \varphi_2^{(n)}(k, t) = \varphi_2^{(0)}(k, t) + \sum_{n=1}^{\infty} g^n \varphi_2^{(n)}(k, t), \quad (5.24)$$

где $\varphi_2^{(0)}(k, t)$ является решением уравнения Ланжевена со свободным действием:

$$\varphi_2^{(0)}(k, t) = \varphi^{(0)}(k) e^{-(k^2 + m^2)t} + \int_0^t G(k, t-s) \eta(k, s) ds. \quad (5.25)$$

Общее уравнение для коэффициентных функций $\varphi_2^{(n)}(k, t)$ имеет вид

$$\varphi_2^{(n)}(k, t) = - \frac{g}{2!} \int_0^t ds G(k, t-s) \sum_{i+j=n} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \varphi_2^{(i)}(p, s) \varphi_2^{(j)}(k-p, s). \quad (5.26)$$

Подставляя формальное решение (5.24) для $\varphi_2(k, t)$ в виде ряда по константе связи в производящий функционал (5.5), будем иметь

$$Z[J] = \int \tilde{D}\varphi \tilde{D}\eta \delta \left[\varphi - \sum_{n=1}^{\infty} g^n \varphi_2^{(n)} - \varphi_2^{(0)} \right] P[\varphi, \eta] * \exp \left\{ - \frac{1}{4} \int_0^t \frac{d^D k}{(2\pi)^D} ds \eta^2(k, s) + \int_0^t \frac{d^D k}{(2\pi)^D} ds J(k, s) \varphi(-k, s) \right\}. \quad (5.27)$$

Отсюда после интегрирования по $\tilde{D}\varphi$ получим

$$Z[J] = P[\varphi^{(0)}] \int \tilde{D}\eta \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_0^t \frac{d^0 k}{(2\pi)^D} ds \eta^2(k,s) \right\} * \\ * \exp \left\{ \int_0^t \frac{d^0 k}{(2\pi)^D} ds J(k,s) \left[\varphi_\eta^{(0)}(-k,s) + \sum_{n=1}^{\infty} g^n \varphi_\eta^{(n)}(-k,s) \right] \right\} \quad (5.28)$$

где для простоты считается, что $\varphi^{(0)}(k,0) = 0$. Значение $P[\varphi^{(0)}]$ можно включить в нормировку.

Введем далее понятие классического тока $f(k,t)$ для белого шума и перепишем производящий функционал (5.28) следующим образом:

$$Z[J] = \int \tilde{D}\eta \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_0^t \frac{d^0 k}{(2\pi)^D} ds \eta^2(k,s) + \int_0^t \frac{d^0 k}{(2\pi)^D} ds \eta(k,s) f(-k,s) \right\} * \\ * \exp \left\{ \int_0^t \frac{d^0 k}{(2\pi)^D} ds J(k,s) \left[\varphi_\eta^{(0)}(-k,s) + \sum_{n=1}^{\infty} g^n \varphi_\eta^{(n)}(-k,s) \right] \right\} \Big|_{\tilde{f}=0} \quad (5.29)$$

Заменяем теперь в функциях $\varphi_\eta^{(n)}(k,t)$ ($n \geq 1$) белый шум функциональной производной по его классическому току и после интегрирования по белому шуму получаем производящий функционал $Z[J]$ для стохастических диаграмм

$$Z[J] = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} g^n \int_0^{\infty} \frac{d^0 k}{(2\pi)^D} ds J(k,s) \varphi_{\frac{\delta}{\delta f}}^{(n)}(-k,s) \right\} * \\ * \exp \int_0^{\infty} \frac{d^0 k ds dt}{(2\pi)^D} \left(f(k,s) J(k,s) \begin{pmatrix} \delta(s-t) & G(k,s-t) \\ G(k,t-s) & \frac{1}{2} D(k,t,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(k,t) \\ J(k,t) \end{pmatrix} \right) \Big|_{\tilde{f}=0} \quad (5.30)$$

где $D(k,s,t)$ определяется так же, как и в § 2.

По построению видно, что производящий функционал $Z[J]$ порождает все возможные стохастические диаграммы.

Как уже было упомянуто в § 2, суммарный вклад стохастических диаграмм одинаковой топологии при $t \rightarrow \infty$ эквивалентен вкладу соответствующей диаграммы Фейнмана. Это означает,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1,t) \dots \delta J(x_n,t)} \Big|_{J=0} = \frac{\delta^n Z^{eq}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (5.31)$$

Автор глубоко признателен В.Г.Кадышевскому за помощь, оказанную при написании работы, постоянное внимание и поддержку.

Автор также выражает благодарность Дж.Р.Клаудеру и Х.Хюффелу за полезные дискуссии.

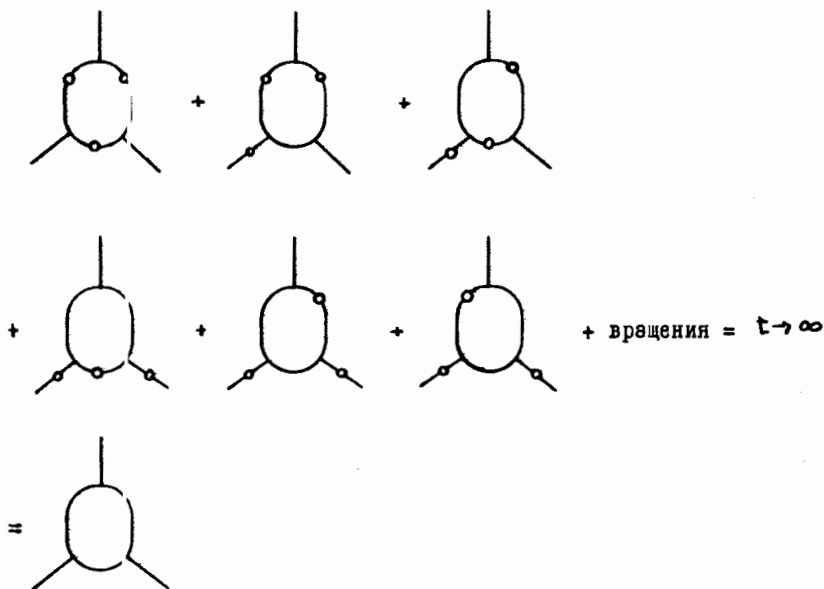


Рис. 1. Набор стохастических диаграмм, дающих при $t \rightarrow \infty$ суммарный вклад, эквивалентный вкладу соответствующей диаграммы Фейнмана.

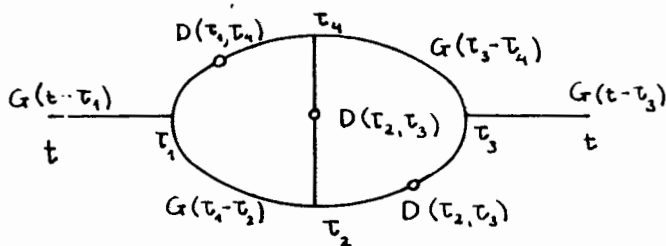


Рис. 2. Пример стохастической диаграммы. В функциях $G(k, \tau_1, \tau_2)$ время t_1 должно быть больше времени t_2 . С учетом этого факта необходимо проводить упорядочение времен при интегрировании.

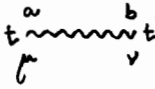
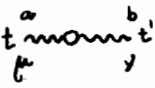
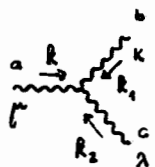
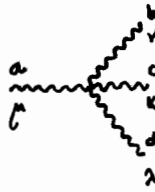
Диаграмма	Обозначение	Формула
	$\Gamma_{\mu\nu}^{ab}(k, t, t')$	$\delta^{ab} \left\{ \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) e^{-k^2 t-t' } + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\}$
	$D_{\mu\nu}^{ab}(k, t, t')$	$\delta^{ab} \left\{ \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \left(e^{-k^2 t-t' } - e^{-k^2 t+t' } \right) + 2 \min(t, t') \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\}$
	$g V_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k, k_1, k_2)$	$\left(-\frac{i}{2} \right) g f^{abc} \left[(k-k_1)_\lambda \delta_{\mu\nu} + (k_1-k_2)_\mu \delta_{\nu\lambda} + (k_2-k)_\nu \delta_{\mu\lambda} \right]$
	$g^2 W_{\mu\nu\lambda}^{abcd}$	$-\frac{1}{6} g^2 \left[f^{abe} f^{cde} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\alpha} - \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\alpha}) + f^{ace} f^{bde} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\alpha} - \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\alpha}) + f^{ade} f^{cbe} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\alpha} - \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\alpha}) \right]$

Табл. I

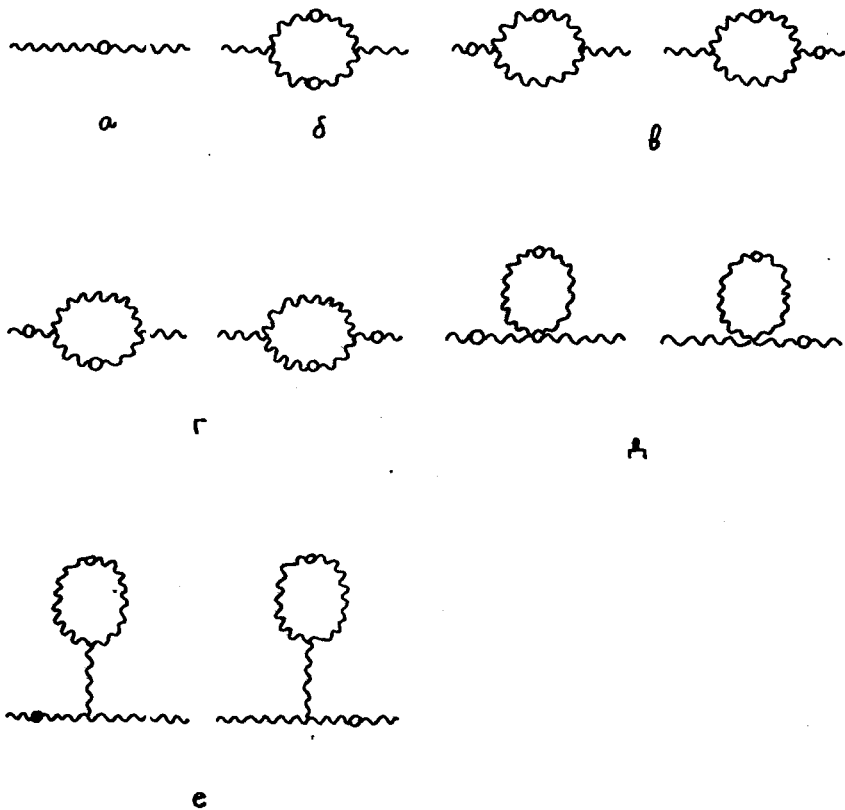


Рис. 3. Графическое представление $D_{\mu\nu}^{ab}(k, t, t')$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Glimm J. and Jaffe A. Quantum physics; Springer-Verlag, New York, 1981.
2. McKean H.P. Stochastic integrals; Academic Press, New York, 1981.
3. Конструктивная теория поля. Сб. под ред. А.Н.Колмогорова и С.П.Новикова, "Мир", М., 1977.
4. Евклидова квантовая теория поля - марковский подход. Сб. под ред. А.Н.Колмогорова и С.П.Новикова, "Мир", М., 1978.
5. Saito N. and Namiki M. Prog. Theor. Phys. 16 (1956), 71.
6. Kershaw D. Phys. Rev. 136B (1964), 1850.
7. Nelson E. Phys. Rev. 150 (1966), 1079.
8. Kracklauer A. Phys. Rev. D10 (1974), 1358.
9. Yasue K. J. Math. Phys. 19 (1978), 1892.
10. Aharony A., Imry Y. and Ma S.-K. Phys. Rev. Lett. 37 (1976), 1364.
11. Young A. J. Phys. C10, (1977), L257.
12. McClain B., Niemi A. and Taylor C. Annals of Phys. 140 (1982), 232.
13. Niemi A. and Wijewardhana L.C.R. Annals of Phys. 140 (1982), 247.
14. McClain B., Niemi A., Taylor C. and Wijewardhana L.C.R. Phys.Rev: Lett. 49, No. 4, (1982), 252.
15. McClain B., Niemi A., Taylor C. and Wijewardhana L.C.R. Nucl. Phys. B217, No. 2 (1983), 430.
16. DeAlfaro V., Fubini S. and Furlan G. Il Nuovo Cimento 74A, No. 4, (1983), 365.
17. Parisi G. and Wu Yong-Shi Scientica Sinica 24 (1981), 483.
18. Zwanziger D. Nucl. Phys. B192 (1981), 259.
19. Zwanziger D. Phys. Lett. 114B No. 5, (1981), 337.
20. Gribov V.N. Nucl. Phys. B139 (1978), 1.
21. Horibe M., Hosoya A. and Sakamoto J. Preprint OU-HET 54 (1983).
22. Faddeev L. and Popov V. Phys. Lett. 25B (1967), 29.
23. Baulieu L. and Zwanziger D. Nucl. Phys. B193 (1981), 163.
24. Namiki M., Ohba I., Okano K. and Yamanaka Y. Progr. of Theor. Phys. 69 (1983) No. 5, 1580.
25. Nakagoshi H., Namiki M., Ohba I. and Okano K. Progr. Theor. Phys. 70, No. 1, (1983), 326.
26. Breit J.D., Gupta S. and Zaks A. Preprint Princeton, March 1983.
27. Sakita B. Preprint CCONY-HEP-83/4.
28. Floratos E. and Iliopoulos J. Nucl. Phys. B214 (1983), 392.
29. Klauder J.R. Schladming Lectures 1983.
30. Nakano Y. Preprint the University of Alberta (1983).
31. Nakazato H., Namiki M. and Ohba I. Preprint WU-HEP-83-...

32. Namiki M. and Yamanaka Y. Prog. Theor. Phys. 69 No. 6 (1983), 1764.
33. Kakado Y. Taguchi Y., Tanaka A. and Yamamoto K. Prog. Theor. Phys. 69 No. 6, (1983), 1225.
34. Klauder J.R. and Ezawa H. Prog. Theor. Phys. 69, No 2 (1983), 664.
35. Arunabha Guha and Lee S.C. Phys. Rev: D27 No. 10, (1983), 2412.
36. Arunabha Guha and Lee S.C. Preprint IFP-SB-83-33.
37. Zwanziger D. Phys. Rev. Lett. 50 (1983), 1886.
38. Marchesini G. Nucl. Phys. B191 (1981), 214.
39. Amundsen P.A. and Damgaard P.H. Preprint Nordita 83/6.
40. Alfaro J. and Sakita B. Phys. Lett. 121B (1983), 339.
41. Aldazabal G., Dagotto E., Gonzalez-Arroyo A. and Parga N. Phys. Lett. B125, No. 4 (1983), 305.
42. Alfaro J. Preprint CCNY-HEP-83/6.
43. Alfaro J. and Sakita B. Preprint CCNY-HEP-82/16.
44. Parisi G. Nucl. Phys. B205 (1982) FS5, 337.
45. Parisi G. Nucl. Phys. B180 (1981) FS3, 378.
46. Parisi G. Phys. Lett. 112B (1982), 463.
47. Klauder J.R. Preprint Bell Lab. 1983 - A Langevin Approach to fermion and quantum spin correlation functions.
48. Klauder J.R. Preprint Bell Lab. 1983 - Coherent-state Langevin equation for canonical quantum systems with applications to quantum Hall effect.
49. Grimus W. and Hüffel H. Z. Phys. C18 (1983), 129.
50. Gozzi E. Preprint CCNY-HEP-83/4.
51. Fukai T., Nakazato H., Ohba I., Okano K. and Yamanaka Y. Prog. Theor. Phys. 69, No: 5 (1983), 1600.
52. Damgaard P.H. and Tsokos K. Preprint MD-TP-218 (1983).
53. Fucito F. and Marinari E. Nucl. Phys. B190 (1981).
54. Fucito F., Marinari E., Parisi G. and Rebi C. Nucl. Phys. B180 (1981), FS2, 369.
55. Ishikawa K. Preprint CUNY, New York, 1983.
56. Ezawa Z.P. and Iwazaki A. Preprint Sendai, Tohoku Univ., oct. 1983.
57. Langevin P. Comptes Rendus 146 (1906), 567.
58. Бэлеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика, т. 2, "Мир", Москва, 1978.
59. Schulman L.S. Techniques and applications of path integration, John Wiley, 1981.
60. Damgaard P.H. and Tsokos K. Preprint MD-TP-219 (1983).

61. Parisi G. and Sourlas N. Phys. Rev. Lett. 43 (1979), 744.
62. Parisi G. and Sourlas N. Nucl. Phys. B206 (1982), 321.
63. Ishikawa K. Preprint Dept. of Phys., City College, CU-NY, New York, 1983.
64. Cecotti S. and Girardello L. Preprint REF. TH. 3491 - CERN, 1983.
65. Cecotti S. and Girardello L. Phys. Lett. 110B (1982), 39.
66. Coleman S. The Uses of Instantons, Lectures at the 1977 Int'l School of Subnuclear Physics, Ettore Majorana.
67. Wax N. (ed.) Selected papers on noise and Stochastic processes, Douer, New York, 1954.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июня 1984 года.