

5742



**ЛЕКЦИИ
ДЛЯ МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ**

Н.Н.Боголюбов (мл.), А.С.Шумовский

СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ

ДУБНА

ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Выпуск 38

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Д.В.Ширков — председатель
А.Н.Сисакян — зам. председателя
А.Т.Филиппов — зам. председателя
Г.М.Гавриленко
В.Б.Беллев
В.П.Гердт
Е.П.Жидков
В.А.Загребнов
Г.В.Мицельмахер
В.А.Никитин
Л.М.Сороко
В.Р.Саранцева



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

P17-87-176

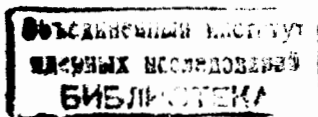
Н.Н.Боголюбов (мл.), А.С.Шумовский

C 325
B 742

123119

СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ

Дубна 1987



ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема сверхизлучения, обсуждению которой посвящена настоящая книга, имеет тридцатилетнюю историю и, тем не менее, относится к числу весьма важных и актуальных научных проблем. Обусловлено это целым рядом причин. Прежде всего нужно отметить важность этого физического явления с точки зрения разработки методов генерации когерентного электромагнитного излучения различных диапазонов. Далее, математическая формулировка задачи о сверхизлучении обладает известной общностью и может быть использована для описания весьма широкого круга явлений в конденсированных средах, ядерных системах и физике элементарных частиц. Равновесное решение модельной задачи теории сверхизлучения является нетривиальным примером строгого описания фазового перехода и представляет большой интерес с точки зрения разработки этого исключительно важного раздела современной физики. Наконец, описание динамического упорядочения в системе "поле-материя", представляющего собой когерентный импульс - по сути дела солитон, тесно связано с теорией стохастических процессов и имеет большое значение для понимания процессов самоорганизации в динамических системах.

Настоящая книга представляет собой изложение курса лекций, прочитанного авторами в конце 1985 - начале 1986 года в ОИЯИ. В ней изложены основные физические представления, связанные с проблемой сверхизлучения, сформулированы модельные задачи, дан обзор результатов по исследованию равновесных решений, приведено регулярное изложение динамической теории. В значительной степени книга основана на оригинальных результатах авторов, предложивших ряд новых модельных задач в теории сверхизлучения и развивших методы исследования равновесных и динамических характеристик сверхизлучательных систем.

Отличительной чертой настоящего курса лекций является удачное сочетание обсуждения физического содержания теории и строгого математического анализа соответствующих модельных проблем. Свободный и живой стиль изложения делает эту книгу доступной для широкого круга читателей - теоретиков и экспериментаторов, интересующихся как проблемой сверхизлучения, так и общими вопросами теории динамических систем.



Академик Н.Н. Боголюбов

ВВЕДЕНИЕ

"Настоящая книга предлагается читателю в качестве произведения, каждый эпизод которого содержит что-нибудь поучительное; ее выводы могут послужить читателю назиданием, если он пожелает воспользоваться ими".

Даниэль Дефо "Моль Флендерс"

Сверхизлучение относится к тем явлениям, теоретическое предсказание которых на многие годы опередило экспериментальное наблюдение.

В 1954 г. Дикке опубликовал работу^{/1/}, посвященную обсуждению вопроса о направленности спонтанного когерентного электромагнитного излучения в среде. Среда моделировалась N диполями с моментом \vec{d} , причем предполагалось, что линейные размеры системы диполей малы по сравнению с длиной волны излучения λ . Дикке привел доводы в пользу того, что за счет взаимодействия через общее поле излучения в такой системе может возникнуть коллективное состояние, характеризуемое дипольным моментом $\vec{R} = N\vec{d}$. Иначе говоря, в таком состоянии система ведет себя как один "большой" диполь.

Согласно Дикке^{/1/} матричные элементы перехода в дипольной системе с изменением на единицу квантового числа M , определяющего полуразность населенностей верхнего и нижнего уровней, имеют вид

$$\langle R, M | R^{\pm} | R, M \mp 1 \rangle = \{(R \pm M)(R \mp M + 1)\}^{1/2}, \quad -R \leq M \leq R, \quad R = N/2.$$

Интенсивность излучения, определяемая квадратом модуля такого матричного элемента, есть

$$I = I_0 (R+M)(R-M+1), \quad (B.1)$$

где I_0 - интенсивность излучения одного диполя. Как нетрудно видеть, при переходе из полностью инвертированного начального состояния в де-возбужденное состояние дипольной системы в определенный момент времени населенности верхнего и нижнего уровней сравниваются. При этом $M=0$ и интенсивность I достигает максимального значения, пропорционального в силу (B.1) квадрату числа диполей:

$$I_{\max} \sim I_0 N^2.$$

Такое anomальное поведение интенсивности свидетельствует с когерентном характере процесса^{/1/}: спонтанное излучение с интенсивностью, пропорциональной N^2 , получило название сверхизлучение. Характерное поведение средней полуразности населенностей (сплошная линия) и интенсивности (пунктир) приведено на рис. 1.

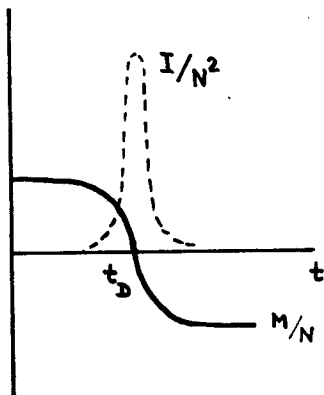


Рис. 1

Через шесть лет после опубликования работы Дикке^{/1/} появился "обычный" лазер с резонатором Фабри-Перо, обеспечивающим необходимую для генерации обратную связь, спустя еще четыре года (через 10 лет после первой работы) Дикке^{/2/} была выдвинута идея об использовании сверхизлучения для создания квантовых генераторов когерентного электромагнитного излучения по безрезонаторной схеме.

В "обычном" лазере рабочая среда помещается в резонатор. Если в такой системе рождается фотон с частотой, соответствующей резонатору, то он, отражаясь от зеркал, сам воздействует на среду, выывая новые акты рождения фотонов той же частоты, поляризации, с той же фазой. Как только мощность вынужденного излучения превысит мощность потерь (порог генерации), в системе возникнут незатухающие колебания^{/3/}.

Совершенно иной принцип работы у сверхизлучательного генератора. В простейшем варианте начальное состояние можно приготовить по трех-

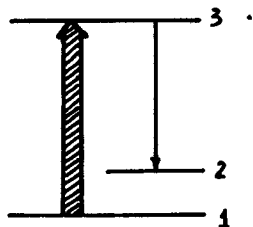


Рис. 2

уровневой схеме (рис. 2). С помощью лазерной накачки на переходе $1 \leftrightarrow 3$ создается заселенность верхнего уровня. Спонтанный распад возбужденного состояния на переходе $2 \leftrightarrow 3$ (переход $1 \leftrightarrow 2$ дипольно запрещен) порождает излучение, а обмен фотонами между диполями ведет к установлению диполь-дипольных корреляций и сверхизлучательному импульсу (рис. 1). Такие корреляции имеют прямую аналогию со спиновыми корре-

лящими в ферромагнетиках^{/4/}. Процесс генерации в таком лазере не связан с наличием резонатора. Когерентность здесь возникает за счет не многократного прохождения фотонами рабочего вещества, а на одном проходе в результате взаимодействия излучателей через общее поле излучения.

Для обычного спонтанного распада возбужденного состояния характерным параметром является время τ , определяемое радиационной шириной возбужденного уровня. Процесс сверхизлучения идет за время порядка τ/N , т.е. значительно быстрее. Однако для реализации сверхизлучательной генерации необходимо, чтобы время излучения $\tau' \approx \tau/N$ и связанное с ним время задержки импульса t_d (см. рис. 1) были меньше времени дипольной безизлучательной релаксации^{/2/}. Это обстоятельство было главной трудностью в экспериментах по сверхизлучению.

Лишь в 1973 г. (почти через 20 лет после предсказания) сверхизлучение было получено на переходах между вращательными состояниями молекул HF^{/5/}. В следующее десятилетие в основном благодаря созданию импульсных лазеров на красителях, способных создавать начальное инвертированное состояние системы за весьма короткие промежутки времени, удалось экспериментально получить сверхизлучение в оптическом^{/6/}, ближнем инфракрасном^{/7-16/}, дальнем инфракрасном^{/5,17/} и миллиметровом^{/18-20/} диапазонах (см. также обзор^{/21/}).

Надо подчеркнуть, что возможность получения когерентного электромагнитного излучения в безрезонаторных системах возбудила особый интерес в связи с проблемой создания лазеров для диапазонов, в которых стандартные схемы неосуществимы из-за отсутствия зеркал (рентген, гамма-излучение). Значительный вклад в разработку этой проблемы внесли работы Хохлова и его учеников^{/22/} (см. обзоры^{/23,24/}).

Теоретическое исследование явления сверхизлучения и связанных с ним модельных задач шло в двух направлениях. С одной стороны, изучались равновесные свойства таких модельных задач и описываемый ими фазовый переход. Повышенный интерес к термодинамике модели Дикке и ее обобщений был вызван, в первую очередь, проводившимися в литературе аналогиями между упомянутым фазовым переходом и порогом генерации (см., например,^{/4/}). Нужно отметить условный характер таких аналогий; фазовый переход совершается при изменении температуры и не зависит от времени, тогда как процесс излучения является динамическим и заведомо неравновесным. Вместе с тем модель Дикке оказалась точно решаемой (в термодинамическом смысле), что определяет ее значение для теории фазовых переходов, основанной на статистической механике. Начиная с 1973 г. ее равновесные характеристики подробно исследовались самыми различными методами, включая метод когерентных состояний^{/25/}, метод аппроксимирующего гамильтониана^{/26/} и метод континуального интеграла^{/27/}.

С другой стороны, активно исследовалась динамика сверхизлучательных систем. Здесь прежде всего нужно упомянуть работы, основывавшиеся на использовании кинетических уравнений марковского типа (см., например, /28-31/ и монографию /32/). Важную группу составляют работы, в которых на основе численных решений изучается эффект распространения сверхизлучательного импульса /33,34/. Весьма перспективным представляется применение к динамической задаче теории сверхизлучения метода континуального интеграла /35,27/.

В силу принципа иерархии времен Боголюбова /36/ в задаче о сверхизлучении можно выделить "быстрый процесс" излучения и медленный процесс релаксации излучателей в поле. В результате мы получаем задачу о динамике "малой" подсистемы излучателей, взаимодействующей с полем излучения, играющим роль термостата /37/. Такая постановка проблемы традиционна для теории стохастических процессов в динамических системах. Поэтому применение развитых в этой области физики методов оказывается весьма плодотворным при исследовании проблемы сверхизлучения. Укажем в этой связи, что использование метода исключения бозонных переменных для "малой" системы, взаимодействующей с бозонным термостатом /38/, позволило получить точную иерархию кинетических уравнений для сверхизлучательной системы /37,39,26/.

Настоящий курс лекций посвящен изложению принципов современной теории сверхизлучательных систем. Здесь рассматривается вывод основной модельной задачи теории сверхизлучения - так называемой модели Дикке, а также ряда ее обобщений. Учитывая большое число работ по равновесным свойствам сверхизлучательных модельных систем, мы здесь ограничиваемся лишь кратким обзором основных результатов в этой области. Главное внимание уделяется последовательному изложению метода иерархии кинетических уравнений, развитием которого в применении к проблеме сверхизлучения мы занимались вместе с Фам Ле Киеном с 1981 г. Многие из приведенных в настоящих лекциях результатов получены в процессе совместной с ним работы.

Большинство идей и методов, используемых в настоящих лекциях, было введено в статистическую механику Н.Н.Боголюбовым, которому авторы, пользуясь случаем, выражают глубокую признательность за постоянное внимание к работе, поддержку и стимулирующие обсуждения.

"Он составил оба ящика, скрепил их болтами. Трубку направил отверстием к каминной решетке, у двенадцатиградного кожуха откинул сферическую крышку..."

Это - модель, - сказал он, вынимая из второго чемодана ящик с пирамидами..."

А.Н.Толстой "Гиперболюид инженера Гарина"

Гамильтониан нерелятивистской частицы с массой m и зарядом e , находящейся в поле с потенциалом U и взаимодействующей с электромагнитным полем, имеет вид

$$H(x) = \frac{1}{2m} \left\{ \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(x) \right\}^2 + U(x) + H_F, \quad (1.1)$$

где $A(x)$ - чисто поперечный векторный потенциал и H_F - энергия свободного электромагнитного поля. Как обычно, опустим слагаемое

$$\frac{e^2}{2\pi c^3} A^2(x), \quad (1.2)$$

вклад которого мал, т.е. ограничимся принятым в электродинамике первым приближением^{/40/}. Рассмотрим оператор

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + U(x),$$

описывающий свободный (не взаимодействующий с электромагнитным полем) излучатель. Пусть

$$H_0 |i\rangle = E_i |i\rangle.$$

Ограничимся рассмотрением лишь двумерного пространства состояний излучателя с базисными векторами $|+\rangle$ и $|-\rangle$ (представление "двухуровневого атома"^{/32/}). Использование такого представления в задаче о сверхизлучении безусловно оправдано; из всех уровней реального излучателя мы выбираем только ту пару уровней (рис. 3), которая соответствует рабочему переходу в сверхизлучательной системе (см. рис. 2). В этом ба-

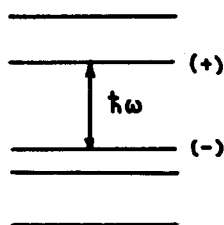


Рис. 3

$$\begin{aligned} \text{зисе } \langle \pm | H_0 | \pm \rangle &= E_{\pm}, \\ \langle \pm | H_0 | \mp \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Ясно, что такая запись эквивалентна представлению оператора свободного излучателя с помощью матрицы Паули σ^z :

$$H_0 = \frac{E_+ + E_-}{2} + \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma^z, \quad \hbar \omega = E_+ - E_- \quad (1.3)$$

Для поля перейдем к представлению вторичного квантования, в котором

$$H_F = \sum_k \hbar \omega_k (a_k^\dagger a_k + 1/2), \quad (1.4)$$

$$\vec{A}(x) = \sum_k \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{\omega_k V}} \vec{e}_k (a_k^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{x}} + a_k e^{i\vec{k}\vec{x}}).$$

Здесь V - объем кубического ящика, в котором квантуется поле, индекс K нумерует как волновой вектор соответствующей моды, так и ее поляризацию, \vec{e}_k - единичный вектор поляризации и a^\dagger, a - операторы рождения и уничтожения фотона, удовлетворяющие обычным перестановочным соотношениям:

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$$

При переходе к представлению двухуровневого атома необходимо вычислить матричные элементы

$$\langle \pm | H_{int} | \mp \rangle = -\frac{e}{m} \langle \pm | \vec{p} \vec{A} | \mp \rangle,$$

задающие вероятности перехода между уровнями (+) и (-) с испусканием и поглощением фотонов. Иначе говоря, необходимо вычислить

$$\langle \pm | \vec{p} e^{i\vec{k}\vec{x}} | \mp \rangle \vec{e}_k, \quad \langle \pm | \vec{p} e^{-i\vec{k}\vec{x}} | \mp \rangle \vec{e}_k. \quad (1.5)$$

Волновые функции излучателя отличны от нуля только в области порядка размера самого излучателя^{/40/}. Другими словами, при интегрировании в (1.5) нужно учитывать вклады только при $x \ll a$, где a - радиус излучателя (например, $a \sim 1 \text{ \AA}$ для атома и $a \sim 10^{-4} \text{ \AA}$ для атомного ядра). Если длина волны излучения λ много больше a :

$$ka = \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1, \quad (1.6)$$

то при интегрировании в (1.5) экспоненциальные факторы можно считать приближенно равными единице (длинноволновое приближение). Заметим далее, что

$$\vec{p} = \frac{im}{\hbar} [H_0, \vec{x}],$$

откуда

$$\langle \pm | \vec{p} | \mp \rangle = \frac{im}{\hbar} (E_+ - E_-) \langle \pm | \vec{x} | \mp \rangle = \frac{im}{\hbar} \langle \pm | \hat{d} | \mp \rangle \omega.$$

Здесь $\hat{d} \equiv e \vec{x}$ - оператор дипольного момента рассматриваемого перехода. Так как

$$\langle \pm | \hat{d} | \pm \rangle = 0, \quad \langle \pm | \hat{d} | \mp \rangle = i \hat{d},$$

для представления оператора дипольного момента также можно воспользоваться матрицей Паули:

$$\hat{d} = d \sigma^x.$$

Пусть рассматриваемая система состоит из N идентичных излучателей, положение которых нумеруется индексом f . Теперь гамильтониан такой системы, полученный из (1.1) в представлении двухуровневого атома, имеет вид

$$H = \frac{E_+ + E_-}{2} N + \frac{1}{2} \hbar \omega \sum_{f=1}^N \sigma_f^z + \sum_k \sum_{f=1}^N g_k \sigma_f^x (a_k^+ e^{-i k x_f} + a_k e^{i k x_f}) + \sum \hbar \omega_k (a_k^+ a_k + 1/2), \quad (1.7)$$

$$g_k = \sqrt{\frac{2\pi \hbar}{\omega_k V}} e^{\vec{e}_k} \hat{d} \omega.$$

Введем паулиевские амплитуды σ_f^{\pm} , описывающие "рождение" излучателя в верхнем и нижнем состояниях:

$$\sigma_f^{\pm} | \pm \rangle_f = 0, \quad \sigma_f^{\pm} | \mp \rangle_f = | \pm \rangle_f,$$

где

$$\sigma_f^{\pm} = (\sigma_f^x \pm i \sigma_f^y) / 2.$$

Теперь, опуская C -числовые слагаемые, из (1.7) имеем

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega \sum_{f=1}^N \sigma_f^z + \sum_k \sum_f g_k (\sigma_f^+ + \sigma_f^-) (a_k^+ e^{-i k x_f} + a_k e^{i k x_f}) + \sum_k \hbar \omega_k a_k^+ a_k. \quad (1.8)$$

Если в (1.8) пренебречь взаимодействием излучателей с полем, то из уравнений Гейзенберга нетрудно получить

$$a_k(t) = a_k(0)e^{-i\omega_k t}, \quad a_k^+(t) = a_k^+(0)e^{i\omega_k t}, \quad \sigma_f^+(t) = \sigma_f^+(0)e^{+i\omega_f t}.$$

Таким образом, в гамильтониане (1.8) имеются "быстро осциллирующие члены" типа $\sigma^+ a$, σa и "медленные члены" типа σa , $\sigma^+ a$. Эти последние будут давать основной вклад в энергию взаимодействия; такие резонансные члены можно интерпретировать как описывающие поглощение фотона и переход на верхний уровень ($\sigma^+ a$) и испускание фотона при переходе на нижний уровень. Опуская в (1.8) быстро осциллирующие слагаемые, получаем так называемый модельный гамильтониан Дикке в приближении вращающейся волны (ПВВ)^{/32/}:

$$H = \sum_k \hbar \omega_k a_k^+ a_k + \frac{1}{2} \hbar \omega \sum_f \sigma_f^z + \sum_k \sum_f g_{kf} (\sigma_f^+ a_k e^{i\vec{k}\vec{x}_f} + \sigma_f^- a_k^+ e^{-i\vec{k}\vec{x}_f}). \quad (1.9)$$

Гамильтониан (1.9) и различные его обобщения служат основным объектом теоретических исследований в связи с проблемой сверхизлучения.

Отметим, что переход от (1.1) к гамильтониану типа (1.9) может быть осуществлен в длинноволновом приближении (1.6) и другим путем (см., например,^{/27/}). Именно в уравнении Шредингера ($\hbar \Rightarrow 1$)

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi$$

с гамильтонианом (1.1) можно произвести преобразование волновой функции

$$\Psi(\vec{x}, t) = \tilde{\Psi}(\vec{x}, t) e^{i\omega \vec{x} \vec{A}},$$

исключающее зависящие от \vec{A} слагаемые^{/41/}:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m} p^2 - e \vec{x} \vec{E} + U(\vec{x}) \right\} \Psi, \quad \vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.10)$$

Здесь взаимодействие с полем также имеет характер дипольного взаимодействия.

Перейдем теперь к обсуждению некоторых обобщений модели Дикке (1.9). Заметим прежде всего, что в задачах теории сверхизлучения обычно используют так называемые атомные операторы:

$$R_+ = \frac{1}{2} \sigma^+, \quad R^- = \sigma^-.$$

Вводя вектор \vec{n}

$$\mathcal{V}_i = \frac{2\pi n_i}{V^{3/2}}, \quad n_i = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2, 3,$$

определяющие моды в рабочем объеме системы, можно определить коллективные операторы излучателей^{/30/}:

$$R_{\vec{r}}^{\pm} = \sum_f R_{f\vec{r}}^{\pm} e^{\pm i\vec{r}\vec{x}_f}, \quad R_{\vec{r}\vec{r}_3} = \sum_f R_{f\vec{r}_3} e^{i\vec{r}\vec{x}_f}, \quad (1.11)$$

удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[R_{\vec{r}}^+, R_{\vec{r}'}^-] = 2R_{\vec{r}-\vec{r}'}, \quad [R_{\vec{r}\vec{r}_3}, R_{\vec{r}'}^{\pm}] = \pm R_{\vec{r}\vec{r}_3\vec{r}'}$$

В этих новых переменных гамильтониан Дикке (1.9) принимает вид

$$H = \sum_k \hbar \omega_k a_k^{\dagger} a_k + \hbar \omega R_3 + \sum_{k,\vec{r}} g_{k\vec{r}} \{ R_{\vec{r}}^+ a_k \Psi(\vec{k}-\vec{r}) + R_{\vec{r}}^- a_k^{\dagger} \Psi^*(\vec{k}-\vec{r}) \}. \quad (1.12)$$

Здесь $R_3 = \sum_f R_{f3}$ и так называемая дифракционная функция $\Psi(\cdot)$ определяется соотношением

$$\Psi(\vec{x}) = N^{-1} \sum_f e^{i\vec{x}\vec{x}_f}, \quad \Psi^*(\vec{x}) = \Psi(-\vec{x}).$$

В случае кубического рабочего объема и системы излучателей, образующих простую кубическую решетку с постоянной a ,

$$\Psi(\vec{x}) = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin(x_i V^{1/2})}{\sqrt{N} \sin(x_i a/2)}.$$

В длинноволновом пределе ($\lambda \gg a$)

$$\Psi(\vec{x}) = \prod_{i=1}^3 \frac{2 \sin(x_i V^{1/2})}{x_i V^{1/2}}.$$

Использование представления коллективных операторов излучателей (1.10) оказывается особенно удобным при учете геометрии рабочего тела в задачах теории сверхизлучения.

Другим важным представлением, используемым в связи с моделью Дикке, является осцилляторное представление атомных переменных^{/42,27/}:

$$2R_3 = \alpha^{\dagger} \alpha - \beta^{\dagger} \beta, \quad R^+ = \alpha^{\dagger} \beta, \quad R^- = \beta^{\dagger} \alpha, \quad (1.13)$$

где операторы "двух сортов"

$$[\alpha, \beta] = 0$$

могут удовлетворять бозевским или фермиевским перестановочным соотношениям:

$$\alpha \alpha^{\dagger} - \mu \alpha^{\dagger} \alpha = \beta \beta^{\dagger} - \mu \beta^{\dagger} \beta = 1; \quad \mu = \begin{cases} +1, & \text{Бозе,} \\ -1, & \text{Ферми.} \end{cases}$$

В таком представлении каждому из уровней рассматриваемой двухуровневой системы сопоставляется "свой" осциллятор. Как нетрудно убедиться, операторные конструкции (1.13) удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и атомные переменные R . Иначе говоря, использование представления (1.13) не меняет динамических свойств рассматриваемой модельной задачи. Использование такого представления оказывается весьма удобным при исследовании проблемы сверхизлучения с помощью метода континуального интеграла^{/27/}. Нужно отметить, что введение осцилляторного представления (1.13) имеет прямую аналогию с задачами теории магнетизма^{/43/} и сверхпроводимости^{/44, 45/}.

До сих пор мы считали, что все излучатели в системе имеют одну и ту же рабочую частоту ω . Простейшее обобщение модели Дикке связано с рассмотрением некоторого набора собственных частот; такой ситуации соответствует гамильтониан

$$H = \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_j \hbar \Omega_j R_{jz} + \sum_{k,j} g_{kj} (R_{j+}^\dagger a_k e^{i\lambda_{kj}} + R_{j-}^\dagger a_k^\dagger e^{-i\lambda_{kj}}). \quad (1.14)$$

В ряде важных физических случаев распределение собственных частот излучателей симметрично относительно некоторой частоты Ω , причем функция распределения по частотам $\mathcal{N}(\omega)$ выбирается в виде:

$$\mathcal{N}(\omega) = \frac{\delta \Omega}{2\pi \{\omega^2 + (\frac{\delta \Omega}{2})^2\}},$$

соответствующем так называемому неоднородному лоренцеву уширению^{/32/}. Здесь $\delta \Omega$ - ширина распределения. В этом случае усреднение по собственным частотам излучателей дает

$$N^{-1} \sum_j e^{i\Omega_j t} = e^{i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \mathcal{N}(\omega) d\omega = e^{i\Omega t} e^{-t/2T}, \quad (1.15)$$

где $T = (\delta \Omega)^{-1}$ - так называемое неоднородное время жизни осциллятора.

Другое простое обобщение модели Дикке связано с рассмотрением системы, состоящей из нескольких компонент рабочего вещества^{/46, 47/}. Гамильтониан такой системы имеет вид

$$H = \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^M \{ \hbar \Omega_{jm} R_{jmz} + g_{jm} (R_{jm+}^\dagger a_k e^{i\lambda_{jm}} + R_{jm-}^\dagger a_k^\dagger e^{-i\lambda_{jm}}) \}, \quad (1.16)$$

где n - число рабочих компонент.

В ряде задач нелинейной оптики большой интерес представляет рассмотрение многофотонных резонансных процессов в двухуровневых системах^{/48/}. Для m -фотонного резонанса оператор взаимодействия поля с

двухуровневым излучателем имеет вид^{/49-52/}:

$$g \sum_f \{ R_{i, \omega_f}^+ \bar{a}_i + R_{i, \omega_f}^- \bar{a}_i \}. \quad (1.17)$$

Ясно, что приближение двухуровневого атома является весьма упрощенным и далеко не всегда применимо. В ряде случаев необходимо учитывать переходы в n -уровневых системах; сверхизлучательные импульсы, генерируемые на разных переходах в многоуровневой системе, могут конкурировать друг с другом^{/53, 54/}. Состояния системы с n неэквивалентными уровнями могут быть описаны с помощью представлений группы $SU(m)$ ^{/55/} (см. также^{/56-60/}). Соответствующий гамильтониан имеет ту же структуру, что и модель Дикке (1.9):

$$H = \sum_k \hbar \omega_k a_k^+ a_k + \sum_f \hbar \Omega_{jf} R_{jj}(f) + \sum_{k_j} \sum_{i_j} g_{kj} \{ R_{ij}(f) a_k + R_{ji}(f) a_k^+ \}. \quad (1.18)$$

Здесь $R_{jj} = |j\rangle\langle j|$ - оператор населенности j -го уровня, а $R_{ij} = |i\rangle\langle j|$ - оператор перехода с уровня j на уровень i , $\hbar \Omega_{jf}$ - энергия j -го уровня в f -м атоме. Выполняются следующие важные соотношения:

$$\begin{cases} R_{ij} R_{ke} = R_{ie} \delta_{kj}, \\ \langle l | j \rangle = \delta_{lj}, \\ \sum_j |j\rangle\langle j| = 1. \end{cases} \quad (1.19)$$

Одно из обобщений модели Дикке связано с введением в гамильтониан (1.9) дополнительных членов, описывающих классические поля^{/61/}:

$$H_{cl} = \sum_f \{ \sqrt{N_f} R_f^+ + \sqrt{N_f} R_f^- \}, \quad (1.20)$$

и внешние источники:

$$H_{ex} = \hbar \sqrt{N} a^+ + \hbar \sqrt{N} a. \quad (1.21)$$

Здесь \sqrt{N} и \hbar - комплексные параметры.

Другое обобщение связано с учетом помимо взаимодействия диполей с полем излучения также прямого взаимодействия между диполями^{/62-64/}. В этом случае гамильтониан Дикке (1.9) должен быть дополнен членом

$$H_{dd} = \sum_{f, f'} \Phi(|\vec{x}_f - \vec{x}_{f'}|) \hat{d}_f \hat{d}_{f'}. \quad (1.22)$$

При решении динамической задачи в этом члене можно ограничиться только медленными слагаемыми, т.е. вместо (1.22) рассматривать оператор

$$H_{\text{уд}} = \sum_{f, f'} \Phi(|\vec{x}_f - \vec{x}_{f'}|) R_f^- R_{f'}^+ \quad (1.23)$$

Учет такого взаимодействия играет важную роль в ряде физических задач, например, при исследовании сверхизлучения в полярных диэлектриках /65-67/.

Как указывалось во введении, одним из способов создания сверхизлучающего состояния является когерентная накачка верхнего уровня в трехуровневой системе (рис. 2). В общем случае когерентная накачка на переходе $i \rightarrow j$ может быть явным образом включена в гамильтониан с помощью оператора /68/

$$H_{\text{нап}} = \frac{1}{2} \hbar \omega_R(t) \sum_f \left\{ e^{-i(\omega_R t - \vec{k} \cdot \vec{x}_f)} R_{ij}(f) + e^{i(\omega_R t - \vec{k} \cdot \vec{x}_f)} R_{ji}(f) \right\} \quad (1.24)$$

Здесь $\omega_R(t)$ - частота Раби для когерентной накачки с частотой ω_{ij} и волновым вектором \vec{k} . Учет процессов накачки важен при описании сверхизлучательного импульса /69,70/.

При рассмотрении сверхизлучения в системах с кристаллическим рабочим телом большое значение имеет адекватный учет тепловых колебаний излучателей в решетке. Существует два механизма передачи импульса между фотоном и решеткой. Первый из них связан с так называемыми упругими процессами, при которых импульс, передаваемый фотоном излучателю, передается кристаллу как целому (т.е. фононы не испускаются и не поглощаются). Вклад таких процессов определяется фактором Дебая-Уоллера

e^{-2W} , где W - известная функция температуры и параметров кристалла /71/ (см. также /72/). Учет таких процессов в модели Дикке может быть проведен с помощью перенормировки параметра диполь-фотонной связи /73/:

$$g_k \rightarrow \tilde{g}_k = g_k e^{-2W} \quad (1.25)$$

Иначе производится учет неупругих механизмов рассеяния фотонов на фононах. Как это обычно делается в теории твердого тела (см., например, /71/), представим положение f -го излучателя в кристалле как сумму положения узла и смещения:

$$\vec{x}_f = \vec{f} + \vec{u}_f$$

Смещение \vec{u}_f стандартным образом представим с помощью операторов рождения и уничтожения фононов:

$$\vec{u}_f = \sum_q \sqrt{\frac{\hbar}{2MN\omega_q}} \vec{e}_q (b_q + b_q^\dagger)$$

Здесь \vec{e}_q - единичный вектор поляризации q -го фонона и индекс q

нумерует как квазиимпульс, так и моду, M - масса излучателя, ω_q - частота фононов и b_q, b_q^\dagger - фононные операторы. Далее можно воспользоваться записью взаимодействия поля с излучателем вида

$$\vec{J}(\vec{x}_i) \vec{\delta}(\vec{x}_i) \quad (1.26)$$

(см. (1.10)) и совершить разложение по степеням \vec{u}_i . В результате в первом порядке по смещениям оператор взаимодействия поля с веществом может быть представлен в виде^{/74/}

$$\sum_{k,q} g_k (R^+ a_k + R^- a_k^\dagger) \left\{ 1 + \sum_q (G_q b_q + G_q^\dagger b_q^\dagger) \right\}, \quad (1.27)$$

где функции G_q определяются из разложения. Такого рода рассмотрение впервые проводилось Томпсоном^{/74/}. Аналогичный результат может быть получен при разложении по смещениям \vec{u}_i формы

$$\vec{J}(\vec{x}_i) \vec{A}(\vec{x}_i) \quad (1.28)$$

(см. соотношение (1.10) и следующие за ним).

Выражения типа (1.26) учитывают вклад в энергию взаимодействия Дикке за счет рождения и поглощения одного фонона, т.е. описывают процессы рассеяния излучения на флуктуациях плотности (рассеяние Мандельштама-Бриллоуэна). Рассмотрение последующих членов в разложении по степеням \vec{u}_i позволяет учесть многофононные вклады.

Необходимо подчеркнуть, что само по себе использование в качестве исходных выражений соотношений (1.26) и (1.28) обусловлено длинноволновым приближением (1.6). Поэтому применение конструкций типа (1.27) (т.е. дипольного представления) для учета вклада фононных степеней свободы в случае коротковолнового излучения ($\lambda \sim a$), как это сделано в работах^{/75,76/}, лишено физического смысла.

Другой способ учета флуктуаций плотности в кристалле связан с введением прямого взаимодействия (1.23) и разложением функции

$\Phi(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$ по степеням относительного смещения излучателей: $\vec{u}_i - \vec{u}_j - \vec{u}_i'$ ^{/62-64/}. Кроме того, классическое поле в выражении типа (1.17) также может быть разложено по степеням смещений, даже в коротковолновом случае^{/65/}.

"Затем, приняв самую неестественную позу, он заставлял оловянную тарелку сохранять равновесие на своем носу".

А. Франс "Жонглер богоматери"

Задача равновесной статистической термодинамики состоит в вычислении термодинамического потенциала

$$G = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{\Theta}{N} \ln \text{Sp} e^{-H_N / \Theta} \right\} \quad (2.1.)$$

и термодинамических средних значений

$$\langle O \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ s_p O e^{-H_N / \Theta} / s_p e^{-H_N / \Theta} \right\}. \quad (2.2)$$

Здесь H_N - гамильтониан системы из N частиц, Θ - температура и O - произвольный оператор. Важной особенностью модели Дикке является то, что величины (2.1) и (2.2) могут быть вычислены для нее точно /26,77/. Так как равновесные свойства модели Дикке и ее обобщений исследовались в целом ряде работ, подробное изложение которых можно найти в обзоре /26/ и монографиях /27,77/, здесь мы ограничились лишь кратким обсуждением основных результатов.

Строгое математическое изучение равновесного состояния, описываемого моделью Дикке, началось с 1973 г. /78-80/. Оказалось, что в простейшем одномоновом случае модель Дикке описывает фазовый переход в состояние, характеризуемое наличием спонтанной поляризации. Условием существования такого перехода при неотрицательных температурах является так называемое условие сильной связи

$$\bar{g} \geq \hbar \omega, \quad (2.3)$$

где ω - резонансная частота двухуровневого перехода и $j\bar{g}$ - параметр диполь-фотонной связи; $\bar{g} = g \cdot \sqrt{V} = g \sqrt{F}$, где ρ - плотность излучений. Соответствующая критическая температура есть

$$\Theta_c = \frac{\hbar \omega}{2} \left\{ \text{Arth} \left(\frac{\hbar \omega}{g} \right) \right\}^{-1}. \quad (2.4)$$

Температурная зависимость спонтанной поляризации \bar{F} ниже Θ_c опреде-

ляется уравнением

$$\sqrt{(\hbar\omega)^2 + 4\bar{g}^2 \bar{F}^2} = \bar{g}^2 \tanh \left\{ \sqrt{(\hbar\omega)^2 + 4\bar{g}^2 \bar{F}^2} / 2\hbar\omega \right\}, \quad (2.5)$$

где $\bar{F} = |N^{-1} \langle R^z \rangle|$.

Зависимость \bar{F} от ω приведена на

рис. 4. Помимо спонтанной поляризации ниже ω_c в системе возникает макроскопическое заполнение резонансной моды

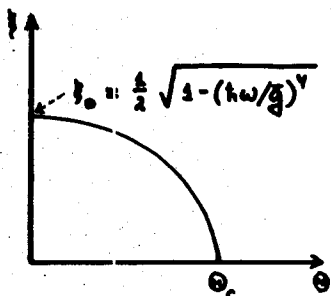


Рис. 4

$$\langle a^{\dagger} a \rangle = N \bar{F}^2 (\bar{g} / \hbar\omega)^2. \quad (2.6)$$

Строгое исследование равновесного состояния в модели Дикке проводилось самыми различными методами (см. /26, 27, 77/ и приведенные в них ссылки). Весьма плодотворным оказался подход, основанный на использовании метода аппроксимирующих гамильтонианов /81/ (см. /82, 83, 27, 77/), в рамках которого исходный

гамильтониан заменяется линеаризованным (аппроксимирующим) гамильтонианом и устанавливается асимптотическая близость (при $N \rightarrow \infty$) модельных и аппроксимирующих величин типа (2.1), (2.2). Развитый в работе /83/ вариант метода применим к исследованию весьма широкого класса модельных систем с линейным по бозонному полю взаимодействием /26/.

Остановимся вкратце на основных положениях этого метода. Для простоты рассмотрим одномодовую версию гамильтониана Дикке:

$$H_N = \hbar\omega a^{\dagger} a + \hbar\omega R_z + g(N) (R^+ a + R^- a^{\dagger}). \quad (2.7)$$

Здесь в силу (1.7) $g(N) \sim \sqrt{N} \sim (\rho/N)^{1/2}$, где ρ - плотность излучателей. В силу метода аппроксимирующих гамильтонианов имеет место термодинамическая эквивалентность операторных конструкций

$$\hbar\omega R_z + \frac{g^2(N)}{\hbar\omega} R^+ R^-$$

и

$$H_N^{(0)} = \hbar\omega R_z + \frac{g^2(N)}{\hbar\omega} (R^+ + R^- - 2\bar{F}) \bar{F},$$

где \bar{F} - вещественный C -числовой параметр, определяемый из условия минимальности термодинамического потенциала,

$$G_0 = -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Theta}{N} \ln Sp e^{-N\mu/\Theta} = \frac{2\bar{q}^2 \bar{f}^2}{\hbar\omega} - \Theta \ln 2 \operatorname{ch} \left\{ \sqrt{(\hbar\omega)^2 + 4\bar{q}^2 \bar{f}^2} / 2\hbar\omega \right\},$$

$$\bar{f} \equiv N^{-1} \bar{F}.$$

Свершим каноническое преобразование бозе-операторов, восходящее к известным работам Боголюбова по сверхтекучести слабонеидеального бозе-газа^{/84,85/} и задающее сдвиг на C -число:

$$a \rightarrow d = a + \frac{\bar{F}}{\hbar\omega} \bar{f}.$$

Можно показать^{/85/}, что

$$\langle d^\dagger d \rangle \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad N/V = \text{const},$$

откуда непосредственно получается соотношение (2.6). Далее можно показать^{/83,26/}, что аппроксимирующий гамильтониан H_N^m термодинамически эквивалентен (2.7) в том смысле, что термодинамический потенциал (2.1) для (2.7) совпадает с G_0 . При этом минимизация G_0 по \bar{f} дает уравнение (2.5).

Аналогичный результат может быть установлен также для системы с произвольным, но не более чем счетным числом мод фотонного поля^{/83,26/}. Кроме того, в рамках метода аппроксимирующих гамильтонианов удается установить термодинамическую эквивалентность гамильтонианов (2.7) и H_0 с точки зрения вычисления средних (2.2). При этом, так как модель (2.7) описывает фазовый переход, приходится исследовать проблему спонтанного нарушения симметрии и определять средние в смысле квази-средних^{/86,26/}. Подробнее о квазисредних см.^{/87-89/}.

Ниже мы кратко перечислим основные результаты, относящиеся к равновесному состоянию модели Дикке и ее обобщений.

Ряд авторов исследовал влияние учета антирезонансных членов (т.е. быстро осциллирующих членов) на условие сильной связи (2.3) (см., например,^{/90/}). Как оказалось, такое "расширение" модели Дикке ведет к замене $\bar{q} \rightarrow 2\bar{q}$ в условии (2.3), определяющем существование фазового перехода. В более общем случае системы с гамильтонианом

$$H_N = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega R_3 + g(N) \{ R_1^\dagger a + R_1 a^\dagger + \mu(R_2 a + R_2^\dagger a^\dagger) \}, \quad (2.8)$$

где μ ^{/91/} - вещественное число, условие сильной связи (2.3) принимает вид

$$\bar{q}(1+\mu) \geq \hbar\omega.$$

Большое число работ (см., например, /92-96,61/) было посвящено проблеме влияния A^2 -члена (1.2), обычно опускаемого при выводе гамильтониана Дикке (см. предыдущий раздел). В работе /61/ было предложено двухпараметрическое каноническое преобразование бозонных операторов, позволяющее исключить такой член путем соответствующей перенормировки параметров ω и \bar{g} . Иначе говоря, такое преобразование сводит модель с A^2 -членом к модели типа (2.7) с перенормированными параметрами. Однако проблему A^2 -члена нельзя считать полностью исследованной. Так, безусловный интерес представляет вопрос о нарушении исходной симметрии при построении модели Дикке /96/.

Возможность фазового перехода в модели Дикке с внешним классическим полем (1.17) исследовалась в работах /61,65/, а в многокомпонентной модели — в работах /46,47/. В /47/, в частности, было показано, что условие сильной связи (2.3) в многокомпонентной системе (1.16) с конечным числом мод принимает вид

$$\sum_{\alpha} \frac{\bar{g}_{\alpha} \bar{g}_{\alpha}}{\hbar \Omega_{\alpha}} \geq \hbar \Omega_{\beta}, \quad (2.9)$$

что ведет к повышению критической температуры по сравнению с однокомпонентной системой.

Важные результаты о возможности изменения рода фазового перехода со второго на первый за счет колебаний излучателей в кристалле были получены в работах /74,62-64/.

Необходимо также отметить многочисленные применения метода аппроксимирующих гамильтонианов к другим модельным задачам статистической механики с линейным по бозе-операторам взаимодействием, описывающим физические системы, отличающиеся от модели Дикке. Здесь можно указать исследование модели Кобяши в теории сегнетоэлектричества /97/, модели Фрелиха /98/, модели ферромагнитного кристалла с фоновой неустойчивостью /99-101/, модели аномального фазового перехода в прустите $(Ag_3As_3S_3)$ /102/ и других /26,77/.

"Метод этот так обаятельно действовал на ум потому, что явился не в виде школьных правил отвлеченной логики, а с необходимостью вытекал из самой сути дела".

В.В.Вересаев "Записки ерacha"

При рассмотрении динамических процессов в квантовостатистических системах отправным пунктом является уравнение Лиувилля

$$i\hbar \frac{\partial \mathcal{D}_{t,t_0}}{\partial t} = [H, \mathcal{D}_{t,t_0}], \quad (3.1)$$

где H - гамильтониан системы и \mathcal{D}_{t,t_0} - статистический оператор, полностью характеризующий эволюцию системы. В частности, зависимость от времени среднего значения любой динамической переменной O задается соотношением

$$\langle O \rangle_t = \text{Sp} O \mathcal{D}_{t,t_0}. \quad (3.2)$$

В интересующем нас случае система представляет собой совокупность некоторого числа N излучателей, взаимодействующую с электромагнитным полем, играющим роль термостата. Таким образом, речь идет об описании динамических процессов в "малой" системе, приводимой в начальный момент времени $t=t_0$ в контакт с термостатом. Методы рассмотрения таких процессов, которыми мы здесь будем пользоваться, развивались в целом ряде работ Боголюбова (см., например, /103-105/).

Подчеркнем, что понятие "малой" системы следует понимать в том смысле, что число степеней свободы этой системы много меньше, чем у "термостата". Будем считать, что начальное условие для уравнения (3.1) имеет вид

$$\mathcal{D}_{t_0,t_0} = \mathcal{D}_H \otimes \mathcal{D}_F, \quad (3.3)$$

$$\sum_{(M)P} \mathcal{D}_H = \sum_{(M)P} \mathcal{D}_F = 1.$$

Здесь $\mathcal{D}_H, \mathcal{D}_F$ - статистические операторы "материи" M (излучателей) и поля F . Начальное состояние поля предполагается равновесным (термостат) с температурой $\beta^{-1} = \Theta$:

$$\mathcal{D}_F = e^{-\frac{iH_F}{\hbar} t} e^{-iH_0 t}, \quad H_F = \sum_K \hbar \omega_K a_K^\dagger a_K.$$

Кроме того, предполагается, что в момент времени t_0 включается взаимодействие между M - и F -системами.

Так как в силу (3.1)

$$S_p \mathcal{D}_{t, t_0} = S_p \mathcal{D}_{t_0, t_0},$$

то

$$S_p \mathcal{D}_{t_0, t_0} = 1,$$

т.е. статистический оператор полной $(M+F)$ -системы имеет стандартную нормировку

Пусть оператор \mathcal{I} задан в представлении Шредингера. Представление Гейзенберга может быть получено с помощью соотношения

$$\mathcal{I}(t) = U_{t, t_0}^{-1} \mathcal{I} U_{t, t_0},$$

где унитарный оператор U удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial U_{t, t_0}}{\partial t} = H U_{t, t_0}, \quad U_{t_0, t_0} = 1.$$

Тогда среднее значение (3.2.) динамической величины, представляемой оператором \mathcal{I} , в момент времени t есть

$$\langle \mathcal{I} \rangle_t = S_p \mathcal{I} \mathcal{D}_t = S_p \mathcal{I}(t) \mathcal{D}_{t_0} \equiv \langle \mathcal{I}(t) \rangle. \quad (3.4)$$

Рассмотрим $(M+F)$ -систему, описываемую гамильтонианом Дикке (1.14). Запишем уравнения движения для операторов фотонов

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial a_k^{\dagger(N)}}{\partial t} = -\hbar \omega_k a_k^{\dagger(N)} - \hbar A_k^{\dagger}(t), \\ i\hbar \frac{\partial a_k^{(N)}}{\partial t} = \hbar \omega_k a_k(t) + \hbar A_k(t), \end{cases}$$

где

$$A_k(t) \equiv \hbar^{-1} g_k \sum_f e^{-i\vec{k}\vec{r}_f} R_f^-.$$

Их формальное решение имеет вид

$$\begin{cases} a_k^+(t) = a_k^+ e^{i\omega_k(t-t_0)} + i B_k^+(t), \\ a_k(t) = a_k e^{-i\omega_k(t-t_0)} - i B_k(t), \end{cases} \quad (3.5)$$

где

$$B_k(t) = \int_{t_0}^t e^{-i\omega_k(t-\tau)} A_k(\tau) d\tau.$$

Обозначим через O произвольный оператор, действующий на собственные функции гамильтониана (1.9) только как на функции переменных H -системы. Соответствующее уравнение движения имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial O(t)}{\partial t} = [O(t), H(t)]. \quad (3.6)$$

Свершим в обеих частях (3.6) усреднение (3.4) и распишем правую часть с учетом соотношений (3.5). Имеем

$$\begin{aligned} & i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle O(t) \rangle - \langle [O(t), H_H(t)] \rangle = \\ & = -i\hbar \sum_k \{ \langle B_k(t) [O(t), A_k^+(t)] \rangle - \langle B_k^+(t) [O(t), A_k(t)] \rangle \} + \\ & + \hbar \sum_k \{ \langle a_k [O(t), A_k^+(t)] \rangle e^{-i\omega_k(t-t_0)} + \langle a_k^+ [O(t), A_k(t)] \rangle e^{i\omega_k(t-t_0)} \}, \end{aligned}$$

где

$$H_H = \hbar \sum_f \Omega_f R_{f3}. \quad (3.7)$$

Исключим теперь из правой части (3.7) фотонные операторы. С этой целью воспользуемся следующей леммой (см. /104/).

Лемма. Если $2I$ - произвольный оператор $(M+F)$ -системы и

$$N_k = \frac{1}{e^{i\hbar\omega_k} - 1},$$

то

$$\begin{cases} \langle a_k 2I(t) \rangle = (1 + N_k) \langle [a_k, 2I(t)] \rangle, \\ \langle a_k^+ 2I(t) \rangle = -N_k \langle [a_k^+, 2I(t)] \rangle. \end{cases} \quad (3.8)$$

Доказательство. В силу определения (3.4)

$$\langle a_k 2I \rangle = \int_{(M)} a_k 2I(t) \mathcal{D}_k = \int_{(F)} a_k \left\{ \int_{(M, \oplus F_k')} 2I(t) \mathcal{D}_M \otimes \prod_{K' \neq K} \mathcal{D}_{F_{K'}} \right\} \mathcal{D}_{F_K},$$

где

$$\mathcal{D}_{F_K} \equiv e^{-\beta \hbar \hat{n}_k} / \mathcal{E}_K, \quad \hat{n}_k = a_k^+ a_k, \quad z_k = \{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}\}^{-1}.$$

Так как

$$\langle n_k | \mathcal{D}_{F_K} | n_k \rangle = \delta_{n_k n_k'} z_k^{-1} e^{-\beta \hbar \omega_k n_k},$$

то

$$\langle a_k 2I(t) \rangle = \sum_{n_k} \langle n_k | a_k | n_k + 1 \rangle \langle n_k + 1 | \mathcal{B}_k | n_k \rangle \times$$

$$\times \langle n_k | 2I_{F_K} | n_k \rangle = \sum_{n_k} \sqrt{n_k + 1} z_k^{-1} e^{-\beta \hbar \omega_k n_k} \langle n_k + 1 | \mathcal{B}_k | n_k \rangle,$$

$$\langle 2I(t), a_k \rangle = \sum_{n_k} \sqrt{n_k + 1} z_k^{-1} e^{-\beta \hbar \omega_k (n_k + 1)} \langle n_k + 1 | \mathcal{B}_k | n_k \rangle,$$

где

$$\mathcal{B}_k \equiv \int_{(M, \oplus F_k')} 2I(t) \mathcal{D}_M \otimes \prod_{K' \neq K} \mathcal{D}_{F_{K'}}.$$

Следовательно,

$$\langle a_k 2I(t) \rangle = e^{\beta \hbar \omega_k} \langle 2I(t), a_k \rangle.$$

Сопряженное равенство дает

$$\langle 2I(t), a_k^+ \rangle = e^{\beta \hbar \omega_k} \langle a_k^+ 2I(t) \rangle.$$

Отсюда следуют соотношения (3.8). Лемма доказана.

Вернемся к выражению (3.7). Примем за $2I(t)$ операторы $[O(t), A_k^+(t)]$ и $[O(t), A_k(t)]$ и воспользуемся (3.8) вместе с соотношениями (3.5). После несложных алгебраических преобразований находим

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle O(t) \rangle + \langle [H_M(t), O(t)] \rangle = \\ = i \hbar \sum_K \{ \langle [A_k^+(t), O(t)] B_K(t) \rangle + N_K \langle [[A_k^+(t), O(t)], B_K(t)] \rangle + \\ + \langle B_K^+(t) [O(t), A_k(t)] \rangle + N_K \langle [B_K^+(t), [O(t), A_k(t)]] \rangle \}. \end{aligned}$$

Здесь как в левой, так и в правой частях стоят лишь операторы, относящиеся к M -системе. Таким образом, фотонные переменные полностью исключены. Учитывая явные выражения для операторов A_k и B_k , получаем

отсюда

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \langle O(t) \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [H_M(t), O(t)] \rangle = \\
 & = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\kappa} \sum_{f, f'} g_{\kappa}^2 e^{i\vec{k}(\vec{x}_f - \vec{x}_{f'})} \int_{t_0}^t d\tau e^{-i\omega_{\kappa}(t-\tau)} \left\{ \langle [R_f^+(t), O(t)] R_{f'}^-(\tau) \rangle + \right. \\
 & + N_{\kappa} \langle [[R_f^+(t), O(t)], R_{f'}^-(\tau)] \rangle \left. \right\} + \\
 & + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\kappa} \sum_{f, f'} g_{\kappa}^2 e^{-i\vec{k}(\vec{x}_f - \vec{x}_{f'})} \int_{t_0}^t d\tau e^{i\omega_{\kappa}(t-\tau)} \left\{ \langle R_{f'}^+(\tau) [O(t), R_f^-(t)] \rangle + \right. \\
 & \left. + N_{\kappa} \langle [R_{f'}^+(\tau), [O(t), R_f^-(t)]] \rangle \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Выбирая в качестве O операторы R_f^{\pm}, R_{f_0} , нетрудно убедиться, что в правой части точного интегродифференциального уравнения (3.9) стоят средние более высокого порядка, чем в левой. Для таких средних в свою очередь могут быть записаны уравнения (3.9) и т.д. Таким образом, мы получили бесконечную цепочку интегродифференциальных уравнений или иерархию кинетических уравнений для сверхизлучательной системы. Впервые для систем типа модели Дикке такая иерархия была построена в работе^{/37/} (см. также^{/39, 26/}). Аналогичным образом могут быть построены иерархии кинетических уравнений и для рассматривавшихся в разделе 1 обобщений модели Дикке с линейным по бозе-оператором взаимодействием. Случай систем с нелинейным взаимодействием требует отдельного обсуждения.

Полученная нами иерархия (3.9) описывает временную зависимость средних значений динамических переменных M -системы (излучателей). Однако на ее основе могут быть получены и характеристики излучения. Так, замечая, что величина

$$\sum_{\kappa} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa} + R_2 = M \tag{3.10}$$

является интегралом движения для гамильтониана Дикке (1.9), имеем

$$\sum_{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \langle a_{\kappa}^{\dagger}(t) a_{\kappa}(t) \rangle = - \frac{\partial}{\partial t} \langle R_2(t) \rangle.$$

В разделе 1 мы уже отмечали важность представления коллективных операторов излучателей при исследовании проблемы сверхизлучения. Поэтому здесь мы приведем иерархию кинетических уравнений в коллективных переменных:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \langle O(t) \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [H_H(t), O(t)] \rangle = \\
& = \frac{1}{\hbar^2} \sum_k \sum_{\nu, \nu'} g_k^{\nu} \int_0^t d\tau e^{-i\omega_k(t-\tau)} P_k(\nu, \nu') \left\{ \langle [R_{\nu}^+(t), O(t)] R_{\nu'}^-(\tau) \rangle + \right. \\
& + N_k \langle [[R_{\nu}^+(t), O(t)], R_{\nu'}^-(\tau)] \rangle \left. + \right. \\
& + \frac{1}{\hbar^2} \sum_k g_k^{\nu} \sum_{\nu'} \int_0^t d\tau e^{i\omega_k(t-\tau)} P_k(\nu, \nu') \left\{ \langle R_{\nu}^+(\tau) [O(t), R_{\nu'}^-(t)] \rangle + \right. \\
& \left. + N_k \langle [R_{\nu}^+(\tau), [O(t), R_{\nu'}^-(t)]] \rangle \right\}, \quad (3.11)
\end{aligned}$$

где

$$P_k(\nu, \nu') = \Psi(\vec{k} - \vec{\nu}) \Psi^*(\vec{k} - \vec{\nu}')$$

(определение дифракционной функции $\Psi(\cdot)$ дано в разделе 1).

"Они найдут то, чего искали, ощутят свое единение и общность".

Антуан де Сент-Экзюпери "Планета людей"

Заметим прежде всего, что в силу определения дифракционная функция $\Psi(\cdot)$ имеет острый максимум при $\vec{k} = \vec{\nu}$ (см. раздел 1. Поэтомую величина

$$\frac{1}{\hbar^2} \sum_k g_k^2 P_k(\nu, \nu') e^{-i\omega_k(t-\tau)}$$

также имеет острый максимум при $\nu = \nu'$ и параметрами $\eta(\cdot)$ при $\nu \neq \nu'$ можно пренебречь. Далее, так как взаимодействие между полем и веществом мало, учтем соотношение (1.15) и перейдем к приближению

$$\begin{aligned} R_{\nu}^{\pm}(\tau) &= \sum_f R_f^{\pm}(\tau) e^{\pm i\vec{\nu}\vec{x}_f} \approx \sum_f R_f^{\pm}(t) e^{\mp i\Omega_f(t-\tau)} e^{\pm i\vec{\nu}\vec{x}_f} \approx \\ &\approx R_{\nu}^{\pm}(t) e^{\mp i\Omega(t-\tau)} e^{-\frac{t-\tau}{2T}} \end{aligned}$$

Теперь из (3.11) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle O(t) \rangle &- \frac{i}{\hbar} \langle [H_M(t), O(t)] \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu} \left\{ \Gamma_{\nu}^{-} \langle [R_{\nu}^{+}(t), O(t)] R_{\nu}^{-}(t) \rangle + N_{\nu}^{-} \langle [[R_{\nu}^{+}(t), O(t)], R_{\nu}^{-}(t)] \rangle + \right. \\ &+ \Gamma_{\nu}^{+} \langle R_{\nu}^{+}(t) [O(t), R_{\nu}^{-}(t)] \rangle + N_{\nu}^{+} \langle [R_{\nu}^{+}(t), [O(t), R_{\nu}^{-}(t)]] \rangle \left. \right\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{cases} \Gamma_{\nu}^{-} = \frac{2}{\hbar^2} \sum_k g_k^2 |\Psi(\vec{k} - \vec{\nu})|^2 \int_{\tau}^t d\tau' \exp\left\{ (i\omega_k + i\Omega - \frac{1}{2T})(t - \tau') \right\}, \\ N_{\nu}^{-} = \frac{2}{\hbar^2} \sum_k g_k^2 |\Psi(\vec{k} - \vec{\nu})|^2 N_k \int_{\tau}^t d\tau' \exp\left\{ (-i\omega_k + i\Omega - \frac{1}{2T})(t - \tau') \right\}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Таким образом, сделанные нами предположения позволили перейти от точного интегродифференциального иерархического уравнения (3.11) к при-

ближнему дифференциальному иерархическому уравнению (4.1), соответствующему марковскому приближению.

Рассмотрим времена t , достаточно отдаленные от начального момента t_0 :

$$t \gg t_0 + \Omega^{-1}. \quad (4.3)$$

Учитывая явный вид параметра диполь-фотонной связи g_k (1.7) и переходя от суммирования к интегрированию по \vec{k} :

$$\sum_k \rightarrow \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k},$$

получаем вместо (4.2)

$$\Gamma_{\nu} = \gamma_{\nu} - i\Omega_{\nu}, \quad N_{\nu} = n_{\nu} - i\alpha_{\nu}, \quad (4.4)$$

где кинетические коэффициенты

$$\begin{aligned} \gamma_{\nu} &= \frac{4T}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{\bar{g}_k^2 |\varphi(\vec{k} - \vec{\nu})|^2}{Q_k}, \\ n_{\nu} &= \frac{8T^2}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \bar{g}_k^2 |\varphi(\vec{k} - \vec{\nu})|^2 \frac{\omega_k - \Omega}{Q_k}, \\ n_{\nu} &= \frac{4T}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} N_k \frac{\bar{g}_k^2 |\varphi(\vec{k} - \vec{\nu})|^2}{Q_k}, \\ \alpha_{\nu} &= \frac{8T^2}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} N_k \bar{g}_k^2 |\varphi(\vec{k} - \vec{\nu})|^2 \frac{\omega_k - \Omega}{Q_k}, \end{aligned}$$

$$Q_k = 1 + 4T^2 (\omega_k - \Omega)^2,$$

$$\bar{g}_k = \sqrt{V}^{1/2} g_k \frac{1}{\hbar} = \frac{2\pi}{\hbar \omega_k} (S_d)^2 [1 - (\bar{u}_d \hat{k})^2] (\bar{u}_d = \frac{d}{|d|}).$$

Используя коллективный оператор

$$S_{\nu} = \sum_{f, f'} R_f^+ R_{f'} e^{i\vec{\nu}(\vec{x}_f - \vec{x}_{f'})}, \quad (4.5)$$

введенный в работе^{/31/} и удовлетворяющий условиям

$$\begin{cases} R_{\nu}^+ R_{\nu}^- = S_{\nu} + R_{\nu} + N/2, \\ R_{\nu}^- R_{\nu}^+ = S_{\nu} - R_{\nu} + N/2, \end{cases}$$

уравнение (4.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \langle 0 \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [H_n, 0] \rangle = \\ & = -i \sum_{\nu} (\alpha_{\nu} - \Omega_{\nu}/2) \langle [R_{\nu}, 0] \rangle - i \sum_{\nu} \frac{\Omega_{\nu}}{2} \langle [S_{\nu}, 0] \rangle + \\ & + \frac{i}{2} \sum_{\nu} \{ (\gamma_{\nu} + n_{\nu}) (\langle [R_{\nu}^+, 0] R_{\nu}^- \rangle + \langle R_{\nu}^+ [0, R_{\nu}^-] \rangle) + \\ & + n_{\nu} (\langle [R_{\nu}^-, 0] R_{\nu}^+ \rangle + \langle R_{\nu}^- [0, R_{\nu}^+] \rangle) \}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Так как все операторы взяты в один и тот же момент времени t , то зависимость операторов от времени здесь не указана.

Из уравнения (4.6) видно, что величина

$$\Omega' = - \sum_{\nu} (\alpha_{\nu} + \Omega_{\nu}/2) \quad (4.7)$$

определяет индивидуальный сдвиг частот, тогда как Ω_{ν} определяет коллективный сдвиг частот^{/31/}. Член α_{ν} в (4.7) определяет зависимость индивидуального сдвига частот от внешнего поля, что соответствует эффекту Штарка. Кинетические коэффициенты

$$\tilde{\gamma}_{\nu} = \gamma_{\nu} + n_{\nu} \quad (4.8)$$

описывают процессы излучения и также зависят от начального поля.

Большой интерес вызывает случай спонтанного излучения, когда поле в начальный момент времени отсутствует. В этом случае в начальных условиях (3.3) нужно положить

$$\mathcal{D}_{\nu} = |0\rangle\langle 0|, \quad (4.9)$$

где $|0\rangle$ - вакуум поля. При этом в силу определения параметров n_{ν} , α_{ν} имеем

$$n_{\nu} = 0, \quad \alpha_{\nu} = 0.$$

Из (4.6) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \langle 0 \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [H_n, 0] \rangle = \\ & = - \frac{i}{2} \sum_{\nu} \Omega_{\nu} \{ \langle [R_{\nu}, 0] \rangle + \langle [S_{\nu}, 0] \rangle \} + \\ & + \frac{i}{2} \sum_{\nu} \gamma_{\nu} \{ \langle [R_{\nu}^+, 0] R_{\nu}^- \rangle + \langle R_{\nu}^+ [0, R_{\nu}^-] \rangle \}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Соотношение (4.10) представляет собой марковское уравнение для процесса спонтанного излучения.

В том случае, когда лоренцево неоднородное уширение отсутствует ($\delta\Omega = 0$), уравнение (4.10) совпадает с уравнением работы^{/31/}.

Вводя статистический оператор системы излучателей соотношением

$$\rho_M^{(t)} = S_P \mathcal{D}_{\xi, t_0},$$

из (4.10) с учетом соотношения

$$\langle O \rangle = S_P \langle O \rho_M^{(t)} \rangle$$

можно получить следующее марковское "Master Equation", найденное в работе^{/31/} методом проекционного оператора:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_M^{(t)} - \frac{i}{\hbar} [\rho_M^{(t)}, H_M] = \\ - \frac{i}{\hbar} \sum_{\nu} \Omega_{\nu} \{ [\rho_M^{(t)}, R_{\nu}^{-}] + [\rho_M^{(t)}, S_{\nu}^{-}] \} + \\ + \frac{i}{\hbar} \sum_{\nu} \gamma_{\nu} \{ [R_{\nu}^{-}, \rho_M^{(t)} R_{\nu}^{+}] + [R_{\nu}^{-}, \rho_M^{(t)}] R_{\nu}^{+} \}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Аналогичным образом могут быть построены марковские уравнения для обобщенной модели Дикке с линейным по бозе-операторам взаимодействием, описанные в разделе 1. Здесь мы рассмотрим только один важный случай, когда кроме резонансных членов, учитываемых в приближении вращающейся волны, в гамильтониан входят также антирезонансные члены (см. раздел II (2.8)). Будем учитывать все моды поля и воспользуемся представлением коллективных переменных (1.11). Точная иерархия кинетических уравнений будет иметь ту же структуру, что и (3.11), но в правой части появятся дополнительные члены вида^{/37, 39/}

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar^2} \sum_k \sum_{\nu, \nu'} g_k^2 \int_{t_0}^t dt e^{-i\omega_k(t-t')} \{ M^2 P_k(-\nu, -\nu') \langle [R_{\nu}^{-}(t), O(t)] R_{\nu'}^{+}(t') \rangle + \\ + N_k \langle [[R_{\nu}^{-}(t), O(t)], R_{\nu'}^{+}(t')] \rangle + \mu P_k(\nu, -\nu') \langle [R_{\nu}^{+}(t), O(t)] R_{\nu'}^{+}(t') \rangle + \\ + N_k \langle [[R_{\nu}^{+}(t), O(t)], R_{\nu'}^{+}(t')] \rangle + \mu P_k(-\nu, \nu') \langle [R_{\nu}^{-}(t), O(t)] R_{\nu'}^{-}(t') \rangle + \\ + N_k \langle [[R_{\nu}^{-}(t), O(t)], R_{\nu'}^{-}(t')] \rangle \} + \\ + \frac{i}{\hbar^2} \sum_k \sum_{\nu, \nu'} g_k^2 \int_{t_0}^t dt e^{i\omega_k(t-t')} \{ M^2 P_k(-\nu, -\nu') \langle R_{\nu}^{-}(t) [O(t), R_{\nu'}^{+}(t')] \rangle + \\ + N_k \langle [R_{\nu}^{-}(t) [O(t), R_{\nu'}^{+}(t')]] \rangle + \mu P_k(\nu, \nu') \langle R_{\nu}^{+}(t) [O(t), R_{\nu'}^{-}(t')] \rangle + \\ + N_k \langle [R_{\nu}^{+}(t) [O(t), R_{\nu'}^{-}(t')]] \rangle \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + N_k \langle [R_{\nu}^-(\tau), [O(\tau), R_{\nu}^+(\tau)]] \rangle + \mu P_k(\nu, \nu') \langle R_{\nu}^+(\tau) [O(\tau), R_{\nu'}^+(\tau)] \rangle + \\
& + N_k \langle [R_{\nu}^+(\tau), [O(\tau), R_{\nu}^+(\tau)]] \rangle + \mu P_k(-\nu, \nu') \langle R_{\nu}^-(\tau) [O(\tau), R_{\nu'}^-(\tau)] \rangle + \\
& + N_k \langle [R_{\nu}^-(\tau), [O(\tau), R_{\nu}^-(\tau)]] \rangle \}. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Как нетрудно видеть, учет антирезонансных членов приводит к появлению в иерархии кинетических уравнений как быстро осциллирующих членов типа $R^{\pm} R^{\pm}$, так и медленных членов. Пренебрежем вкладом быстро осциллирующих членов и положим $\mu = 1$. Тогда с учетом сделанных выше приближений получаем вместо (4.12)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \langle O \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [H_M, O] \rangle = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \{ \Gamma_{\nu}^- \langle [R_{\nu}^+, O] R_{\nu}^- \rangle + N_{\nu}^- \langle [[R_{\nu}^+, O], R_{\nu}^-] \rangle + \\
& + \Gamma_{\nu}^{*-} \langle R_{\nu}^+ [O, R_{\nu}^-] \rangle + N_{\nu}^{*-} \langle [R_{\nu}^+, [O, R_{\nu}^-]] \rangle + \\
& + \Gamma_{\nu}^+ \langle [R_{\nu}^-, O] R_{\nu}^+ \rangle + N_{\nu}^+ \langle [[R_{\nu}^-, O], R_{\nu}^+] \rangle + \\
& + \Gamma_{\nu}^{*+} \langle R_{\nu}^- [O, R_{\nu}^+] \rangle + N_{\nu}^{*+} \langle [R_{\nu}^-, [O, R_{\nu}^+]] \rangle \}. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты $\Gamma_{\nu}^{\pm}, N_{\nu}^{\pm}$ определены соотношением (4.2), а "новые" коэффициенты $\Gamma_{\nu}^{*\pm}, N_{\nu}^{*\pm}$, определяющие вклад антирезонансных членов, есть

$$\begin{cases} \Gamma_{\nu}^{*+} = \frac{2}{\hbar^2} \sum_k g_k^2 |\psi(\vec{k} - \vec{\nu})|^2 \int_{t_0}^t d\tau \exp\{(-i\omega_k - i\Omega - \frac{1}{2T})(t - \tau)\}, \\ N_{\nu}^{*+} = \frac{2}{\hbar^2} \sum_k g_k^2 |\psi(\vec{k} - \vec{\nu})|^2 N_k \int_{t_0}^t d\tau \exp\{(-i\omega_k - i\Omega - \frac{1}{2T})(t - \tau)\}. \end{cases} \tag{4.14}$$

Далее, в дополнение к соотношениям (4.4), определяющим теперь γ_{ν}^{-} , Ω_{ν}^{-} , n_{ν}^{-} , α_{ν}^{-} , появятся соотношения

$$\Gamma_{\nu}^{+} = \gamma_{\nu}^{+} - i\Omega_{\nu}^{+}, \quad N_{\nu}^{+} = n_{\nu}^{+} - i\alpha_{\nu}^{+},$$

в которых кинетические коэффициенты имеют тот же вид, что и прежде с заменой $\omega_{\nu} - \Omega$ на $\omega_{\nu} + \Omega$. Уравнение (4.6) будет теперь иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \langle O \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [H_n, O] \rangle = \\ & = i \sum_{\nu} \left\{ \left(\frac{\Omega_{\nu}^{+} - \Omega_{\nu}^{-}}{2} + \alpha_{\nu}^{+} - \alpha_{\nu}^{-} \right) \langle [R_{\nu}, O] \rangle - \frac{\Omega_{\nu}^{+} + \Omega_{\nu}^{-}}{2} \langle [S_{\nu}, O] \rangle + \right. \\ & + \frac{\gamma_{\nu}^{-} + n_{\nu}^{-} + n_{\nu}^{+}}{2} \left(\langle [R_{\nu}^{+}, O] R_{\nu}^{-} \rangle + \langle R_{\nu}^{+} [O, R_{\nu}^{-}] \rangle \right) + \\ & \left. + \frac{\gamma_{\nu}^{+} + n_{\nu}^{+} + n_{\nu}^{-}}{2} \left(\langle [R_{\nu}^{-}, O] R_{\nu}^{+} \rangle + \langle R_{\nu}^{-} [O, R_{\nu}^{+}] \rangle \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Таким образом, для индивидуального сдвига частот вместо (4.7) мы теперь получаем

$$\Omega_{\nu}' = \sum_{\nu} \left(\frac{\Omega_{\nu}^{+} - \Omega_{\nu}^{-}}{2} + \alpha_{\nu}^{+} - \alpha_{\nu}^{-} \right), \quad (4.16)$$

а коллективный сдвиг частот определяется величиной

$$\tilde{\Omega}_{\nu} = \Omega_{\nu}^{+} + \Omega_{\nu}^{-}. \quad (4.17)$$

Марковское уравнение спонтанного излучения (4.11) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \langle O \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [H_n, O] \rangle = \\ & = i \Omega_0' \langle [R_s, O] \rangle - \frac{i}{2} \sum_{\nu} \tilde{\Omega}_{\nu} \langle [S_{\nu}, O] \rangle + \\ & + \frac{i}{2} \sum_{\nu} \left\{ \gamma_{\nu}^{-} \left(\langle [R_{\nu}^{+}, O] R_{\nu}^{-} \rangle + \langle R_{\nu}^{+} [O, R_{\nu}^{-}] \rangle \right) + \right. \\ & \left. + \gamma_{\nu}^{+} \left(\langle [R_{\nu}^{-}, O] R_{\nu}^{+} \rangle + \langle R_{\nu}^{-} [O, R_{\nu}^{+}] \rangle \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где величина

$$\Omega_0' = \frac{i}{2} \sum_{\nu} (\Omega_{\nu}^{+} - \Omega_{\nu}^{-}) \quad (4.19)$$

определяет постоянный атомный сдвиг частот - так называемую бете-часть сдвига Лэмба^{/32,40/}.

Марковское "Master Equation" (4.11) также обобщается и с учетом начального поля принимает вид^{/39/}

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho_M(t) - \frac{i}{\hbar} [\rho_M(t), H_M] = \\ & = i \Omega' [\rho_M(t), R_s] - \frac{i}{2} \sum_{\nu} \tilde{\Omega}_{\nu} [\rho_M(t), S_{\nu}] + \\ & + \frac{i}{2} \sum_{\nu} \{ (\gamma_{\nu}^{-} + n_{\nu}^{-} + n_{\nu}^{+}) ([R_{\nu}^{-}, \rho_M(t) R_{\nu}^{+}] + [R_{\nu}^{-} \rho_M(t), R_{\nu}^{+}]) + \\ & + (\gamma_{\nu}^{+} + n_{\nu}^{-} + n_{\nu}^{+}) ([R_{\nu}^{+}, \rho_M(t) R_{\nu}^{-}] + [R_{\nu}^{+} \rho_M(t), R_{\nu}^{-}]) \} \end{aligned}$$

(4.20)

Таким образом, учет антирезонансных членов ведет к появлению заметных поправок к кинетическим коэффициентам и сдвигам частот.

"Вдруг вспыхнул яркий свет..."

Герберт Уэллс "Борьба миров"

Перейдем теперь к рассмотрению сверхизлучательного импульса /39,106,107/. Положим в уравнении (4.18) $O = R_3$. Тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle R_3 \rangle = \sum_f \left\{ \frac{\gamma_f^+ - \gamma_f^-}{2} N - (\gamma_f^+ + \gamma_f^-) \langle R_3 \rangle + (\gamma_f^+ - \gamma_f^-) \langle S_{\mathcal{N}} \rangle \right\}. \quad (5.1)$$

Далее можно было бы написать с помощью (4.18) соответствующее уравнение для $\langle S_{\mathcal{N}} \rangle$, стоящего в правой части (5.1). Мы, однако, поступим иначе. Пусть в начальный момент излучатели возбуждаются квазимонохроматическим импульсом с волновым вектором \vec{k}_0 и площадью \mathcal{A} /39,106/. В этом случае

$$\rho_M = \prod_f |\langle \Psi - \vec{k}_0 \vec{x}_f | \rangle_f \langle \Psi - \vec{k}_0 \vec{x}_f | \rangle_f|, \quad (5.2)$$

где Θ - угол Блоха, определяющий разность населенностей /32/, и Ψ - начальная фаза. Как нетрудно видеть,

$$\langle R_3 \rangle = -\frac{N}{2} \cos \Theta. \quad (5.3)$$

Очевидно,

$$\begin{cases} \langle R_f^+ | \Theta, \Psi - \vec{k}_0 \vec{x}_f \rangle_f = |+\rangle_f e^{i(\Psi - \vec{k}_0 \vec{x}_f)/2} \cos \frac{\Theta}{2}, \\ \langle R_f^- | \Theta, \Psi - \vec{k}_0 \vec{x}_f \rangle_f = |-\rangle_f e^{-i(\Psi - \vec{k}_0 \vec{x}_f)/2} \sin \frac{\Theta}{2}. \end{cases}$$

В силу определения коллективного оператора $S_{\mathcal{N}}$ (4.5) нас интересует поведение среднего $\langle R_f^+ R_{f'}^- \rangle$, которое теперь можно представить в виде

$$\langle R_f^+ R_{f'}^- \rangle = \frac{1}{4} \sin^2 \Theta e^{-ik_0(\vec{x}_f - \vec{x}_{f'})}, \quad f \neq f'.$$

Принимая во внимание (5.3), имеем отсюда

$$\langle R_f^+ R_{f'}^- \rangle = \left(\frac{1}{4} - N^{-2} \langle R_3 \rangle^2 \right) e^{-ik_0(\vec{x}_f - \vec{x}_{f'})}, \quad f \neq f'.$$

Это соотношение справедливо, очевидно, лишь для начального момента времени. Мы, однако, воспользуемся приближением, введенным в разделе 1У:

$$R_j^{\pm}(t) \approx R_j^{\pm}(t_0) e^{\pm i\Omega_j(t-t_0)}$$

Полагая $t_0 = 0$ и учитывая лоренцево неоднородное уширение, получаем в этом приближении

$$\langle R_j^+(t) R_j^-(t) \rangle \approx \left\{ \frac{1}{4} - N^{-2} \langle R_j(t) \rangle^2 \right\} e^{-i\vec{k}_0(\vec{x}_j^- - \vec{x}_j^+)} e^{-t/\tau}$$

Теперь уравнение (5.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle R_j \rangle = & \sum_{\vec{r}} \left\{ \frac{\gamma_{\vec{r}}^+ - \gamma_{\vec{r}}^-}{2} N - (\gamma_{\vec{r}}^+ + \gamma_{\vec{r}}^-) \langle R_j \rangle + \right. \\ & \left. + N^2 (\gamma_{\vec{r}}^+ - \gamma_{\vec{r}}^-) [\Lambda(\vec{v} - \vec{k}_0) - N^{-1}] \left(\frac{1}{4} - N^{-2} \langle R_j \rangle^2 \right) e^{-t/\tau} \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь

$$\Lambda(\vec{v} - \vec{k}_0) \equiv |\mathcal{Y}(\vec{v} - \vec{k}_0)|^2.$$

Уравнение (5.4) зависит уже только от одной атомной переменной $\langle R_j^{\pm} \rangle \equiv \chi(t)$ и описывает процесс спонтанного излучения при начальном возбуждении системы \mathcal{P} - импульсом (5.2). В простейшем случае $\delta\Omega = T^{-1} = 0$, соответствующем отсутствию неоднородного уширения, из него получается известное уравнение Релера-Эберли^{/108/}:

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi = -\frac{1}{\tau_0} \left\{ \frac{N}{2} + \chi + \mu \left(\frac{N^2}{4} - \chi^2 \right) \right\}. \quad (5.5)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{cases} \tau_0^{-1} = \sum_{\vec{r}} (\gamma_{\vec{r}}^- + \gamma_{\vec{r}}^+), \\ \mu = \tau_0 \sum_{\vec{r}} (\gamma_{\vec{r}}^- - \gamma_{\vec{r}}^+) [\Lambda(\vec{v} - \vec{k}_0) - N^{-1}], \end{cases}$$

причем в силу предположения $T^{-1} = 0$ имеем $\gamma_{\vec{r}}^+ = 0$.

Возвращаясь к уравнению (5.4), заметим, что в силу определения функция $\Lambda(\vec{v} - \vec{k}_0)$ имеет максимум при $\vec{v} = \vec{k}_0$. Таким образом, для изотропной системы излучателей с топологией сферы ($\gamma_{\vec{r}} = \delta_{\vec{r}, \vec{r}_1}$) коллективное спонтанное излучение (сверхизлучение) будет направлено главным образом вдоль направления возбуждающего \mathcal{P} - импульса. Вообще говоря, явное задание кинетических коэффициентов позволяет определить угловое распределение излучения^{/108/} и убедиться, что направленность

сверхизлучения обусловлена интерференцией различных излучателей и геометрическими свойствами среды.

Перейдем теперь к определению интенсивности сверхизлучения. Очевидно,

$$I(t) = \sum_k \hbar \omega_k \frac{d}{dt} \langle a_k^\dagger(t) a_k(t) \rangle \quad (5.6)$$

Принимая во внимание наличие интеграла движения (3.10) и учитывая наличие лоренцева неоднородного уширения, получаем отсюда

$$I(t) = -\hbar \Omega \frac{d}{dt} \langle R_3 \rangle. \quad (5.7)$$

Теперь для того, чтобы определить зависимость интенсивности от времени, необходимо найти решения уравнения (5.4), представляющего собой дифференциальное уравнение Риккати^{/109-111/}. Совершим подстановки:

$$x(t) = e^{t/\tau} y(t)$$

$$z = y - \frac{\tau_0}{2\mu} \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau} \right).$$

В результате из (5.4) имеем

$$\frac{d}{dt} z = \frac{\mu}{\tau_0} z^2 - a - b N e^{-t/\tau} - c N^2 e^{-2t/\tau}, \quad (5.8)$$

где

$$\begin{cases} a = \frac{\tau_0}{4\mu} \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau} \right)^2, \\ b = \frac{d}{2\tau_0}, \\ d = \tau_0 \sum_r (\gamma_r^- - \gamma_r^+), \\ c = \frac{\mu}{4\tau_0}. \end{cases}$$

В общем случае уравнение (5.8) не интегрируется в квадратурах^{/109,110/}. Рассмотрим специальный случай больших τ , когда

$$e^{-t/\tau} \approx 1 - \frac{t}{\tau}.$$

Теперь (5.8) принимает вид

$$\frac{du}{dt} = u^2 + \frac{D}{\tau} t - E, \quad (5.9)$$

где

$$\begin{cases} u = \frac{\mu}{\tau_0} z, \\ D = \frac{d\mu}{2\tau_0^2} N + \frac{\mu^2}{2\tau_0^2} N^2, \\ E = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau} \right)^2 + \frac{d\mu}{2\tau_0^2} N + \frac{\mu^2}{4\tau_0^2} N^2. \end{cases}$$

Соотношение (5.9) представляет собой специальное уравнение Риккати, решение которого может быть получено стандартными методами^{/110,111/}. В результате для среднего $\langle R_s(t) \rangle$, определяющего разность населенностей, имеем^{/106/}

$$\langle R_s(t) \rangle = \frac{\tau_0}{\mu} e^{t/\tau} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau} \right) - \frac{\dot{V}(t)}{V(t)} \right\}, \quad (5.10)$$

где

$$V(t) = \left(\frac{\tau}{D} \right)^{4/3} \sqrt{\varepsilon(t)} \cdot Z_{3/2} \left(\frac{2}{3} \frac{\tau}{D} [\varepsilon(t)]^{3/2} \right), \quad \dot{V}(t) = \frac{d}{dt} V(t).$$

Здесь

$$\varepsilon(t) = \frac{tD}{\tau} - E,$$

$$Z_{3/2}(x) = M_1 J_{3/2}(x) + M_2 N_{3/2}(x),$$

где $J_n(x)$, $N_n(x)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го рода соответственно. Параметры M_1 и M_2 определяются начальным состоянием системы.

Поведение средней разности населенностей (5.10) для различных начальных условий приведено на рис. 5.

Рассмотрим теперь малые времена

$$t \ll \tau, \quad \text{когда} \\ e^{-t/\tau} \sim 1.$$

В этом случае из (5.9) имеем

$$\frac{dx}{dt} = + \frac{\mu}{\tau_0} x^2 - \frac{1}{\tau_0} x - A, \quad (5.11)$$

где

$$A = \left(\frac{Nd}{2\tau_0} + \frac{N^2\mu}{4\tau_0} \right).$$

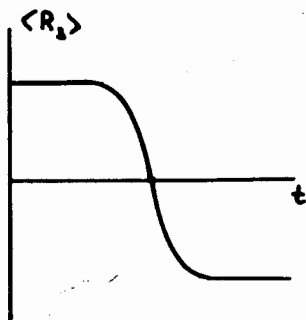


Рис. 5

Решение уравнения (5.11) имеет вид

$$X(t) (= \langle R_s(t) \rangle) = \frac{1}{2\mu} - Kth \left(\mu K \frac{t - t_D}{\tau_0} \right), \quad (5.12)$$

где

$$K = \sqrt{\frac{1}{4\mu^2} + \frac{N\mu}{2\mu} + \frac{N^2}{4}},$$

и параметр t_D есть

$$t_D = \tau_N \ln \frac{K - \left(\frac{1}{2\mu} - \langle R_s(0) \rangle\right)}{K + \left(\frac{1}{2\mu} - \langle R_s(0) \rangle\right)}. \quad (5.13)$$

Здесь

$$\tau_N = \frac{\tau_0}{\sqrt{\mu^2 N^2 + 2d\mu N + 1}}$$

и $\langle R_s(0) \rangle$ определяет начальную разность населенностей. Теперь для интенсивности (5.7) имеем

$$I(t) = \frac{\hbar \Omega K}{2\tau_N} \operatorname{sech}^2 \frac{t - t_D}{2\tau_N}. \quad (5.14)$$

Как нетрудно видеть, параметр t_D определяет время задержки импульса (см. рис. 6), соответствующее максимуму интенсивности, равному

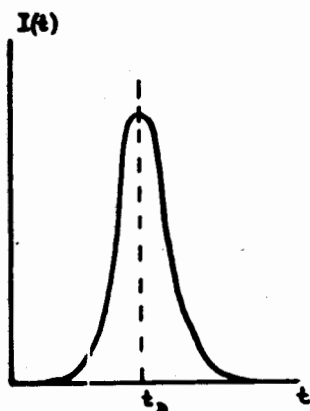


Рис. 6

$$I_{\max} = \frac{\hbar \Omega}{4\mu \tau_0} (\mu^2 N^2 + 2d\mu N + 1). \quad (5.15)$$

Величина времени задержки примерно на порядок больше длительности самого импульса (см. рис. 6). Такую значительную задержку импульса можно объяснить тем, что процесс спонтанного распада инвертированного состояния начинается с излучения системы несвязанных атомов; лишь постепенно за счет взаимодействия через общее поле излучения в системе возникает сильная корреляция на больших расстояниях (дальний порядок).

Учитывая явный вид параметров K и τ_N , нетрудно убедиться, что в выражении для интенсивности (5.14) содержится слагаемое, пропорциональное N^2 , указывающее на когерентный характер излучения и играющее

основную роль при $t \sim t_D$. Максимальная интенсивность (5.15) примерно в μN раз превышает максимальную интенсивность некогерентного N -атомного излучения в той же системе:

$$\tilde{I}_{\max} = \frac{N \hbar \omega_0}{\tau_0},$$

$$\frac{I_{\max}}{\tilde{I}_{\max}} = \frac{\mu N}{4} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4\mu N}.$$

Зависимость интенсивности (5.14) от времени при различных значениях N приведена на рис. 7. Здесь $\alpha = 1$ и параметр μN принимает значения 100 (кривая 1), 200 (кривая 2), 300 (кривая 3). Таким образом, увеличение числа атомов ведет к повышению максимальной интенсивности, уменьшению времени задержки и уменьшению длительности сверхизлучательного импульса. Зависимость времени задержки и длительности импульса от N приведена на рис. 8.

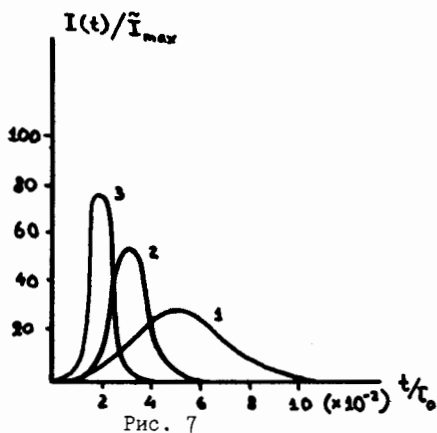


Рис. 7

В простейшем случае, когда $T^{-1} = 0$, или в приближении вращающейся волны из соотношений (5.12)–(5.14) получаем результат Релера и Эберли [108]:

$$X(t) = -\frac{N}{2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\mu N} \right) t \cdot \frac{t - t_D}{2\tau_N} - \frac{1}{\mu N} \right\},$$

$$I(t) = \frac{\hbar \omega_0}{4\mu \tau_0} (\mu N + 1)^2 \operatorname{sech}^2 \frac{t - t_D}{2\tau_N},$$

$$t_D = \tau_N \ln \mu N, \quad \tau_N = \frac{\tau_0}{\mu N + 1}$$

(здесь предполагается также, что

$$\langle R_s(0) \rangle = N/2,$$

т.е. начальное состояние полностью инвертировано).

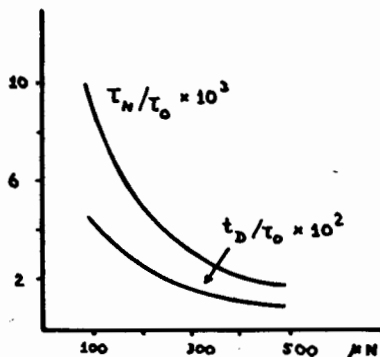


Рис. 8

Отметим также, что из (5.12)–(5.15) при $\mu N \gg 1$ следуют соотношения

$$\frac{I_{\max} \tau_N}{\hbar \Omega} \approx \frac{N}{4},$$

$$\frac{I_{\max} \tau_N^2}{\hbar \Omega} \approx \frac{\tau_0}{4\mu},$$

хорошо согласующиеся с экспериментальными результатами^{/21/}.

Перейдем теперь к рассмотрению малых T , т.е. ситуации при $t \sim T$. В этом случае экспоненциальный член в уравнениях (5.4) и (5.8) играет уже значительную роль и пренебречь им нельзя. Однако, если "сверхизлучательный" член

$$M_2 = \mu \left[\frac{N^2}{4} - \langle R_s(t) \rangle^2 \right] e^{-t/\tau}$$

преобладает над членом

$$M_1 = \frac{dN}{2} + \langle R_s(t) \rangle,$$

описывающим некогерентное излучение, то из (5.4) можно получить

$$\frac{d}{dt} \langle R_s(t) \rangle \approx -\frac{\mu}{\tau_0} \left[\frac{N^2}{4} - \langle R_s(t) \rangle^2 \right] e^{-t/\tau}, \quad (5.16)$$

откуда

$$\left| \frac{x - N/2}{x^2 - N^2/4} \right| = \exp \left\{ -\frac{\mu N T}{\tau_0} e^{-t/\tau} + \text{const} \right\},$$

где, как и прежде, $x = \langle R_s \rangle$. Поэтому

$$\langle R_s(t) \rangle = \frac{N}{2} \text{th} \left(\frac{\mu N T}{2\tau_0} e^{-t/\tau} - \Delta \right), \quad (5.17)$$

где параметр Δ определяется из условия сшивки этого решения с (5.12) при $t \ll T$. Например, при использовании для $\langle R_s(t) \rangle$ выражений, соответствующих приближению вращающейся волны,

$$\Delta = \frac{\mu N}{2\tau_0} (T - t_D) \quad (\mu N \gg 1). \quad (5.18)$$

Соответствующее (5.17) выражение для интенсивности есть

$$I(t) = N^2 \hbar \Omega \frac{\mu}{4\tau_0} e^{-t/\tau} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\mu N T}{2\tau_0} e^{-t/\tau} - \Delta \right). \quad (5.19)$$

Поведение интенсивности (5.19) приведено на рис. 9, из которого видно, что наличие неоднородного лоренцева уширения ведет к асимметричной форме импульса относительно максимума. Асимметрия такого рода наблюдается при сверхизлучении экспериментально /6-12,14,16/.

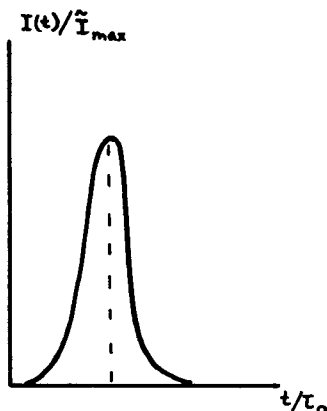


Рис. 9

Введем приведенное время

$$\tau = \tau(t) = T(1 - e^{-t/\tau}). \quad (5.20)$$

Тогда в приближении вращающейся волны выражение для $\langle R_s(t) \rangle$, соответствующее (5.17), примет вид

$$\langle R_s(t) \rangle = -\frac{N}{2} \operatorname{th} \left\{ \frac{1}{2\tau_N} (\tau - t_0) \right\}, \quad \tau_N = \frac{\tau_0}{\mu N}. \quad (5.21)$$

При больших временах ($t \gg T$) предельное значение приведенного времени $\tau = T$, и из (5.21) следует

$$\langle R_s(t) \rangle \xrightarrow{t \gg T} -\frac{N}{2} \operatorname{th} \frac{T - t_0}{2\tau_N} > -\frac{N}{2}. \quad (5.22)$$

Соответствующая интенсивность при этом стремится к нулю. Из неравенства (5.22) следует, что в системе после окончания импульса может остаться некоторая инверсная населенность и связанная с ней неизлученная энергия, введенная в систему в начальный момент времени. Такое явление "замедления" сверхизлучения обусловлено, как мы видим, неоднородным уширением линии. Может наблюдаться связанное с замедлением так называемое ограниченное сверхизлучение /33,112/, при котором лишь небольшая часть энергии атомов сверхизлучается (см. также обзор /21/).

Учет влияния неоднородного уширения линии на поведение "сверхизлучательного" импульса можно провести и более точно, чем это было сделано выше. Вновь обратимся к общему уравнению (5.4), которое в силу сказан-

ного можно представить в виде^{/125/}

$$\frac{d}{dt} \langle R_s(t) \rangle = -\frac{1}{\tau_0} \left\{ \frac{dN}{2} + \langle R_s(t) \rangle + \mu \left[\frac{N^2}{4} - \langle R_s(t) \rangle^2 \right] \right\} e^{-t/\tau} . \quad (5.23)$$

Соответствующая (5.21) интенсивность есть

$$I(t) = \hbar \Omega \frac{N^2 \mu}{4 \tau_0} e^{-t/\tau} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2\tau_N} (\tau - t_0) \right] . \quad (5.24)$$

Отметим здесь, что формула (5.24) впервые получена Бонифацио и Лугиато в работе^{/30/}, посвященной исследованию различных режимов сверхизлучения в иглообразной среде на основе уравнения для угла Блоха.

Обозначим через t_m решение уравнения $\tau(t) = t_0$. Согласно (5.24) имеем

$$t_m = T \ln \frac{T}{T - t_0} . \quad (5.25)$$

Нетрудно видеть, что в точке $t = t_m$ функция $\operatorname{sech} \left[\frac{\tau - t_0}{2\tau_N} \right]$, фигурирующая в правой части уравнения (5.24), имеет острый пик. Вблизи максимума поведение этой функции имеет следующий вид:

$$\operatorname{sech} \left[\frac{1}{2\tau_N} (\tau(t) - t_0) \right] \simeq \operatorname{sech} \left[\frac{t - t_m}{2\tau_N^*} \right], \quad (5.26)$$

где величина

$$\tau_N^* = \tau_N / \left(\left. \frac{\partial \tau(t)}{\partial t} \right|_{t=t_m} \right) = \tau_N \frac{T}{T - t_0} \quad (5.27)$$

определяет характер спада с пика. С другой стороны, степень изменения экспоненциального фактора $\exp(-t/\tau)$ в правой части (5.24) характеризуется величиной T . Поэтому легко видеть, что точка максимума t_m^* правой части уравнения (5.24) будет близка к t_m ^{/30/}, т.е.

$$t_m^* \simeq t_m = T \ln \frac{T}{T - t_0} , \quad (5.28)$$

если выполняется условие

$$T \gg 2\tau_N^* , \quad (5.29)$$

которое согласно (5.27) эквивалентно следующему:

$$\frac{2\tau_N}{T-t_D} \ll 1. \quad (5.30)$$

При этом максимальная интенсивность излучения имеет вид

$$I_{max}^* = \hbar\omega (N^2\mu/4\tau_0) \frac{T-t_D}{T} = I_{max} \frac{T-t_D}{T}. \quad (5.31)$$

Сравнение формул (5.27), (5.28), (5.29) с полученным выше выражением дает

$$\tau_N^* > \tau_N, \quad t_m^* > t_m, \quad I_{max}^* < I_{max}. \quad (5.32)$$

Это означает, что неоднородное уширение линии приводит к увеличению длительности "сверхизлучательного" импульса τ_N^* , времени задержки t_m^* и уменьшению максимума интенсивности излучения I_{max}^* . В частном случае, когда $T \gg t$, имеем просто $\tau_N^* \rightarrow \tau_N, t_m^* \rightarrow t_m, I_{max}^* \rightarrow I_{max}$, что и следовало ожидать. Более точная оценка для времени задержки t_m^* может быть получена на основе приближенного решения следующим образом.

Обозначим $t_m^* - t_m = \delta$. Ввиду малости величины δ по сравнению с T и согласно определению τ имеем

$$\tau(t_m^*) \approx t_D + \delta \frac{T-t_D}{T}. \quad (5.33)$$

С другой стороны, условие $\partial I / \partial t = 0$ для (5.20) дает

$$\frac{\tau_N}{T} e^{t_m^*/T} = -th \left[\frac{\tau(t_m^*) - t_D}{2\tau_N} \right]. \quad (5.34)$$

Подставим теперь (5.33) в (5.34). С учетом малости δ получим

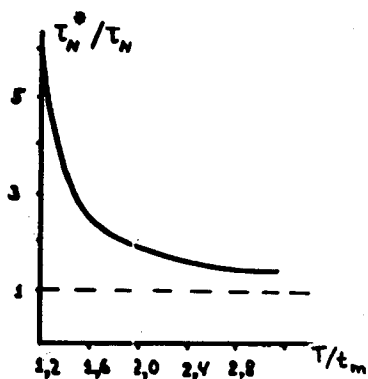
$$\frac{\tau_N^*}{T} = -th \frac{\delta}{2\tau_N^*}, \quad (5.35)$$

где длительность импульса τ_N^* описывается формулой (5.27). Отсюда имеем

$$t_m^* = t_m - 2\tau_N^* \operatorname{arctg} \frac{\tau_N^*}{T}. \quad (5.36)$$

Использование этой формулы вместе с (5.25) и (5.27) дает окончательный результат для t_m^* :

$$t_m^* = T \left\{ \ln \frac{T}{T-t_D} - \frac{\tau_N}{T-t_D} \ln \frac{T-t_D+\tau_N}{T-t_D-\tau_N} \right\}. \quad (5.37)$$



Зависимость t_m^* и τ_N^* от неоднородного времени жизни излучателей T , описанная формулами (5.27) и (5.37), показана на рис.10 для случая $t_D = 10\tau_N$. Из рисунка видно, что, в отличие от монотонно убывающего поведения функции $\tau^*(T)$, функция $t_m^*(T)$ обладает максимумом в точке $T/t_m \approx 1,3$.

Поведение t_m^* в области $T/t_m < 1,3$ означает, что слишком большое влияние неоднородного уширения линии приводит не к увеличению, а к уменьшению времени задержки импульса. А это, с первого взгляда, оказывается неожиданным. Оно существенно отличается от полученного выше результата для случая $T \gg t_m$, см. формулу (5.32), и от результатов других авторов /21,30/. Причина такой особенности поведения зависимости t_m^* от T заключается в следующем.

Известно, что в процессе излучения имеют место два противоположных, конкурирующих фактора: фазировка диполей атомов благодаря взаимодействию через поле и дефазировка их вследствие различия собственных частот при неоднородном уширении линии. Когда $T \gg t_D$, главную роль играет фактор фазировки, обусловивший сверхизлучательное поведение импульса. Фактор дефазировки диполей, связанный с неоднородным уширением линии, приводит к

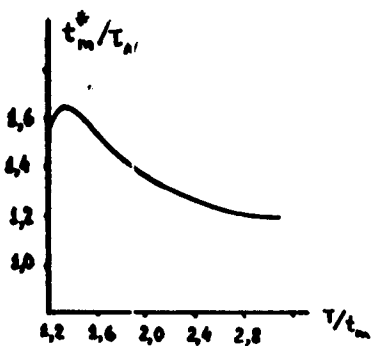


Рис. 10

замедлению установления максимальной величины суммарного дипольного момента атомов, следовательно, к увеличению времени задержки импульса t_m^* . А когда T приближается к t_D , существенную роль начинает играть другой фактор - дефазировка диполей атомов. Так как такая дефазировка вызывает затухание суммарного дипольного момента и, следовательно, стремится уменьшить интенсивность излучения по экспоненциаль-

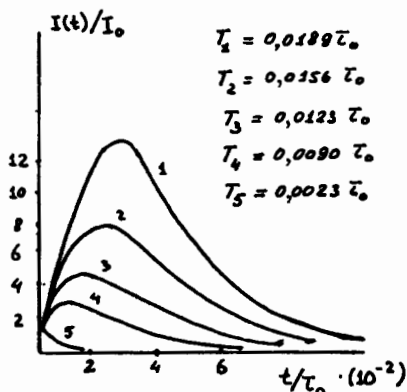


Рис. 11

ному закону, то время достижения пика t_m^* начинает уменьшаться. При этом уменьшается максимальная интенсивность, и, когда $T \approx t_D$, излучение перестает быть сверхизлучательным (см. рис. 11). Отсюда легко понять поведение функции $t_m^*(T)$, показанное на рис. 10.

Рассмотрим теперь условие применимости оценки (5.37). Нетрудно видеть, что оценка (5.28) следует из (5.37) при условии (5.30). Так что это условие есть и критерий применимости (5.37) как приближения высшего порядка. Но, с другой стороны, поскольку в реальных системах $N \gg 1$, то $\ln N \mu \gg 1$,

поэтому $t_D \gg \tau_N$. Вследствие этого оценка (5.37) хорошо описывает значение времени задержки сверхизлучательного импульса (5.24) при более слабом условии, чем условие (5.30):

$$T > t_D + 2\tau_N. \quad (5.38)$$

Численное исследование формулы (5.24), описывающей форму импульса, и оценки (5.37) подтверждают сделанный вывод (см. таблицу). Расчет показывает, что в случае $N\mu = 300$, следовательно, $t_D/\tau_0 = 0,0189$, $\tau_N/\tau_0 = 0,0033$, оценка t_m^* по формуле (5.36) довольно хорошо согласуется с точным результатом исследования формулы (5.23) для всех значений T , удовлетворяющих условию (5.38) (т.е. $T > 0,026$). Численным исследованием можно также показать, что в случае неоднородного времени жизни излучателей T порядка t_D : $T \sim t_D$ и $|\tau_N/(T - t_D)| \geq 1$, формула (5.24) описывает импульс с уменьшенной амплитудой и уменьшенным временем достижения пика (см. рис. 11, 12). На рис. 12 показано поведение импульса, полученное при численном решении уравнения (5.24) для случая $N = 2 \cdot 10^4$, $\mu = 0,69 \cdot 10^{-5}$, $\tau_0 = 167 \text{ нс}$, $T = t_D - k\tau_N$.

Заканчивая рассмотрение влияния неоднородного уширения линии на сверхизлучательный импульс, сформулируем критерии применимости полученных здесь результатов. Для простоты будем ограничиваться случаем, когда рабочий объем, в котором находятся излучатели, имеет глобообразную форму.

Как было указано, решение (5.21) для инверсии населенностей $\langle R_2(t) \rangle$ и выражение интенсивности излучения в области $t \sim T$ справедливы только тогда, когда выполняется условие $M_1 \gg M_2$.

ТАБЛИЦА

Сравнение значений времени задержки импульса t_m^* , полученных численным исследованием формулы (5.24), с оценкой (5.37), а также с оценкой (5.28) Бонифацио-Лугиано. Вычисления выполнены для случая $N_M = 300$, $t_D = 0,0119\tau_0$, $\tau_N = 0,0033\tau_0$.

$\tau_m^*/\tau_0 (\cdot 10^{-3})$	Результат численного исследования	Оценка (5.37)	Оценка (5.28) Б-Л
$T/\tau_0 (\cdot 10^{-2})$			
4,6	2,3	2,3	2,45
4,2	2,34	2,34	2,51
3,9	2,4	2,38	2,60
3,6	2,45	2,42	2,71
3,2	2,5	2,45	2,86
2,9	2,58	2,41	3,08
2,6	2,63	2,04	3,45
1,6	2,40	неприменима	неприменима

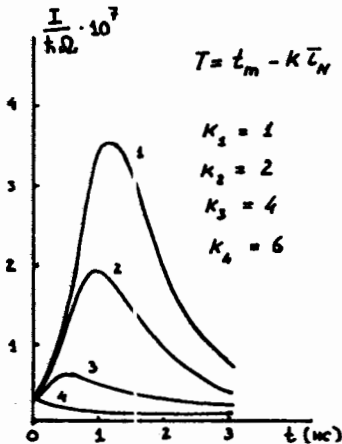


Рис. 12

С другой стороны, при дополнительном предположении (5.30) для времени задержки импульса t_m^* справедливы оценки (5.28) или (5.36), а для длительности импульса τ_N^* - оценка (5.27). Если подставим (5.28) в правую часть (5.21), то получим

$$\langle R_x(t_m^*) \rangle \approx 0,$$

откуда следует условие $M_1 \gg M_2$. Это означает, что условие $M_1 \gg M_2$ автоматически выполняется, если выполняется условие (5.30). Следовательно, общим критерием применимости полученных результатов является выполнение соотношения (5.30):

$$2\tau_N / (T - t_D) \ll 1.$$

Здесь величины t_D и τ_N определяют время задержки и длительность импульса при отсутствии неоднородного уширения линии соответственно. Вид фактора μ был приближенно получен Релером и Эберли¹⁰⁸ для различных макроскопических конфигураций формы рабочего объема. Для круглого длинного цилиндра с числом Френеля порядка 1 хорошей аппроксимацией служит выражение

$$\alpha \approx \frac{3}{8\pi} \frac{\lambda^2}{A}, \quad A \gg \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2, \quad \frac{A}{L\lambda} \approx 1. \quad (5.39)$$

Здесь A , L - соответствующие площадь основания и длина цилиндра, λ - длина волны излучения. Имеем^{21,30,108/}

$$\tau_N = \frac{8\pi\tau_0}{3\rho\lambda^2L}, \quad (5.40)$$

$$t_D = \tau_N \cdot \varrho_1 \frac{3\rho\lambda^2L}{8\pi},$$

где $\rho = N/V$ - плотность излучателей в рабочем объеме $V = AL$. Отсюда можно переписать условие применимости (5.30) в виде

$$L \gg L_T \equiv \frac{8\pi}{3\lambda^2\rho} \mathcal{K}\left(\frac{\tau_0}{T}\right) \quad (5.41)$$

или

$$\rho \gg \rho_T \equiv \frac{8\pi}{3\lambda^2L} \mathcal{K}\left(\frac{\tau_0}{T}\right). \quad (5.42)$$

Здесь функция $\mathcal{K}\left(\frac{\tau_0}{T}\right)$ определяется как решение уравнения

$$\frac{\mathcal{K}}{\varrho_1 \mathcal{K} + 2} = \frac{\tau_0}{T}, \quad \mathcal{K} > 1/e,$$

в случае, когда такое решение существует (т.е. когда $T < e\tau_0$). В противном случае (когда $T > e\tau_0$) имеем просто $\mathcal{K} = 1/e$.

Везде мы предполагали, что число излучателей достаточно большое, чтобы выполнялось условие $N\alpha \gg 1$. А в случае круглого длинного цилиндра с числом Френеля порядка 1 это условие согласно (5.39) эквивалентно следующему:

$$\frac{3\rho\lambda^2L}{8\pi} \gg 1. \quad (5.43)$$

Последнее условие, которое необходимо учитывать, связано с тем, что при получении уравнения (5.24) на основе кинетических уравнений в предыдущем разделе мы использовали ряд упрощений, которые справедливы только для слабо меняющегося в пределах образца поля. Поэтому длительность процесса, характеризуемая величиной τ_N , должна быть намного больше характерного времени изменения амплитуды поля в образце $\tau_c = L/c$, что означает критерий Ареки-Куртенса^{/126/}

$$L < c\tau_N \quad (5.44)$$

для применимости полученных результатов. Используя явное выражение τ_N , можно переписать (5.44) в виде

$$L < L_{кр} \equiv \sqrt{\frac{15}{3} \frac{c\tau_0}{\beta\lambda^2}}.$$

"Настоящее есть следствие прошедшего, а потому непрестанно обращай взор свой на зады, чем сбережешь себя от знатных ошибок".

"Сочинения Козьмы Прутков"

Как указывалось во введении, простейший способ приготовления начального состояния сверхизлучающей системы связан с использованием лазерной накачки в трехуровневой схеме (рис. 2). При рассмотрении такого процесса влияние накачки на характер последующего сверхизлучения обычно не рассматривается. Так можно поступать в тех случаях, когда длительность накачки τ_p мала по сравнению с длительностью сверхизлучательного импульса τ_R . Однако в целом ряде экспериментально реализованных ситуаций $\tau_p \approx \tau_R$. В этой связи учет влияния импульса накачки на процесс сверхизлучения представляется важным /68, 69, 115, 116/.

Следующей работе /116/, рассмотрим трехуровневую систему, представленную на рис. 13. Используя формализм, развитый для описания многоуровневых систем (см. раздел 1, формулы (1.15), (1.16)), представим гамильтониан такой системы в следующем виде:

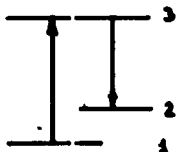


Рис. 13

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_f \sum_{\alpha} \mathcal{E}_\alpha R_{\alpha\alpha}(f) + \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k + \\
 & + \sum_{f,k} g_k \{ e^{i\vec{k}\vec{x}_f} R_{23}(f) a_k + e^{-i\vec{k}\vec{x}_f} R_{32}(f) a_k^\dagger \} + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_f \hbar \omega_k(t) \{ e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\vec{x}_f)} R_{31}(f) + e^{i(\omega_k t - \vec{k}\vec{x}_f)} R_{13}(f) \}.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Такой гамильтониан описывает когерентную накачку с частотой ω_0 и волновым вектором \vec{k}_0 на переходе $1 \leftrightarrow 3$ (ср. (1.21)) и коллективное спонтанное излучение на переходе $2 \leftrightarrow 3$. Иначе говоря, спонтанным излучением на переходе $1 \leftrightarrow 3$ мы пренебрегаем. Здесь \mathcal{E}_α - энергия соответствующего уровня и операторы $R_{\alpha\beta}(f)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[R_{\alpha\beta}(f), R_{\alpha'\beta'}(f')] = R_{\alpha\beta}(f) \delta_{\beta\alpha'} \delta_{f'f} - R_{\alpha'\beta'}(f) \delta_{\alpha\beta} \delta_{ff'}. \quad (6.2)$$

Стандартным образом введем коллективные переменные (см. (1.11)):

$$R_{\alpha\beta}(\nu) = \sum_f R_{\alpha\beta}(f) e^{i\vec{\nu}\vec{x}_f}, \quad R_{\beta\alpha}(\nu) = \sum_f R_{\beta\alpha}(f) e^{-i\vec{\nu}\vec{x}_f}, \quad R_{\alpha\alpha} = \sum_f R_{\alpha\alpha}(f), \quad \alpha > \beta. \quad (6.3)$$

Так как взаимодействие в гамильтониане (6.1) линейно по операторам фотонов α^+ , α , то можно воспользоваться методом, изложенным в разделе III, и получить следующую точную иерархию кинетических уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \langle \mathcal{O}(t) \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [H_M(t), \mathcal{O}(t)] \rangle = \\ & = \sum_k \sum_{\vec{\nu}\vec{\nu}'} \frac{g_k^2}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \left\{ e^{-i\omega_k(t-\tau)} \varphi(\vec{k}-\vec{\nu}) \varphi^*(\vec{k}-\vec{\nu}') \langle [R_{22}(\nu; t), \mathcal{O}(t)] R_{21}(\nu; \tau) \rangle + \right. \\ & \left. + e^{i\omega_k(t-\tau)} \varphi(\vec{k}-\nu) \varphi^*(\vec{k}-\vec{\nu}') \langle R_{22}(\nu; \tau) [\mathcal{O}(t), R_{23}(\nu; t)] \rangle \right\}, \quad (6.4) \end{aligned}$$

описывающую процессы спонтанного излучения. Оператор H_M здесь содержит помимо энергии свободных излучателей еще и энергию накачки, а $\varphi(\cdot)$ - дифракционная функция - определяется обычным образом. Теперь воспользуемся приближением, аналогичным выбранному в разделе IV:

$$\begin{cases} R_{23}(\nu; \tau) = R_{23}(\nu; t) e^{i\omega_{23}(t-\tau)} e^{-(t-\tau)/2T}, \\ R_{32}(\nu; \tau) = R_{32}(\nu; t) e^{-i\omega_{23}(t-\tau)} e^{-(t-\tau)/2T}. \end{cases}$$

Выполняя теперь в правой части (6.4) интегрирование по τ и пренебрегая, как и раньше, вкладом дифракционных членов при $\vec{\nu} \neq \vec{\nu}'$, получаем уравнение, аналогичное (4.1):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \langle \mathcal{O}(t) \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [H_M(t), \mathcal{O}(t)] \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{\nu}} \left\{ \Gamma_{\vec{\nu}} \langle [R_{22}(\nu; t), \mathcal{O}(t)] R_{21}(\nu; t) \rangle + \right. \\ & \left. + \Gamma_{\vec{\nu}}^* \langle R_{22}(\nu; t) [\mathcal{O}(t), R_{23}(\nu; t)] \rangle \right\}. \quad (6.5) \end{aligned}$$

Кинетические коэффициенты $\Gamma_{\vec{\nu}}$ определяются здесь так же, как и в разделе (IV) (формулы (4.4)) и имеют аналогичный смысл.

Для простоты ограничимся в (6.5) рассмотрением только одной моды ν

(обобщение на многомодовый случай без труда может быть получено по аналогии с разделами 1У и У).

С помощью унитарного преобразования, задаваемого оператором

$$U = \prod_f \exp\{i(\omega_f t - \vec{k}_f \cdot \vec{x}_f) R_{ad}(f)\},$$

преобразуем гамильтониан M -системы

$$H_M = \sum_a \varepsilon_a R_{ad} + \frac{1}{2} \hbar \omega_R(b) \sum_f \{\psi(\vec{k} - \vec{\nu}) R_{31}(\nu) e^{-i\omega_f t} + \text{в.с.}\}$$

к виду (в одномодовом случае)

$$H_M = \frac{1}{2} \hbar \omega_R(t) (R_{31} + R_{13}).$$

Теперь из (6.5) получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle R_{11} \rangle &= \frac{i\omega_R(t)}{2} (\langle R_{31} \rangle - \langle R_{13} \rangle), \\ \frac{d}{dt} \langle R_{22} \rangle &= \gamma \langle R_{32} R_{23} \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle R_{33} \rangle &= -\gamma \langle R_{32} R_{23} \rangle - \frac{i\omega_R(t)}{2} (\langle R_{31} \rangle - \langle R_{13} \rangle), \\ \frac{d}{dt} \langle R_{13} \rangle &= \frac{i\omega_R(t)}{2} (\langle R_{33} \rangle - \langle R_{11} \rangle) - \frac{\gamma - i\Omega}{2} \langle R_{12} R_{23} \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle R_{22} \rangle &= \frac{i\omega_R(t)}{2} \langle R_{12} \rangle + \frac{\gamma + i\Omega}{2} \langle R_{32} (R_{33} - R_{11}) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle R_{12} \rangle &= \frac{i\omega_R(t)}{2} \langle R_{22} \rangle + \frac{\gamma + i\Omega}{2} \langle R_{32} R_{13} \rangle. \end{aligned} \right. \quad (6.6)$$

Здесь в первых трех уравнениях для населенностей уровней в правой части стоит парная корреляционная функция $\langle R_{32} R_{23} \rangle$, уравнение (6.5) для которой имеет вид

$$\frac{d}{dt} \langle R_{32} R_{23} \rangle = \gamma \langle R_{32} (R_{33} - R_{11}) R_{23} \rangle + \frac{i\omega_R(t)}{2} (\langle R_{12} R_{23} \rangle - \langle R_{22} R_{13} \rangle). \quad (6.7)$$

В силу иерархической структуры (6.5) в правой части (6.7) стоят уже тройные корреляторы, для которых мы воспользуемся следующим расцеплением^{116/}

$$\langle R_{32} (R_{33} - R_{11}) R_{23} \rangle = \langle R_{32} R_{23} (R_{33} - R_{11} - 2) \rangle \approx \langle R_{32} R_{23} \rangle \langle R_{33} - R_{11} - 2 \rangle.$$

Кроме того, в членах, относящихся к когерентной накачке в (6.7), пренебрежем коллективными эффектами. С учетом перестановочных соотношений (6.2) имеем

$$\langle R_{22} R_{33} \rangle \approx \langle R_{43} \rangle, \quad \langle R_{32} R_{21} \rangle \approx \langle R_{31} \rangle.$$

Теперь (6.7) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \langle R_{32} R_{23} \rangle = \gamma \langle (R_{33} - R_{22} - 2) \rangle \langle R_{32} R_{23} \rangle + \frac{i\omega_R(t)}{2} \langle (R_{23} - R_{11}) \rangle. \quad (6.8)$$

Рассмотрим сначала достаточно раннюю стадию процесса, когда населенность верхнего уровня преобладает над населенностью промежуточного уровня ($\langle R_{33} \rangle \gg \langle R_{22} \rangle$) /68,116/. Тогда

$$\frac{d}{dt} \langle R_{22} \rangle = \langle R_{22} \rangle = 0.$$

Теперь из (6.6) получаем замкнутую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle R_{11} \rangle = \frac{i\omega_R(t)}{2} (\langle R_{31} \rangle - \langle R_{13} \rangle), \\ \frac{d}{dt} \langle R_{13} \rangle = \frac{i\omega_R(t)}{2} (N - 2\langle R_{11} \rangle), \\ \frac{d}{dt} \langle R_{33} \rangle = -\frac{i\omega_R(t)}{2} (\langle R_{31} \rangle - \langle R_{13} \rangle). \end{cases} \quad (6.9)$$

Выберем начальные условия в виде

$$\langle R_{11}(0) \rangle = N, \quad \langle R_{13}(0) \rangle = \langle R_{33}(0) \rangle = 0,$$

соответствующем полной населенности нижнего уровня. Тогда

$$\langle R_{11}(t) \rangle = N \cos^2 \frac{\Phi(t)}{2}, \quad \langle R_{33}(t) \rangle = N \sin^2 \frac{\Phi(t)}{2}, \quad \langle R_{31}(t) \rangle = -\frac{iN}{2} \sin \Phi(t), \quad (6.10)$$

где $\Phi(t)$ - площадь импульса накачки:

$$\Phi(t) = \int_0^t \omega_R(t') dt'.$$

В простейшем случае прямоугольного импульса накачки, когда $\frac{d}{dt} \omega_R(t) = 0$, имеем

$$\Phi(t) = \omega_R \cdot t, \quad \omega_R = \text{const} \left(\frac{E_0 d_{31}}{\hbar} \right), \quad (6.11)$$

где E_0 - амплитуда поля накачки и d_{31} - матричный элемент оператора

ра дипольного момента перехода $1 \leftrightarrow 3$. Уравнение (6.8) теперь принимает вид (для случая (6.11))

$$\frac{d}{dt} Y = \frac{\chi N}{2} (1 - \cos \omega_R t) Y + \frac{\omega_R N}{2} \sin \omega_R t, \quad (6.12)$$

где $Y = \langle R_{22} R_{23} \rangle$. Его решение с начальным условием $Y(0) = 0$ есть

$$Y(t) = \frac{\omega_R N}{2} \int_0^t \exp \left\{ \frac{t-t'}{\tau_R^*} - \frac{\sin \omega_R (t-t')}{\tau_R^* \omega_R} \right\} \sin \omega_R t' dt', \quad (6.13)$$

где

$$\tau_R^* = \frac{2}{\chi N}.$$

Из (6.13), в частности, следует, что в самой начальной стадии процесса

$$\langle R_{22} R_{23} \rangle \approx \langle R_{21} \rangle = N - \langle R_{33} \rangle.$$

Рассмотрим теперь другую стадию процесса, когда действие импульса накачки в системе уже закончилось ($t > \tau_p$). Теперь из уравнений (6.6)–(6.8) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle R_{22} \rangle &= \gamma Y, \\ \frac{d}{dt} \langle R_{33} \rangle &= -\gamma Y, \\ \frac{d}{dt} Y &= \gamma (\langle R_{33} \rangle - \langle R_{22} \rangle - 2) Y. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Вводя новую переменную $X = (\langle R_{33} \rangle - \langle R_{22} \rangle) / 2$, можно переписать (6.14) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} X = -\gamma Y, \quad \frac{d}{dt} Y = -2\gamma Y + 2\gamma X Y. \quad (6.15)$$

Соответствующие начальные условия есть

$$\begin{aligned} X_0 &= X(\tau_p) = \frac{N}{2} \sin^2 \frac{\omega_R \tau_p}{2}, \\ Y_0 &= Y(\tau_p) = \frac{\omega_R N}{2} \int_0^{\tau_p} \exp \left\{ \frac{\tau_p - t'}{\tau_R^*} - \frac{\sin \omega_R (\tau_p - t')}{\tau_R^* \omega_R} \right\} \sin \omega_R t' dt'. \end{aligned}$$

Уравнения (6.15) имеют интеграл движения

$$Y + X^2 - 2X = M \equiv Y_0 + X_0^2 - 2X_0.$$

Теперь вместо (6.15) имеем

$$\frac{d}{dt} X = -\gamma(M + 2X - X^2),$$

откуда

$$\left| \frac{X - X_1}{X - X_2} \right| = e^{\gamma(X_1 - X_2)(t - \tilde{t}_0)},$$

где $X_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + M}$. Как нетрудно видеть, область решений $X > X_2$ соответствует процессам излучения^{/116/}. В этой области

$$X = X_2 + \frac{X_1 - X_2}{1 + e^{\gamma(X_1 - X_2)(t - \tilde{t}_0)}}. \quad (6.16)$$

Параметр \tilde{t}_0 определяется из начальных условий. Как нетрудно видеть, временем задержки в рассматриваемом случае будет величина $t_D = \tilde{t}_0 - t_p$, определяемая соотношением

$$t_D = \frac{1}{\gamma(X_1 - X_2)} \ln \frac{X_0 - X_2}{X_1 - X_0}. \quad (6.17)$$

Соответствующая интенсивность коллективного спонтанного излучения есть

$$I(t) = -\frac{dX(t)}{dt} = \frac{\gamma(X_1 - X_2)^2}{4} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\gamma}{2} (X_1 - X_2) (t - t_D) \right\}. \quad (6.18)$$

Из определения параметров X_1, X_2, γ и g нетрудно видеть, что выражение (6.18) содержит сверхизлучательное слагаемое, пропорциональное N^2 .

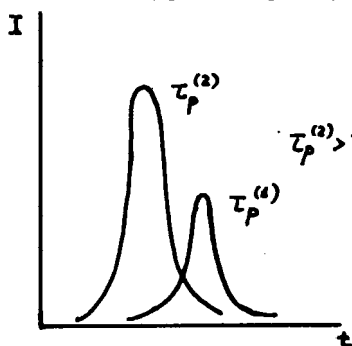


Рис. 14.

Таким образом, параметры импульса накачки определяют величину интенсивности, время задержки и длительность сверхизлучательного импульса (см. рис. 14).

Другой важной характеристикой сверхизлучательного процесса является угол Блоха (см. раздел У), который мы введем соотношением

$$|R_{22}| = \frac{1}{2} N \sin \Theta.$$

Если считать, что непосредственно после окончания накачки этот угол еще мал, то

$$|R_{22}(t_p)| \approx \frac{1}{2} N \Theta(t_p).$$

Тогда из (6.13) имеем

$$\Theta_P(\tau_P) = \frac{1}{(N/2)^{1/2}} \left(\int_0^{\tau_P} \exp \left\{ \frac{\tau_P - t'}{\tau_R} - \frac{\sin \omega_R (\tau_P - t')}{\tau_R \omega_R} \right\} \frac{\omega_R}{2} \sin \omega_R t' dt' \right)^{1/2} \quad (6.19)$$

В случае очень коротких импульсов накачки ($\tau_P \ll \tau_R$) из (6.19) имеем

$$\Theta(\tau_P) = \frac{1}{(N/2)^{1/2}} \exp \left\{ \frac{\tau_P}{4\tau_R} - \frac{\sin(\omega_R \tau_P/2)}{2\tau_R \omega_R} \right\} \sin \frac{\omega_R \tau_P}{2} \quad (6.20)$$

Необходимо подчеркнуть, что соотношения (6.19), (6.20) отличаются от соотношений работы^{/68/}, полученных в приближении среднего поля (все парные корреляционные функции представлены в виде произведения функций). Как мы увидим, соотношения (6.19), (6.20) дают лучшее согласие с экспериментом, чем упомянутые результаты работы^{/68/}. Измерение начального значения угла Блоха проводилось в работе^{/13/} для паров C_3 при $N = 2 \cdot 10^8$, $\tau_R = 0,4$ нс, $\tau_P = 2$ нс. Для $\Theta_0 = \Theta(\tau_P)$ было получено значение $5 \cdot 10^{-4}$. Расчет по формуле (6.19) дает

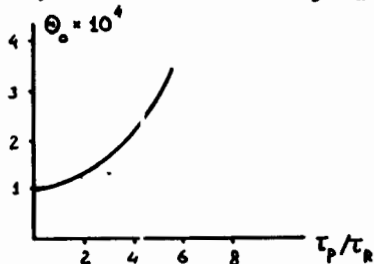


Рис. 15

$\Theta_0 = 2,7 \cdot 10^{-4}$, тогда как результат работы^{/68/} $\Theta_0 = 1,0 \cdot 10^{-4}$. (По другим оценкам^{/117/} $\Theta_0 = 2,3 \cdot 10^{-4}$).

Результаты численного расчета начального угла Блоха и времени задержки от длительности импульса накачки для системы с числом излучателей, соответствующим экспериментальной ситуации^{/13/}, приведены на рис. 15 и 16.

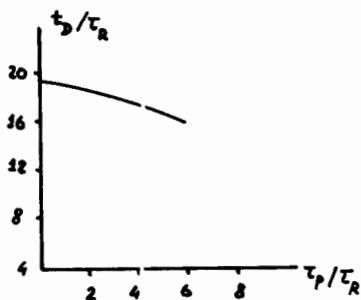


Рис. 16

Подчеркнем, что отличительной чертой сверхизлучательного процесса, реализуемого по схеме, представленной на рис. 13, является наличие ненулевой макроскопической поперечной поляризации, представляемой функцией $\langle R_{22} R_{23} \rangle$, уже на той стадии процесса, которая непосредственно следует за окончанием импульса накачки.

"Краски тоже, все это просто у вас,
а близко, очень близко к натуре".

И.Е.Репин "Далекое близкое"

В предыдущем разделе мы пренебрегли возможностью сверхизлучения на переходе между нижним и верхним уровнями. Вместе с тем из эксперимента известно, что в трехуровневых системах может наблюдаться двухцветное сверхизлучение, весьма любопытное явление конкуренции импульсов разной частоты^{/53/} и некоторые другие специфические особенности^{/118,119/}. Явление конкуренции импульсов описывалось на основе полуфеноменологического подхода в работах^{/120,121/}. Последовательная теория этого явления, основанная на иерархиях кинетических уравнений, развивалась в работах^{/107,115,122/}, которым мы и будем здесь следовать.

Пренебрегая процессами накачки, рассмотрим трехуровневую систему с запрещенным переходом между нижним и средним уровнями, характеризующую гамильтонианом

$$H = \sum_{\alpha, \beta} \epsilon_{\alpha} R_{\alpha\alpha} + \sum_k \hbar \omega_k a_k^+ a_k + \sum_{k_1, k_2} \sum_{j_1, j_2} g_{j_1 j_2}^{(k)} \left\{ e^{i\vec{k}\vec{x}_1} R_{j_1 j_2}(f) a_k + e^{-i\vec{k}\vec{x}_2} R_{j_2 j_1}(f) a_k^+ \right\}. \quad (7.1)$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в предыдущем разделе. Точная иерархия кинетических уравнений для задачи с гамильтонианом (7.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle O(t) \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [H_M(t), O(t)] \rangle = \\ = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j_1, j_2} g_{j_1 j_2}(k) g_{j_2 j_1}(k) \int_{t_0}^t d\tau \sum_{j_1', j_2'} \left\{ e^{-i\omega_k(t-\tau)} e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_1')} \times \right. \\ \left. \times \langle [R_{j_1 j_2}(f; t), O(t)] R_{j_2 j_1}(f'; \tau) \rangle + e^{i\omega_k(t-\tau)} e^{-i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_1')} \right. \\ \left. \times \langle R_{j_1 j_2}(f; \tau) [O(t); R_{j_2 j_1}(f'; t)] \rangle \right\}; \quad H_M = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} R_{\alpha\alpha}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Вновь воспользуемся марковским пренебрежением. Лоренцево уширение будем считать отсутствующим ($\Gamma^{-1} = 0$):

$$\begin{cases} R_{\beta\beta}(f; \tau) = R_{\beta\beta}(f; t) e^{i\omega_{\beta\beta}(t-\tau)}, \\ R_{\beta\beta'}(f; \tau) = R_{\beta\beta'}(f; t) e^{-i\omega_{\beta\beta'}(t-\tau)}. \end{cases}$$

В этом случае из (7.2) имеем следующую иерархию марковских уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathcal{O} \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [H_M, \mathcal{O}] \rangle = \\ = \sum_{\beta=1}^4 \frac{1}{2} \Gamma_{\beta\beta} \sum_{f, f'} C_{ff'}^{\beta\beta} \left\{ \langle [R_{\beta\beta}(f), \mathcal{O}] R_{\beta\beta}(f') \rangle + \langle R_{\beta\beta}(f) [\mathcal{O}, R_{\beta\beta}(f')] \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где

$$\begin{cases} \Gamma_{\beta\beta} = \frac{4}{3} \frac{\omega_{\beta\beta}^2 d^2}{\hbar c^3}, \\ C_{ff'}^{\beta\beta} = \sum_{k_{\beta\beta}} e^{+i\vec{k}_{\beta\beta}(\vec{x}_f - \vec{x}_{f'})}, \\ k_{\beta\beta} = \omega_{\beta\beta}/c. \end{cases}$$

При выводе марковских уравнений (7.3) мы учли малость корреляторов типа $\langle R_{\beta\beta}(f) [\mathcal{O}, R_{\beta\beta'}(f')] \rangle$ при $\beta \neq \beta'$.

Подставляя в (7.3) $\langle \mathcal{O} \rangle = \sum_f \langle R_{\beta\beta}(f) \rangle (\equiv X_\beta)$, имеем

$$\frac{d}{dt} X_\beta = \tau_{\beta\beta}^{-1} X_\beta + \tau_{\beta\beta}^{-1} S_{\beta\beta}, \quad \beta = 1, 2, \quad (7.4)$$

где $\tau_{\beta\beta} \equiv \Gamma_{\beta\beta}^{-1}$ — время спонтанного распада на переходе $\beta \leftrightarrow 3$
и

$$S = \sum_{\substack{f, f' \\ (f \neq f')}} C_{ff'}^{\beta\beta} \langle R_{\beta\beta}(f) R_{\beta\beta}(f') \rangle (\equiv \sum_{ff'} S_{ff'}).$$

Для парных корреляторов S из (7.3) в свою очередь имеем

$$\frac{d}{dt} S_{\beta\beta} = \tau_{\beta\beta}^{-1} (X_\beta - X_\beta) (S_{\beta\beta} + X_\beta) - \tau_{\alpha\beta}^{-1} (S_{\beta\beta} - F), \quad \alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1, 2, \quad (7.5)$$

где

$$\begin{aligned} F = \sum_{f, f', f''} \left\{ C_{ff'}^{\alpha\beta} C_{ff''}^{\beta\alpha} \langle R_{\alpha\alpha}(f) R_{\beta\beta}(f') R_{\alpha\alpha}(f'') \rangle + \right. \\ \left. + C_{ff}^{\alpha\beta} C_{ff'}^{\beta\alpha} \langle R_{\alpha\alpha}(f) R_{\alpha\alpha}(f) R_{\beta\beta}(f') \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Время коллективного распада τ_{R, β_3} определяется соотношением

$$\tau_{R, \beta_3} = \tau_{\beta_3} / \lambda_{\beta_3}, \quad (7.6)$$

где λ_{β_3} - собственное значение матрицы взаимодействия $C_{ff'}$:

$$\sum_{f'} C_{ff'} \psi_{\lambda_{\beta_3}}(\vec{x}_{f'}) = \lambda_{\beta_3} \psi_{\lambda_{\beta_3}}(\vec{x}_f),$$

рассматривается в работах /123, 124/. Для излучающей системы иглообразной формы в предельных случаях больших и малых чисел Френеля \mathcal{F} все наибольшие собственные значения λ_{β_3} вырождены с кратностью /123/

$$n_{\beta_3} = \begin{cases} \mathcal{F}^{-1} & (\mathcal{F} \ll 1), \\ 2\mathcal{F} & (\mathcal{F} \gg 1) \end{cases},$$

и равны соответственно

$$\lambda_{\beta_3}^{\circ} = \begin{cases} \frac{N\mathcal{F}}{k_{\beta_3} L} & (\mathcal{F} \ll 1), \\ \frac{N\mathcal{F}}{k_{\beta_3}^2 A} & (\mathcal{F} \gg 1), \end{cases}$$

где L - длина излучающей системы и A - площадь ее поперечного сечения. Все остальные собственные значения матрицы взаимодействий много меньше $\lambda_{\beta_3}^{\circ}$. Как нетрудно видеть, параметр $\lambda_{\beta_3}^{\circ}$ определяет число приосевых мод, принимающих участие в процессе коллективного распада для иглообразного излучающего объекта.

Вернемся к уравнению (7.5). В правой части стоит трехчастичная корреляционная функция, для которой мы воспользуемся стандартным расщеплением /11b, 122/ и учтем перестановочные соотношения (6.2). В результате уравнения (7.4), (7.5) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X_{\beta} = \tau_{\beta_3}^{-1} X_{\beta} + \tau_{\beta_3}^{-1} \sum_{\lambda_{\beta_3}} \lambda_{\beta_3} S(\lambda_{\beta_3}), \\ \frac{d}{dt} S(\lambda_{\beta_3}) = N^{-1} \lambda_{\beta_3} \tau_{\beta_3}^{-1} \langle (R_{\beta_3} - R_{\beta_3}) \rangle \{ N^{-1} \langle R_{\beta_3} \rangle + S(\lambda_{\beta_3}) \}. \end{cases} \quad (7.7)$$

где введено обозначение

$$S(\lambda_{\beta_3}) = \sum_{\substack{f, f' \\ f \neq f'}} S_{ff'} \psi_{\lambda_{\beta_3}}(\vec{x}_f) \psi_{\lambda_{\beta_3}}(\vec{x}_{f'}).$$

Соотношения (7.7) представляют собой уже замкнутую систему уравнений.

С учетом сделанных замечаний для иглообразного кристалла можно положить

$$\sum_{\lambda_{\beta_3}} \lambda_{\beta_3} S(\lambda_{\beta_3}) \approx \lambda_{\beta_3}^{\circ} n_{\beta_3} S(\lambda_{\beta_3}^{\circ}).$$

Поэтому вместо (7.7) имеем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X_{\beta} = \tau_{\beta 3}^{-1} (N - X_1 - X_2) + \tau_{R, \beta 3}^{-1} n_{\beta} S_{\beta}, \\ \frac{d}{dt} S_{\beta} = (N \tau_{R, \beta 3})^{-1} (N - 2X_{\beta} - X_{\alpha}) \{ N^{-1} (N - X_1 - X_2) + S_{\beta} \}, \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad (7.8)$$

где $S_{\beta} \equiv S(\lambda_{\beta}^0)$.

Для системы уравнений (7.8) выберем начальные условия, соответствующие состоянию с полностью заселенным верхним уровнем и нулевой макроскопической поляризацией:

$$X_1(0) = X_2(0) = 0, \quad X_3(0) = N, \quad S_1(0) = S_2(0) = 0. \quad (7.9)$$

К сожалению, точное решение системы дифференциальных уравнений (7.8) с начальными условиями (7.9) не известно. Поэтому дальнейшее обсуждение мы проведем на основе численных результатов, полученных в работе^{/122/} для системы с параметрами $N = 10^{14}$, $L = 10 \text{ см}$, $A = 1 \text{ см}^2$, $\omega_{23} = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, $\omega_{13} = 1,1 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Выполненные на ЭВМ расчеты для интенсивностей

$$I_{\beta}(t) = \hbar \omega_{\beta 3} \frac{d}{dt} \langle a_{\beta}^+ a_{\beta} \rangle = \hbar \omega_{\beta 3} \frac{d}{dt} X_{\beta}$$

в зависимости от приведенного времени $\tau = t / \tau_{R, 23}$ представлены на рис. 17.

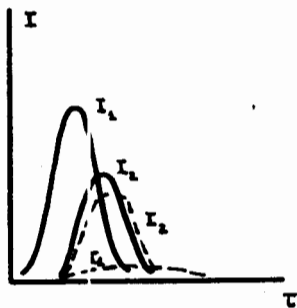


рис. 17

Сплошные линии соответствуют выбору параметров переходов между рабочими уровнями следующего вида: $\tau_{23} = 1,3 \tau_{R, 23}$. Для пунктирных линий $\tau_{23} = 1,05 \tau_{R, 23}$. Проведенный численный анализ показывает сильную конкуренцию импульсов разной частоты в зависимости от вероятностей спонтанного распада для рабочих переходов $\Gamma_{\beta 3}$. Как нетрудно видеть, коллективное спонтанное излучение на переходе с большей вероятностью спонтанного распада практически полностью подавляет коллективное излучение на переходе с меньшей вероятностью уже при

$$\frac{\Gamma_{23}}{\Gamma_{13}} \geq 1,3.$$

Рассмотрим теперь более общую трехуровневую систему, в которой разрешены все переходы^{/115/} (см. рис. 18).

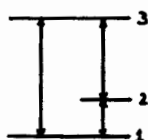


Рис. 18

Возможность практической реализации такой системы мы здесь обсуждать не будем. (Интересующихся многофотонными резонансами в многоуровневых системах отсылаем к монографии^[48/]).

Рассматриваемой системе можно сопоставить гамильтониан вида^[107,115/]

$$H = \sum_{d=1}^3 E_d R_{dd} + \sum_k \hbar \omega_k a_k^+ a_k + \sum_{\substack{\kappa, f \\ (d \neq \beta)}} g_{d\beta}^{(\kappa)} \left\{ e^{i\vec{k}\vec{r}_d} R_{\beta d}(f) a_k + e^{-i\vec{k}\vec{r}_d} R_{d\beta}(f) a_k^+ \right\}. \quad (7.10)$$

Перейдем к представлению коллективных переменных для операторов излучателей и воспользуемся марковским приближением

$$R_{d\beta}(\nu; \tau) = R_{d\beta}(\nu; t) e^{i\omega_{d\beta}(t-\tau)} e^{-(t-\tau)/2T}$$

В результате с помощью общих методов, изложенных в разделах III и IV, получаем иерархию марковских уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathcal{O} \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [H_M, \mathcal{O}] \rangle = \\ = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \sum_{d\beta} \Gamma_{d\beta}(\nu) \left\{ \langle [R_{\beta d}(\nu), \mathcal{O}] R_{d\beta}(\nu) \rangle + \langle R_{\beta d}(\nu) [\mathcal{O}, R_{d\beta}(\nu)] \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Здесь, как и прежде, мы пренебрегли вкладом корреляторов при $\nu \neq \nu'$ и

$$\Gamma_{d\beta}(\nu) = \gamma_{d\beta}(\nu) - i Q_{d\beta}(\nu),$$

$$\gamma_{d\beta}(\nu) = \frac{4TV}{\hbar^2(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{g_{d\beta}^2(\kappa) |\Psi(\vec{k}-\vec{\nu})|^2}{1 + 4T^2(\omega_k - \omega_{d\beta})^2},$$

$$Q_{d\beta}(\nu) = \frac{8T^2V}{\hbar^2(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{g_{d\beta}^2(\kappa) |\Psi(\vec{k}-\vec{\nu})|^2 (\omega_k - \omega_{d\beta})}{1 + 4T^2(\omega_k - \omega_{d\beta})^2},$$

где $\Psi(\cdot)$ - дифракционная функция. Положим $\mathcal{O} = R_{d\alpha}$ и перейдем к простейшему трехмодовому приближению. Имеем

$$\frac{d}{dt} \langle R_{\alpha\alpha} \rangle = \sum_{\beta > \alpha} \gamma_{\alpha\beta} \langle R_{\beta\alpha} R_{\alpha\beta} \rangle - \sum_{\beta < \alpha} \gamma_{\alpha\beta} \langle R_{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} \rangle. \quad (7.12)$$

Для парных функций, стоящих в правой части (7.12), с помощью (7.11) получаем

$$\frac{d}{dt} \langle R_{\beta\alpha} R_{\alpha\beta} \rangle = \gamma_{\alpha\beta} \langle R_{\beta\alpha} (R_{\beta\beta} - R_{\alpha\alpha}) R_{\alpha\beta} \rangle. \quad (7.13)$$

Для тройных корреляторов воспользуемся расщеплением^{/115/}

$$\begin{aligned} \langle R_{\beta\alpha} (R_{\beta\beta} - R_{\alpha\alpha}) R_{\alpha\beta} \rangle &= \langle R_{\beta\alpha} R_{\alpha\beta} (R_{\beta\beta} - R_{\alpha\alpha} - 2) \rangle \approx \\ &\approx \langle R_{\beta\alpha} R_{\alpha\beta} \rangle \langle (R_{\beta\beta} - R_{\alpha\alpha} - 2) \rangle. \end{aligned}$$

С помощью этого расщепления из (7.12) и (7.13) получаем замкнутую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} X_1 &= \gamma_{13} Y_{13} + \gamma_{12} Y_{12}, \\ \frac{d}{dt} X_2 &= \gamma_{23} Y_{23} - \gamma_{12} Y_{12}, \\ \frac{d}{dt} X_3 &= -\gamma_{13} Y_{13} - \gamma_{23} Y_{23}, \\ \frac{d}{dt} Y_{13} &= \gamma_{13} (X_3 - X_1 - 2) Y_{13}, \\ \frac{d}{dt} Y_{23} &= \gamma_{23} (X_3 - X_2 - 2) Y_{23}, \\ \frac{d}{dt} Y_{12} &= \gamma_{12} (X_2 - X_1 - 2) Y_{12}. \end{aligned} \right. \quad (7.14)$$

Здесь введены обозначения $X_\alpha = \langle R_{\alpha\alpha} \rangle$, $Y_{\alpha\beta} = \langle R_{\beta\alpha} R_{\alpha\beta} \rangle$. Как и выше, в настоящем разделе воспользуемся результатами численного решения системы (7.14) для определения температурной зависимости интенсивностей^{/115/}. Будем считать $N=200$ и рассмотрим начальное состояние, соответствующее полностью заселенному верхнему уровню и нулевым поляризациям

$$X_1(0) = X_2(0) = 0, \quad X_3(0) = N, \quad Y_{13}(0) = Y_{12}(0) = Y_{23}(0) = 0.$$

Как показывает численный анализ^{/115/}, в зависимости от соотношения вероятностей спонтанного распада в системе возможны один, два и три коллективных импульса. В случае $\gamma_{13} = 0$ в системе происходит каскадное излучение ($3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$). При $\gamma_{12} = 0$ мы переходим к рассмотренному выше случаю системы с общим верхним уровнем. Для трех импульсов в полной системе также имеет место конкуренция импульсов в зависимости от

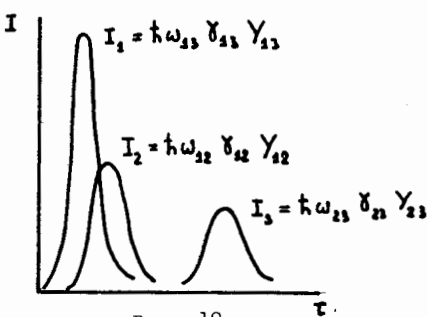


Рис. 19

соотношения между вероятностями спонтанного распада. Трехцветному сверхизлучению при $\gamma_{13} : \gamma_{12} : \gamma_{21} = 1,1:1:1,2$ соответствует рис. 19. Здесь $\tau = t \gamma_{13}$ - безразмерное время. Подчеркнем, что время задержки импульса на переходе $3 \rightarrow 2$ намного превосходит время задержки на переходах $3 \rightarrow 1$ и $2 \rightarrow 1$.

Рассмотрим теперь другое начальное состояние, когда верхний и промежуточный уровни в системе одинаково заселены:

$$X_2(0) = X_3(0) = \frac{N}{2}, \quad X_1(0) = 0, \quad Y_{13}(0) = Y_{12}(0) = Y_{23}(0) = 0.$$

Пусть для простоты $\gamma_{23} = 0$. В этом случае мы имеем трехуровневую систему с общим нижним уровнем. Результат численного расчета интенсивностей для переходов $3 \rightarrow 1$ и $2 \rightarrow 1$ приведен на рис. 20 для случая

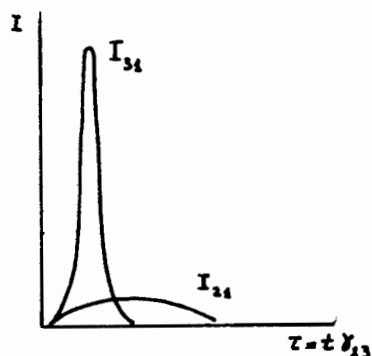


Рис. 20

$\gamma_{13} / \gamma_{12} = 1,2$. Здесь также видно, что излучение на переходе с большей вероятностью спонтанного распада замедляет и ослабляет излучение на переходе с меньшей вероятностью спонтанного распада. При этом в результате спонтанного распада система переходит в стационарное состояние, в котором часть излучателей остается на уровне 2 (см. рис. 21). Это стационарное состояние разрушается, по-видимому, за счет неколлективных (некогерентных) процессов распада.

Отметим, что предположение о возможности замедления излучения в трехуровневой системе с общим нижним уровнем высказывалось ранее^{/127/}

на основе качественного анализа симметричных свойств протяженной сверх-
излучательной системы.

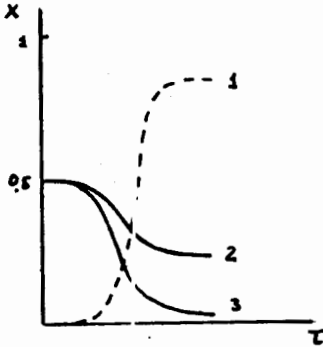


Рис. 21

В заключение настоящего раздела
вновь вернемся к уравнениям (7.8).

При $\theta_{23} = 0$ эта система имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle R_3 \rangle = -\tau_2^{-1} (N/2 + \langle R_3 \rangle) - \tau_{R_2} S, \\ \frac{d}{dt} S = 2/(N\tau_{R_2}) \cdot \langle R_3 \rangle \left\{ N^{-1} \left(\frac{N}{2} + \langle R_3 \rangle \right) + S \right\}, \end{cases}$$

где $\langle R_3 \rangle \equiv (N - 2x_1) / 2$ - средняя разность населенностей верхнего
и нижнего уровней. Система (7.14) представляет собой обобщение уравне-
ния Релера-Оберли (5.5), полученного в разделе V, и может быть ис-
пользовано для получения временной зависимости интенсивности сверхизлу-
чения в двухуровневой системе.

"Не так уж трудно построить серию выводов, в которой каждый последующий простейшим образом вытекает из предыдущего".

А.Конак Дойл "Пляшущие человечки"

В предыдущих разделах мы рассматривали сверхизлучение, связанное с однофотонными процессами. Вместе с тем в целом ряде важных с физической точки зрения случаев имеют место многофотонные процессы^{/48/}. В частности, необходимость учета таких процессов возникает при рассмотрении систем с дипольно запрещенными переходами. Так, в атомах *Na* дипольно запрещенным является переход $3S-4S$, используемый для нелинейной визуализации когерентного инфракрасного излучения^{/128,129/}. Другими примерами многофотонных процессов могут служить генерация второй и высших гармоник, генерация на суммарной и разностной частотах, комбинационное рассеяние с излучением стоксовой и антистоксовой компонент^{/48/} и т.д.

Для описания процесса в двухуровневой системе с участием произвольного числа фотонов m в разделе 1 был введен оператор (1.17). Здесь мы будем для простоты рассматривать случай, когда $m=2$. Пусть система характеризуется гамильтонианом

$$H = \sum_k i\hbar \omega_k a_k^+ a_k + \sum_f \hbar \Omega_f R_{2f} + H_{int}, \quad (8.1)$$

где

$$H_{int} = \hbar \sum_{k,f} g_k \left\{ e^{i\vec{k}\vec{x}_f} a_k b R_f(\mu) + e^{-i\vec{k}\vec{x}_f} a_k^+ b^+ R_f^*(\mu) \right\} / N. \quad (8.2)$$

Здесь $R_f(\mu) = R_f^+ + \mu R_f^-$ и операторы b^+, b описывают моду электромагнитного поля, выделенную в силу каких-либо физических причин. Такая форма гамильтониана взаимодействия (8.2) соответствует двухфотонному процессу, представленному на рис. 22. Причины, по которым некоторая мода может оказаться выделенной, мы обсудим ниже. Отметим здесь лишь то обстоятельство, что мода b^+, b может быть не только электромагнитной природы (см., например, (1.27)).

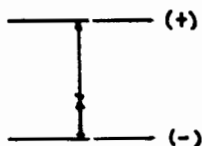


Рис. 22

Перейдем теперь к построению кинетического уравнения для системы с гамильтонианом (8.1), (8.2) на основе метода, изложенного в разделе III. Запишем уравнения движения для операторов $a_k(t)$ в представлении Гейзенберга:

$$i\hbar \frac{d}{dt} a_k = \hbar \omega_k a_k + \hbar \sum_f g_{kf} e^{-iE_f t} b^+(t) R_f^+(\mu; t) .$$

Формальное решение есть

$$a_k(t) = a_k(t_0) e^{-i\omega_k(t-t_0)} - i g_{kf} \sum_f e^{-iE_f t} \int_{t_0}^t e^{-i\omega_k(t-\tau)} b^+(\tau) R_f^+(\mu; \tau) / N .$$

Оставаясь в рамках формальной схемы, использованной нами при выводе уравнения (3.9), совершим исключение только бозонных переменных a_k^+ , a_k . В результате получим иерархию уравнений вида^{/130/}:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \langle \mathcal{O}(t) \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [\tilde{H}_M(t), \mathcal{O}(t)] \rangle = \\ & = \sum_{\substack{\nu, \nu' \\ \tau}} \int_{t_0}^t d\tau \left\{ D(\nu, \nu'; t, \tau) \langle [R_{\nu}^+(t) b(t), \mathcal{O}(t)] R_{\nu'}^-(\tau) b^+(\tau) \rangle + \right. \\ & + N(\nu, \nu'; t, \tau) \langle [[R_{\nu}^+(t) b(t), \mathcal{O}(t)], R_{\nu'}^-(\tau) b^+(\tau)] \rangle \left. \right\} + \\ & + \mu^2 \sum_{\substack{\nu, \nu' \\ \tau}} \int_{t_0}^t d\tau \left\{ D(\nu, -\nu'; t, \tau) \langle [R_{\nu}^-(t) b(t), \mathcal{O}(t)] R_{\nu'}^+(\tau) b^+(\tau) \rangle + \right. \\ & + N(-\nu, -\nu'; t, \tau) \langle [[R_{\nu}^-(t) b(t), \mathcal{O}(t)], R_{\nu'}^+(\tau) b^+(\tau)] \rangle \left. \right\} + \quad (8.3) \\ & + \mu \sum_{\substack{\nu, \nu' \\ \tau}} \int_{t_0}^t d\tau \left\{ D(\nu, \nu'; t, \tau) \langle [R_{\nu}^+(t) b(t), \mathcal{O}(t)] R_{\nu'}^+(\tau) b^+(\tau) \rangle + \right. \\ & + N(\nu, \nu'; t, \tau) \langle [[R_{\nu}^+(t) b(t), \mathcal{O}(t)], R_{\nu'}^+(\tau) b^+(\tau)] \rangle \left. \right\} + \\ & + D(-\nu, \nu'; t, \tau) \langle [R_{\nu}^-(t) b(t), \mathcal{O}(t)] R_{\nu'}^-(\tau) b^+(\tau) \rangle + \\ & + N(-\nu, \nu'; t, \tau) \langle [[R_{\nu}^-(t) b(t), \mathcal{O}(t)], R_{\nu'}^-(\tau) b^+(\tau)] \rangle \left. \right\} + \text{comp.} \end{aligned}$$

Здесь \mathcal{O} - оператор, действующий на переменные \vec{M} - системы, описываемой гамильтонианом

$$\tilde{H}_M = \sum_f \hbar \Omega_f R_{f3} + \hbar \omega_b b^\dagger b,$$

и совершен переход к коллективным переменным (1.11). Функции $\mathcal{D}(\cdot)$ - $N(\cdot)$ определены соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(N, N'; t, \tau) &= \sum_k |g_k|^2 \varphi(k - \vec{\nu}) \varphi^*(k - \vec{\nu}') e^{-i\omega_k(t-\tau)}, \\ N(N, N'; t, \tau) &= \sum_k |g_k|^2 \varphi(k - \vec{\nu}) \varphi^*(k - \vec{\nu}') N_k e^{-i\omega_k(t-\tau)} \end{aligned}$$

(ср. соотношения (3.11)).

Соотношение (8.3) представляет собой точную иерархию кинетических уравнений для рассматриваемой системы с гамильтонианом (8.1), (8.2).

Будем считать переменные b^\dagger, b "медленными", т.е. подобными атомным переменным R^\pm с точки зрения процессов эволюции^{/130/}. Тогда от (8.3) можно перейти к иерархии марковских уравнений с помощью соотношений

$$\begin{cases} R_N^\pm(\tau) \approx R_N^\pm(t) e^{\mp i\Omega(t-\tau)} e^{-(t-\tau)/T}, \\ b(\tau) \approx b(t) e^{i\omega(t-\tau)}, \end{cases}$$

где Ω и T - параметры, характеризующие неоднородное лоренцево уширение (см. раздел 1). Теперь интегрирование по τ в (8.3) можно выполнить явным образом. Пренебрегая быстро осциллирующими членами типа $R^\pm R^\pm$, а также вкладом от $\mathcal{D}(\cdot)$ и $N(\cdot)$ при $\vec{\nu} \neq \vec{\nu}'$ (см. определение дробной функции $\Psi(\cdot)$ в разделе 1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathcal{O} \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [\tilde{H}_M, \mathcal{O}] \rangle = \\ = \frac{1}{2\hbar} \sum_N \left\{ \Gamma_N^- \langle [R_N^+ b, \mathcal{O}] R_N^- b^\dagger \rangle + N_N \langle [[R_N^+ b, \mathcal{O}], R_N^- b^\dagger] \rangle + \right. \\ \left. + \mu^2 \Gamma_N^+ \langle [R_N^- b, \mathcal{O}] R_N^+ b^\dagger \rangle + \mu^2 N_N^+ \langle [[R_N^- b, \mathcal{O}], R_N^+ b^\dagger] \rangle \right\} + \end{aligned} \quad (8.4)$$

+ сопр.

Здесь кинетические коэффициенты Γ_N^+, N_N определены так же, как и в разделе 1У (см. соотношения (4.2), (4.14)).

Рассмотрим теперь некоторые следствия из уравнений (8.4). Пусть для простоты $\mu = 0$, т.е. мы ограничиваемся случаем, соответствующим приближению вращающейся волны. Положим $0 = R_3$. Тогда из (8.4) имеем

$$\frac{d}{dt} \langle R_3 \rangle = - \sum_N \left\{ \gamma_N^- \langle R_N^+ R_N^- b b^+ \rangle + n_N^- \langle 2R_3 b^+ b + R_N^+ R_N^- \rangle \right\} / N, \quad (8.5)$$

где

$$\gamma_N^- = \frac{2}{(2\pi)^3} V \int d\vec{k} \frac{2T |g_k|^2 |\varphi(\vec{k} - \vec{N})|^2}{1 + 4T^2 (\omega_k + \omega_b - \Omega)^2},$$

$$n_N^- = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{2T |g_k|^2 N_k |\varphi(\vec{k} - \vec{N})|^2}{1 + 4T^2 (\omega_k + \omega_b - \Omega)^2}.$$

Полагая далее $0 = b^+ b$, находим

$$\frac{d}{dt} \langle b^+ b \rangle = - \frac{d}{dt} \langle R_3 \rangle. \quad (8.6)$$

В силу определения интенсивности, данного в разделе V (соотношения (5.6), (5.7)), имеем

$$I(t) = -\hbar \Omega \frac{d}{dt} \langle R_3(t) \rangle = -\hbar \Omega \frac{d}{dt} \langle b^+ b \rangle. \quad (8.7)$$

Это обстоятельство обусловлено тем, что гамильтониан (8.1), (8.2) имеет интегралы движения

$$a_k^+ a_k + R_3, \quad b^+ b + R_3. \quad (8.8)$$

Ясно, что процесс излучения будет происходить в системе лишь при $I(t) > 0$; при $I(t) < 0$ в системе реализуется процесс поглощения.

Вернемся к уравнению (8.5). Представим оператор $R_N^+ R_N^-$ в виде

$$R_N^+ R_N^- = \frac{N}{2} + R_3 + S_N,$$

где

$$S_N = \sum_{\substack{f, f' \\ (f \neq f')}} R_f^+ R_{f'}^- e^{i\vec{N}(\vec{x}_f - \vec{x}_{f'})}.$$

Воспользуемся расщеплением

$$\begin{aligned} \langle R_3 b^+ b \rangle &\approx \langle R_3 \rangle \langle b^+ b \rangle, \\ \langle S_N b b^+ \rangle &\approx \langle S_N \rangle \langle b b^+ \rangle = \langle S_N \rangle (1 + \langle b^+ b \rangle). \end{aligned}$$

В силу существования упомянутых выше интегралов движения (8.8) имеем

$$\langle R_3(t) \rangle + \langle b^*(t)b(t) \rangle = M = \text{const},$$

где величина M определяется из начальных условий. Теперь из (8.5), (8.6) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle R_3 \rangle = & -\frac{d}{dt} \langle b^* b \rangle = -\sum_{\nu} \left\{ \left(\langle S_{\nu} \rangle + \frac{N}{2} \right) (\gamma_{\nu}^{-} + \gamma_{\nu}^{-} M - \gamma_{\nu}^{-} \langle R_3 \rangle + n_{\nu}^{-}) - \right. \\ & \left. + (\gamma_{\nu}^{-} + 2n_{\nu}^{-}) \langle R_3 \rangle (1 + M - \langle R_3 \rangle) - n_{\nu}^{-} \langle R_3 \rangle \right\} / N. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Будем считать, что в начальном состоянии все излучатели возбуждены и что время жизни осциллятора T много больше длительности процесса τ_N . Тогда^{130/}

$$\langle S_{\nu} \rangle = \left\{ \Gamma(\vec{\nu} - \vec{\nu}_0) - N^{-1} \right\} (N^2/4 - \langle R_3 \rangle^2),$$

где

$$\Gamma(\vec{\nu} - \vec{\nu}_0) = \left| \frac{1}{N} \sum_{\vec{r}} e^{i(\vec{\nu} - \vec{\nu}_0) \cdot \vec{r}} \right|^2$$

и вектор $\vec{\nu}_0$ характеризует начальное коллективное состояние системы излучателей. Теперь вместо (8.9) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X = & -N^{-1} \sum_{\nu} \left\{ \Gamma(\vec{\nu} - \vec{\nu}_0) - N^{-1} \right\} (N^2/4 - X^2) \left\{ \gamma_{\nu}^{-} (M + 1 - X) + n_{\nu}^{-} \right\} \cdot \\ & - \frac{1}{2} \gamma (M + 1 - X) - \frac{n}{2} - N^{-1} (\gamma + 2n) X (M + 1 - X) + n X / N, \end{aligned} \quad (8.10)$$

где

$$\gamma = \sum_{\nu} \gamma_{\nu}^{-}, \quad n = \sum_{\nu} n_{\nu}^{-}.$$

Уравнение (8.10) можно проинтегрировать в квадратурах, если известны корни многочлена 3-й степени по X , стоящего в правой части (8.10). Для простоты рассмотрим специальный случай, когда в начальный момент времени поля нет, за исключением, быть может, моды с частотой ω_0 и пусть $\beta^2 = 0$ в определении N_k (см. раздел III). Тогда вместо (8.10) имеем

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{d}{dX} \left(X - M - 1 \right) \left(X + \frac{N}{2} \right) \left(X - \frac{N}{2} - \frac{X}{\alpha} \right), \quad (8.11)$$

где

$$\alpha = \sum_N \delta_N^{-1} \{ \Gamma(\vec{v} - \vec{v}_0) - N^{-1} \} \leq \gamma.$$

Теперь решение уравнения (8.11) можно представить в виде^{/110,111/}

$$|x - M - 1|^A |x + \frac{N}{2}|^B |x - \frac{N}{2} - \frac{\gamma}{\alpha}|^C = e^{-\alpha(t - \bar{t}_0)/N}, \quad (8.12)$$

где параметр \bar{t}_0 определяется начальной величиной x и

$$A = (M+1+N/2)^{-1} (M+1-N/2-\gamma/\alpha)^{-1},$$

$$B = (N+\gamma/\alpha)^{-1} (M+1+N/2)^{-1},$$

$$C = (N+\gamma/\alpha)^{-1} (N/2 + \gamma/2 - M - 1)^{-1}.$$

Как нетрудно видеть,

$$A+B+C=0.$$

Предположим, что

$$M = N/2 + \gamma/\alpha - 1.$$

Тогда

$$A+C = -B = -(N+\gamma/\alpha)^{-2}$$

и из (8.12) имеем

$$\left| \frac{x + N/2}{x - N/2 - \gamma/\alpha} \right|^B = e^{-\alpha(t - \bar{t}_0)},$$

откуда

$$x = \langle R_s \rangle = -\frac{N}{2} + (N + \frac{\gamma}{\alpha}) \left\{ 1 + e^{(t - \bar{t}_0)/\tau_N} \right\}^{-1}$$

Здесь

$$\tau_N = \frac{N}{\alpha} (N + \gamma/\alpha)^{-2}. \quad (8.13)$$

Для этого специального случая интенсивность (8.7) есть

$$I(t) = \frac{\hbar \Omega d}{4N} (N + \frac{\gamma}{\alpha})^3 \operatorname{sech}^2 \frac{t - \bar{t}_0}{2\tau_N}. \quad (8.14)$$

Для случая $\langle R_s \rangle_0 = N/2$ (полностью инвертированная в начальный момент система) из (8.12) для времени задержки импульса $t_0 = \bar{t}_0$.

имеем

$$\tau_D = \tau_N \ln \frac{N_0}{f}.$$

Как нетрудно видеть, интенсивность (8.14) содержит пропорциональный N^2 вклад, характерный для сверхизлучательного процесса.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда $\beta^{-1} \gg 0$ в определении параметров N_k и n_k^- . Введем обозначение

$$\eta = \sum_{\vec{r}} n_{\vec{r}}^- \left\{ \Gamma(\vec{r} - \vec{r}') - N^{-1} \right\}.$$

Тогда уравнение (8.10) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & -\frac{dx^3}{N} + \left\{ \alpha(M+1) + \eta + \gamma + 2n \right\} \frac{x^2}{N} + \\ & + \left\{ \alpha N^2 + 2\gamma N + 4n - 4(\gamma + 2n)/(M+1) \right\} \frac{x}{N} - \\ & - \left\{ 2n + 2\gamma(M+1) + 2\alpha N(M+1) + \eta N \right\} \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Обозначим через x_1, x_2, x_3 корни многочлена 3-й степени, стоящего в правой части (8.15). Тогда ^{110,111/}

$$|x-x_1|^{2A} |x-x_2|^{2B} |x-x_3|^{2C} = e^{-\alpha(t-t_0)/N},$$

где

$$\begin{cases} 2A = (x_1 - x_2)^{-1} (x_1 - x_3)^{-1}, \\ 2B = (x_2 - x_1)^{-1} (x_2 - x_3)^{-1}, \\ 2C = (x_3 - x_1)^{-1} (x_3 - x_2)^{-1}. \end{cases}$$

Такое решение может описывать как испускание, так и поглощение в зависимости от начального состояния системы. Пусть для определенности

$$M+1 = N/2.$$

Тогда уравнение (8.15) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\alpha}{N} (x - \frac{N}{2})(x - x_+) (x - x_-), \quad (8.16)$$

где

$$x_{\pm} = \frac{\eta + \delta + 2n}{2d} \pm \left\{ (\eta + \delta + 2n)^2 + N^2 d^2 + N(\eta + \delta)2d + 4nd \right\}^{1/2} / 2d.$$

Как нетрудно видеть,

$$x_+ > N/2 > 0 > x_- > -N/2.$$

С другой стороны,

$$-N/2 < x < M = N/2 - 1.$$

Поэтому если в начальный момент времени $x_0 > x_-$, то $dx/dt < 0$ и уравнение (8.16) описывает процесс испускания, причем $x \rightarrow x_-$ и интенсивность (8.7) $I(t) > 0$. Если же в начальный момент времени $x_0 < x_-$, то $dx/dt > 0$ и уравнение (8.16) описывает процесс поглощения; при этом $I(t) < 0$ и $x \rightarrow x_-$ при $t \rightarrow \infty$.

Нетрудно получить обобщение уравнения (8.15), полученного, как и (8.10), в приближении вращающейся волны (т.е. при $\mu = 0$). Пусть теперь $\mu = 1$. Повторяя приведенные выше выкладки, находим вместо (8.5)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle R_s \rangle &= -N^2 \sum_N \langle (S_N + N/2) \{ b b^* (\delta_N^+ - \delta_N^-) + n_N^+ - n_N^- \} \rangle - \\ &= -N^2 \sum_N \left\{ \langle R_s b b^* \rangle (\delta_N^+ + \delta_N^- + 2n_N^+ + 2n_N^-) - \langle R_s \rangle (n_N^+ + n_N^-) \right\}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Пусть теперь поле с частотой ω_b является сильным и слабо меняется во времени, так что

$$\langle b^* b \rangle = \text{const} (\equiv N_b).$$

Тогда с учетом расщеплений того же типа, что и сделанные при выводе (8.9), получаем

$$\frac{d}{dt} \langle R_s \rangle = - \sum_N U_N (\langle S_N \rangle + N/2) - Q \langle R_s \rangle, \quad (8.18)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} U_N &= N^{-1} \{ (1 + N_b) (\delta_N^- - \delta_N^+) + n_N^- - n_N^+ \}, \\ Q &= N^{-1} \sum_N \{ (1 + N_b) (\delta_N^- + \delta_N^+ + 2n_N^- + 2n_N^+) - (n_N^- + n_N^+) \}. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, уравнение (8.18) с точностью до коэффициентов совпадает с полученным в разделе У уравнением (5.1) для случая

однофотонного процесса в системе. Его дальнейшее исследование может быть выполнено по аналогии с разделом У. Например, при выборе в качестве начального состояния системы так называемого блоховского состояния^{132/с}

$$\langle S_{\alpha} \rangle \approx \{ \Gamma(\vec{\nu} - \vec{\nu}_0) - N^{-1} \} (N^2/4 - \langle R_{\beta} \rangle^2)$$

из (8.18) для интенсивности процесса получаем^{130/}

$$I(t) = \frac{\hbar \Omega \xi P}{4} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\xi}{2} (t - \tilde{t}_0) \right\}, \quad (8.19)$$

где

$$\xi = \sqrt{N^2 \left\{ \sum_{\alpha} [\Gamma(\vec{\nu} - \vec{\nu}_0) - N^{-1}] \cdot U_{\alpha} \right\}^2 + 2N \sum_{\alpha} [\Gamma(\vec{\nu} - \vec{\nu}_0) - N^{-1}] U_{\alpha} U_{\alpha} + Q^2},$$

$$P = \frac{\{ N \sum_{\alpha} [\Gamma(\vec{\nu} - \vec{\nu}_0) - N^{-1}] U_{\alpha} + 2N \sum_{\alpha} U_{\alpha} \} \cdot [\Gamma(\vec{\nu} - \vec{\nu}_0) - N^{-1}] U_{\alpha} + Q}{\xi \sum_{\alpha} [\Gamma(\vec{\nu} - \vec{\nu}_0) - N^{-1}] U_{\alpha}}.$$

Интенсивность (8.19) соответствует сверхизлучению, так как $\xi \gg N^2$ и получено для ситуации, когда

$$x_0 > (Q - \xi) / 2 \sum_{\alpha} [\Gamma(\vec{\nu} - \vec{\nu}_0) - N^{-1}] U_{\alpha}.$$

В противоположном случае интенсивность процесса имеет вид

$$I(t) = - \frac{\hbar \Omega \xi P}{4} \operatorname{cosech}^2 \left\{ \frac{\xi}{2} (t + \tilde{t}_0) \right\}, \quad (8.20)$$

что соответствует процессу поглощения в системе.

Подчеркнем, что исследование динамики двухфотонных процессов было проведено здесь с помощью лишь частичного исключения бозонных переменных, что предполагает "выделенность" одной из фотонных мод. Возможность такого выделения мы подробно обсудим в следующем разделе.

"Я мог бы привести в свое оправдание тоже немало примеров".

Лопе де Вега "Мученик чести"

Рассмотрим процесс двухфотонного (рамановского) комбинационного рассеяния с излучением стоксовой компоненты (рис. 23). Для такого процесса гамильтониан взаимодействия двухуровневой системы с фотонами имеет вид ^{/131/}

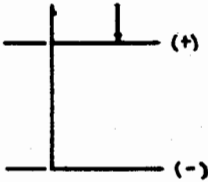


Рис. 23

$$H_{int}^{(s)} = \hbar \sum_f \sum_k' g_k \left\{ e^{i(\vec{k} - \vec{k}_0) \vec{x}_f} a_k^+ b^+ R_f^- + e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_0) \vec{x}_f} a_k^+ b R_f^+ \right\} / N. \quad (9.1)$$

Здесь \vec{k}_0 - волновой вектор поля накачки с частотой ω_0 и \sum_k' обозначает суммирование по полному набору мод, за исключением моды \vec{k}_0 . Полный гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H^{(s)} = \sum_k \hbar \omega_k a_k^+ a_k + \sum_f \hbar \Omega_f R_{f3} + H_{int}^{(s)}. \quad (9.2)$$

Ясно, что гамильтониан (9.2) относится к тому же типу, что и рассматриваемый в предыдущем процессе гамильтониан резонансного двухфотонного каскадного процесса (8.1), (8.2); поэтому исследование процесса излучения можно провести с помощью сформулированного выше метода частичного исключения бозонных переменных. Действуя по аналогии с предыдущим разделом, для системы с гамильтонианом (9.2) нетрудно получить иерархию марковских уравнений вида ^{/131/}

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle 0 \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle [\tilde{H}_M, 0] \rangle = \\ = \frac{1}{2N} \sum_N \left\{ \Gamma_N^+ \langle [R_N^- b^+, 0] R_N^+ b \rangle + N_N^+ \langle [[R_N^- b^+, 0], R_N^+ b] \rangle + \text{comp.} \right\}, \end{aligned} \quad (9.3)$$

согласующуюся с (8.4). Здесь

$$\tilde{H}_M = \sum_f \hbar \Omega_f R_{f3} + \hbar \omega_0 b^+ b$$

и использованы обозначения предыдущего раздела (с заменой $\omega_b \rightarrow -\omega_b$, $\vec{R}_b \rightarrow -\vec{R}_b$). Для средней полуразности населенностей имеем отсюда (по аналогии с (8.5), (8.6))

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle R_s \rangle &= -\frac{d}{dt} \langle b^* b \rangle = \\ &= N^{-1} \sum_{\gamma} \left\{ \gamma_{\gamma}^+ \langle R_{\gamma}^- R_{\gamma}^+ b^* b \rangle - \gamma_{\gamma}^+ \langle 2R_s b b^* + R_{\gamma}^- R_{\gamma}^+ \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Учитывая наличие интеграла движения

$$\langle R_s \rangle + \langle b^* b \rangle = M = \text{const},$$

производя расщепление

$$\langle R_{\gamma}^- R_{\gamma}^+ b^* b \rangle \approx \langle R_{\gamma}^- R_{\gamma}^+ \rangle \langle b^* b \rangle = \langle R_{\gamma}^- R_{\gamma}^+ \rangle (M - \langle R_s \rangle)$$

и выбирая начальное состояние так, чтобы: $\beta^{-1} = 0$; существовало в начальный момент лишь поле накачки b^+, b ; T было велико по сравнению с длительностью процесса; начальное состояние излучателей было блоховским состоянием

$$\langle R_{\gamma}^- R_{\gamma}^+ \rangle \approx N/2 - \langle R_s \rangle + \left\{ \Gamma(\vec{N} - \vec{N}_0) - N^{-1} \right\} (N/4 - \langle R_s \rangle^2), \quad (9.5)$$

для скорости изменения поля накачки можно получить ^{/131/}

$$\frac{d}{dt} \langle b^* b \rangle = -\frac{d}{4N} \left(N + \frac{d}{d} \right)^2 \text{sech}^2 \left(\frac{t - t_0}{2\tau_N} \right), \quad (9.6)$$

где при $M = N/2$

$$\tau_N = \frac{dN}{(N + \delta/2)^2}, \quad t_0 = \tau_N \ln \frac{N d}{\gamma}.$$

В полной аналогии с предыдущим разделом здесь также можно получить выражение для интенсивности и исследовать процессы излучения и поглощения.

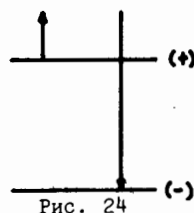


Рис. 24

Такое рассмотрение может быть проведено не только для процесса, описываемого гамильтонианом (9.1), но и для процесса рассеяния с испусканием антистоксовой компоненты (рис. 24), описываемого гамильтонианом взаимодействия вида

В рассматриваемом здесь примере комбинационного рассеяния роль выделенной моды электромагнитного поля играет мода накачки. Исследуем теперь другую ситуацию, в которой "выделенное" поле не имеет электромагнитной природы. Исследуем процесс сверхизлучения в кристалле при наличии рассеяния Мандельштама-Бриллюэна^{/133/}. Гамильтониан, предложенный Томпсоном^{/74/} для такой системы, имеет вид (см. (1.27)):

$$\begin{aligned}
 H &= H_n + H_{n-f} + H_f, \quad H_n = \sum_f \hbar \omega_f R_f^{\pm} + \sum_q \hbar \Omega_q b_q^{\dagger} b_q, \\
 H_{n-f} &= \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{g_{\vec{k}}}{\sqrt{N}} (a_{\vec{k}} R_f^{\dagger} + a_{\vec{k}}^{\dagger} R_f^{-}) \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q (K_q b_q + K_q^{\dagger} b_q^{\dagger}) \right\}, \\
 H_f &= \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}}.
 \end{aligned} \tag{9.11}$$

Здесь индекс f нормирует излучатели, расположенные в узлах кристаллической решетки ($f=1, \dots, N$), ω_f - частота двухуровневого перехода в излучателе, $R_f^{\pm} = (\sigma_f^{\pm} \pm i\sigma_f^y)/2$, $R_f^{\pm} = \sigma_f^{\pm}/2$ - операторы, описывающие f -излучатель в дипольном приближении, $a_{\vec{k}}^{\dagger}, a_{\vec{k}}$ - операторы фотонов моды (\vec{k}, λ) с частотой $\omega_{\vec{k}}$ и поляризацией $\vec{e}_{\vec{k}}$, b_q^{\dagger}, b_q - операторы фононов моды (\vec{q}, ν) с частотой Ω_q и поляризацией $\vec{u}_{\vec{q}}$. Параметр диполь-фотонной связи

$$g_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar N}{V\omega_{\vec{k}}}} \langle + | \vec{f} \cdot \vec{e}_{\vec{k}} | - \rangle,$$

где \vec{f} - оператор плотности тока перехода между уровнями $+u-$, V - узельный объем, а параметр диполь-фононной связи имеет вид

$$K_q = \frac{\vec{k} \cdot \vec{u}_q}{\sqrt{2M\Omega_q/\hbar}},$$

где M - масса иона. Подчеркнем, что в гамильтониане (9.11) подразумевается суммирование как по акустическим, так и по оптическим ветвям фононного спектра.

Взаимодействие в (9.11) квадратично по бозонным операторам. Поэтому для получения иерархии кинетических уравнений необходимо воспользоваться методом частичного исключения бозонных переменных. В результате довольно громоздких вычислений для среднего от произвольного оператора O M - подсистемы получаем следующую точную иерархию:

$$\text{Sp}_{(M)} \left\{ O(M) \frac{\partial \rho(M)}{\partial t} + (i\hbar)^{-1} [H_n, O(M)] \rho(M) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= N^{-1} \sum_i \frac{g_i^2}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t d\tau \text{sp}_{(M,F)} \exp\{-i\omega_n(t-\tau)\} \{N_n \sum_{\mathbb{H}'} R_f^-(\tau) \times \\
&\times \{1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q (K_q b_q(\tau) + K_q^* b_q^*(\tau))\} [\mathcal{O}(M_n), R_f^+(\tau)] \times \\
&\times \{1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q (K_q b_q(\tau) + K_q^* b_q^*(\tau))\} + (1+N_n) \sum_{\mathbb{H}'} [R_f^+(\tau)] \times \\
&\times \{1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q (K_q b_q(\tau) + K_q^* b_q^*(\tau))\}, \mathcal{O}(M_n) \cdot R_f^-(\tau) \times \\
&\times \{1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q (K_q b_q(\tau) + K_q^* b_q^*(\tau))\} \} D_{L_n} + \\
&+ N^{-1} \sum_i \frac{g_i^2}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t d\tau \text{sp}_{(M,F)} \exp\{i\omega_n(t-\tau)\} \cdot \{N_n \sum_{\mathbb{H}'} [R_f^-(\tau)] \times \\
&\times \{1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q (K_q b_q(\tau) + K_q^* b_q^*(\tau))\}, \mathcal{O}(M_n) R_f^+(\tau) \times \\
&\times \{1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q (K_q b_q(\tau) + K_q^* b_q^*(\tau))\} + (1+N_n) \sum_{\mathbb{H}'} R_f^+(\tau) \times \\
&\times \{1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q (K_q b_q(\tau) + K_q^* b_q^*(\tau))\} [\mathcal{O}(M_n), R_f^-(\tau)] \times \\
&\times \{1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q (K_q b_q(\tau) + K_q^* b_q^*(\tau))\} \} D_{L_n}.
\end{aligned}
\tag{9.12}$$

Чтобы избавиться от интегралов в правой части (9.12), снова сделаем предположение о малости взаимодействия M -подсистемы с фотонным полем, в силу которого

$$R_f^{\pm}(\tau) \approx R_f^{\pm}(t) \exp\{\mp i\omega_n(t-\tau)\}, \quad b_q^{\pm}(\tau) \approx b_q^{\pm}(t) \exp\{\mp i\omega_q(t-\tau)\}.$$

Теперь уравнение (9.12) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \langle \mathcal{O}(M_t) \rangle + (i\hbar)^{-1} \langle [H_M(t), \mathcal{O}(M_t)] \rangle = \\
 & = 2\gamma_f \sum_{ff'} \langle R_f^-(t) [\mathcal{O}(M_t), R_{f'}^+(t)] \rangle + 2\gamma_{f'} \sum_{ff'} \langle [R_f^+(t), \mathcal{O}(M_t)] R_{f'}^-(t) \rangle + \\
 & + \sum_{ff'qq'} \gamma_{+1}^q N^{-1} K_q K_{q'}^* \langle R_f^-(t) b_q(t) [\mathcal{O}(M_t), R_{f'}^+(t) b_{q'}^+(t)] \rangle + \\
 & + \sum_{ff'qq'} \gamma_{+1}^{q'} N^{-1} K_q K_{q'}^* \langle [R_f^-(t) b_q(t), \mathcal{O}(M_t)] R_{f'}^+(t) b_{q'}^+(t) \rangle + \\
 & + \sum_{ff'qq'} \gamma_{-1}^{q'} N^{-1} K_q K_{q'}^* \langle [R_f^+(t) b_q(t), \mathcal{O}(M_t)] R_{f'}^-(t) b_{q'}^+(t) \rangle + \\
 & + \sum_{ff'qq'} \gamma_{-1}^q N^{-1} K_q K_{q'}^* \langle R_f^+(t) b_q(t) [\mathcal{O}(M_t), R_{f'}^-(t) b_{q'}^+(t)] \rangle + \\
 & + \sum_{ff'qq'} \gamma_{+2}^q N^{-1} K_q^* K_{q'} \langle R_f^-(t) b_q^+(t) [\mathcal{O}(M_t), R_{f'}^+(t) b_{q'}(t)] \rangle + \\
 & + \sum_{ff'qq'} \gamma_{+2}^{q'} N^{-1} K_q^* K_{q'} \langle [R_f^-(t) b_q^+(t), \mathcal{O}(M_t)] R_{f'}^+(t) b_{q'}(t) \rangle + \\
 & + \sum_{ff'qq'} \gamma_{-2}^{q'} N^{-1} K_q^* K_{q'} \langle [R_f^+(t) b_q^+(t), \mathcal{O}(M_t)] R_{f'}^-(t) b_{q'}(t) \rangle + \\
 & + \sum_{ff'qq'} \gamma_{-2}^q N^{-1} K_q^* K_{q'} \langle R_f^+(t) b_q^+(t) [\mathcal{O}(M_t), R_{f'}^-(t) b_{q'}(t)] \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{9.13}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$Y_+ = \pi N^{-1} \sum_k \frac{N_k}{\hbar^2} g_k^2 \delta(\omega_k - \omega_0),$$

$$Y_- = \pi N^{-1} \sum_k \frac{(1+N_k)}{\hbar^2} g_k^2 \delta(\omega_k - \omega_0),$$

$$Y_{+1} = \pi N^{-1} \sum_k \frac{N_k}{\hbar^2} g_k^2 \delta(\omega_k - \omega_0 - \Omega_0),$$

$$Y_{-1} = \pi N^{-1} \sum_k \frac{(1+N_k)}{\hbar^2} g_k^2 \delta(\omega_k - \omega_0 - \Omega_0),$$

$$Y_{+2} = \pi N^{-1} \sum_k \frac{N_k}{\hbar^2} g_k^2 \delta(\omega_k - \omega_0 + \Omega_0),$$

$$Y_{-2} = \pi N^{-1} \sum_k \frac{(1+N_k)}{\hbar^2} g_k^2 \delta(\omega_k - \omega_0 + \Omega_0).$$

Отметим, что при выводе (9.13) мы пренебрегли быстро осциллирующими членами вида $R_j^+ R_j^+$, $b_q R_j^+ R_j^-$, $b_q^+ R_j^+ R_j^-$, $b_q^+ b_q^+$, $b_q b_q^+$.

Полагая здесь $\mathcal{O} = R^z$, $R_j^z R_j^z$, $b_q^+ b_q$, получим из (9.13) замкнутую систему уравнений, описывающую динамические параметры M -подсистемы.

Производя расщепление вида

$$\langle b_q^+ b_q, R_j^+ R_j^- \rangle = \langle b_q^+ b_q \rangle \langle R_j^+ R_j^- \rangle \delta_{qq'},$$

$$\langle b_q b_q^+, R_j^+ R_j^- \rangle = \langle b_q b_q^+ \rangle \langle R_j^+ R_j^- \rangle \delta_{qq'}$$

и учитывая, что $\langle \sum_{j,j'} R_j^+ R_{j'}^- \rangle = C - \langle \sum_j R_j^z \rangle^2$, где CM - константа, определяемая начальными условиями, из (9.13) получаем уравнение

$$\dot{X} = (Y_2 - Y_1) \frac{N}{2} - (Y_2 + Y_1) X + N^2 (Y_2 - Y_1) \left(\frac{1}{4} - N^{-2} X \right), \quad (9.14)$$

где

$$X = \sum_f \langle R_f^2 \rangle,$$

$$Y_+ = 2Y_+ + 2\sum Y_{+i}^q |K_q|^2 \langle b_q b_q^+ \rangle + Y_{+2}^q |K_q|^2 \langle b_q^+ b_q \rangle,$$

$$Y_- = 2Y_- + 2\sum Y_{-i}^q |K_q|^2 \langle b_q b_q^+ \rangle + Y_{-2}^q |K_q|^2 \langle b_q^+ b_q \rangle.$$

Мы предположили здесь, что начальное состояние было полностью деполаризованным, т.е. $C = 1/4$, и пренебрегли обратным влиянием фотонов на фононы. Отсюда для интенсивности находим

$$I(t) = \frac{X_1 - X_2}{4} \xi \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{2} (t - t_0), \quad (9.15)$$

где $\xi = [N^2(Y_2 - Y_1)^2 + 2N(Y_2 - Y_1)^2 + (Y_2 + Y_1)^2]^{1/2}$ и X_1 ,

X_2 — корни квадратного трехчлена по X , стоящего в правой части (9.14).

Из соотношения (9.15) видно, что учет рассеяния света на фотонах ведет к ускорению процесса излучения за счет вклада переходов с участием фононов (см. также рис. 25). Заметим, что малое время задержки когерентного импульса характерно для кристаллических сред^{53,54}.

Соотношение (9.15) описывает излучение на резонансной частоте ω_0 . Аналогичный вид будут иметь выражения для интенсивности излучения на суммарной и разностной частотах.

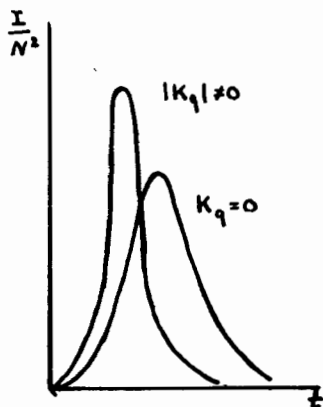


Рис. 25

Предполагая наличие лишь одной оптической моды с частотой Ω , нетрудно показать, что

$$I/(I_{\omega_0 + \Omega} + I_{\omega_0 - \Omega}) \gg 10^{13}$$

в области пика интенсивности (здесь 1... соответственно интенсивности на суммарной и разностной частотах).

Таким образом, проведенный анализ влияния рассеяния Мандельштам-Бриллюэна на динамику сверхизлучения в кристалле показывает, что

а) наличие такого рассеяния приводит к ускорению процессов высвечивания когерентного излучения;

б) излучение на суммарной и разностной частотах не ведет к заметному уменьшению интенсивности излучения на резонансной частоте.

где

$$X = \sum_f \langle R_f^2 \rangle,$$

$$Y_1 = 2y_{..} + 2 \sum y_{+1}^q |K_q|^2 \langle b_q b_q^+ \rangle + y_{+2}^q |K_q|^2 \langle b_q^+ b_q \rangle,$$

$$Y_2 = 2y_{..} + 2 \sum y_{-1}^q |K_q|^2 \langle b_q b_q^+ \rangle + y_{-2}^q |K_q|^2 \langle b_q^+ b_q \rangle.$$

Мы предположили здесь, что начальное состояние было полностью деполаризованным, т.е. $C = 1/4$, и пренебрегли обратным влиянием фотонов на фононы. Отсюда для интенсивности находим

$$I(t) = \frac{X_1 - X_2}{4} \xi \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{2} (t - t_0), \quad (9.15)$$

где $\xi = [N^2(Y_2 - Y_1)^2 + 2N(Y_2 - Y_1)^2 + (Y_2 + Y_1)^2]^{1/2}$ и X_1 ,

X_2 — корни квадратного трехчлена по X , стоящего в правой части (9.14).

Из соотношения (9.15) видно, что учет рассеяния света на фотонах ведет к ускорению процесса излучения за счет вклада переходов с участием фононов (см. также рис. 25). Заметим, что малое время задержки когерентного импульса характерно для кристаллических сред^{153, 54}.

Соотношение (9.15) описывает излучение на резонансной частоте ω_0 . Аналогичный вид будут иметь выражения для интенсивности излучения на суммарной и разностной частотах.

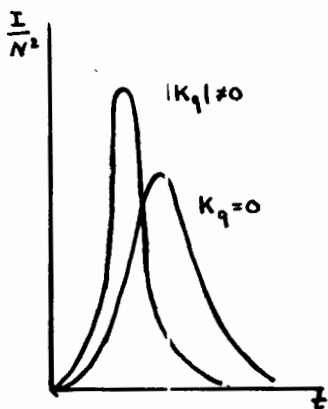


Рис. 25

Предполагая наличие лишь одной оптической моды с частотой Ω , нетрудно показать, что

$$I/(I_{\omega_0} + \Omega + I_{\omega - \Omega}) \gg 10^{10}$$

в области пика интенсивности (здесь $1 \dots$ соответственно интенсивности на суммарной и разностной частотах).

Таким образом, проведенный анализ влияния рассеяния Мандельштама-Бриллюэна на динамику сверхизлучения в кристалле показывает, что

а) наличие такого рассеяния приводит к ускорению процессов высвечивания когерентного излучения;

б) излучение на суммарной и разностной частотах не ведет к заметному уменьшению интенсивности излучения на резонансной частоте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

"Ничто не придает книге такого веса и достоинства, как после-слобие".

Марк Твен "Позаслоченный век"

В этих лекциях мы постарались изложить основные физические идеи и соответствующие им модельные задачи, используемые в теории сверхизлучательных процессов, главное внимание сконцентрировав на методе иерархий кинетических уравнений. Приведенные здесь примеры демонстрируют возможности этого метода, представляющего собой регулярный подход к задачам теории сверхизлучения и смежным проблемам физики.

Разумеется, в кратком курсе лекций мы не имели возможности подробно рассматривать всю совокупность экспериментальных данных и теоретических методов, относящихся к проблеме сверхизлучения. По этой же причине за пределами нашего рассмотрения остались другие когерентные явления (фотонное эхо, оптическая нутация, самоиндуцированная прозрачность и т.д.), имеющие много общих черт со сверхизлучением, но не относящихся к числу спонтанных когерентных процессов. Важное место в современной теории взаимодействия вещества с излучением занимают точные решения операторных уравнений движения^{/134-136/}, обзор которых сам по себе мог бы составить обширную монографию.

Наконец, задачи теории сверхизлучения имеют множество аналогий в физике твердого тела, квантовой теории поля и теории ядра, где метод иерархий кинетических уравнений также может быть применен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dicke R.H. Phys.Rev., 1954, 93, 99.
2. Dicke R.H. In: Quantum Electronics. Proc. III Int.Conf. Eds. P.Grivet, N.Bloembergen. Columbia Univ.Press., 1964, p.35.
3. Прохоров А.М. УФН, 1965, 85, 599.
4. Хакен Г. Синергетика. "Мир", М., 1980.
5. Skribanovitz N., Herman I.P., McGillivray J.C. Phys.Rev.Lett., 1973, 30, 309.
6. Cahuzac Ph., Sontag H., Toschek P.E. Opt.Comm., 1979, 11, 37.
7. Flussberg A., Mosberg T., Hartmann S.R. Phys.Lett., 1976, 58A, 373.
8. Gross M., Fabre C., Pillet P., Haroche S. Phys.Rev.Lett., 1976, 36, 1035.
9. Vrehan Q.H.F., Hiksloops H.M.J., Gibbs H.M. Phys.Rev.Lett., 1977, 38, 764.
10. Gibbs H.M., Vrehan Q.H.F., Hiksloops H.M.J. Phys.Rev.Lett., 1977, 39, 547.
11. Gross M., Raimond J.M., Haroche S. Phys.Rev.Lett., 1978, 40, 1711.
12. Grubellier A., Liberman S., Pillet P. Phys.Rev.Lett., 1978, 41, 1237.
13. Vrehan Q.H.F., Schuurmans M.F.H. Phys.Rev.Lett., 1979, 42, 224.
14. Grubellier A., Liberman S., Pillet P., Schweighofer M.G. J.Phys.B, 1981, 14, L177.
15. Vrehan Q.H.F., Der Weduwe J.J. Phys.Rev., 1981, A24, 2857.
16. Grubellier A., Liberman S., Mayon D., Pillet P., Schweighofer M.G. Opt.Lett., 1982, 7, 16.
17. Rosenberger A.T., De Temple T.A. Phys.Rev., 1981, A24, 868.
18. Gross M., Goy P., Fabre C., Haroche S., Raimond J.M. Phys.Rev. Lett., 1979, 43, 343.
19. Moi L., Fabre C., Goy P., Gross M., Haroche S., Encrenas P., Beaudin G.V., Lazareff B. Opt.Comm., 1980, 33, 47.
20. Mai L., Goy P., Gross M., Raimond J.M., Fabre C., Haroche S. Phys.Rev., 1983, A27, 2043.
21. Gross M., Haroche S. Phys.Rep., 1982, 93, 301.
22. Baldwin G.C., Khokhlov R.V. Phys.Today, 1975, 28, 32.
23. Колпаков А.В., Бушуев В.А., Кузьмин Р.Н. УФН, 1978, 126, 479.
24. Андреев А.В., Емельянов В.Т., Ильинский Ю.Ф. УФН, 1980, 131, 653.
25. Нерр К., Lieb E.H. Ann.Phys., 1973, 76, 360.
26. Боголюбов Н.Н. /мл./, Плечко В.Н., Мумовский А.С. ЭЧАЯ, 1983, 14, 1443.
27. Попов В.Н., Ярунин В.С. Коллективные эффекты в квантовой статистике излучения и вещества. Изд.ЛГУ, Л., 1985.

28. Bonifacio R., Schwendimann P. Nuovo Cimento Lett., 1970, 3, 512.
29. Bonifacio R., Schwendimann P., Haake F. Phys.Rev., 1971, A4, 302; 854.
30. Bonifacio R., Lugiato L.A. Phys.Rev., 1975, A11, 1507; A12, 587.
31. Banfi G., Bonifacio R. Phys.Rev., 1975, A12, 2068.
32. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. "Мир", М., 1978.
33. McGillivray J.C., Feld M.S. Phys.Rev., 1976, A14, 1169.
34. Haake F., King H., Schröder G., Haus J., Glauber R.J. Phys.Rev., 1979, A20, 2047; 1981, A23, 1322.
35. Попов В.И., Ярунин В.С. ТМФ, 1983, 57, 115.
36. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической механике. Гостехиздат, М., 1946.
37. Боголюбов Н.Н. /мл./, Фам Ле Киен, Щумовский А.С. ТМФ, 1982, 52, 423; ОИЯИ, P17-81-456, Дубна, 1981.
38. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. /мл./. ЭЧАЯ, 1980, 11, 245.
39. Bogolubov N.N., Jr., Fam Le Kien, Shumovsky A.S. Physica, 1984, A128, 82.
40. Гайтлер Э. Квантовая теория излучения. Изд-во иностранной лит-ры, М., 1956.
41. Power E.A., Zienau S. Phil.Trans.Roy.Soc., 1959, 251, 427.
42. Кирьянов В.Б., Ярунин В.С. ТМФ, 1982, 51, 456.
43. Маттис Д. Теория магнетизма. "Мир", М., 1967.
44. Боголюбов Н.Н. ЖЭТФ, 1958, 34, 73.
45. Bogolubov N.N., Jr., Shumovsky A.S. Indian J.Pure Appl.Phys., 1970, 8, 121.
46. Маймистов А.И., Манькин Э.А. Журнал прикладной спектроскопии, 1978, 29, 353.
47. Кудрявцев И.К., Мелешко А.Н., Щумовский А.С. Квант.электроника, 1979, 6, 2434.
48. Бутылкин В.С., Каплан А.Е., Хронополо Э.Г., Якубович Е.И. Резонансные взаимодействия света с веществом. "Наука", М., 1977.
49. Shen Y.R. Phys.Rev., 1967, 155, 921.
50. Walls D.F. J.Phys.A, 1971, 4, 813.
51. McNeil K.J., Walls D.F. J.Phys.A, 1975, 8, 104.
52. McNeil K.J., Walls D.F. J.Phys.A, 1975, 8, 111.
53. Florian R., Schwan L.O., Schmid D. Sol.St.Comm., 1982, 43, 55.
54. Florian R., Schwan L.O., Schmid D. Phys.Rev., 1984, A29, 2709.
55. Шелепин Л.А. ЖЭТФ, 1968, 54, 1463.
56. Махвиладзе Т.Н., Шелепин Л.А. ЖЭТФ, 1972, 62, 2066.
57. Махвиладзе Т.Н., Шелепин Л.А. Труды ФИАН, 1973, 70, 120.
58. Шелепин Л.А. Труды ФИАН, 1976, 87, 3.

59. Gilmore R. *Ann.Phys.*, 1972, 74, 391.
60. Gilmore R. *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*. Wiley, N.Y., 1974.
61. Gilmore R., Bowden C.M. *J.Math.Phys.*, 1976, 17, 1617.
62. Kudryavtsev I.K., Shumovsky A.S. *Opt.Акта*, 1979, 26, 82'.
63. Кудрявцев И.К., Мулушко А.Н., Шумовский А.С. *ДАН СССР*, 1979, 248, 335.
64. Кудрявцев И.К., Мулушко А.Н., Шумовский А.С. *Квант.электроника*, 1979, 6, 2573.
65. Ахметели А.Н., Мелешко А.Н., Шумовский А.С. *ОИЯИ, P17-80-39*, Дубна, 1982.
66. Башкиров Е.К., Боголюбов Н.Н. /мл./, Шумовский А.С. *ТМФ*, 1983, 56, 395.
67. Боголюбов Н.Н. /мл./, Шумовский А.С. В сб.: *Проблемы квантовой теории поля*. ОИЯИ, Д2-84-366, Дубна, 1984, с.6.
68. Bowden C.M., Sung C.C. *Phys.Rev.*, 1978, A18, 1558.
69. Bowden C.M., Sung C.C. *Phys.Rev.*, 1979, A20, 2033.
70. Bogolubov N.N., Jr., Vachkirov E.K., Fan Le Kien, Shumovsky A.S. *Physica*, 1985, A133, 413.
71. Займан Дж. *Принципы теории твердого тела*. "Мир", М., 1974.
72. Lipkin H.J. *Ann.Phys.*, 1960, 9, 332.
73. Алискендеров Э.И., Шумовский А.С. *ОИЯИ, E17-86-72*, Дубна, 1986.
74. Thompson V.V. *J.Phys.A*, 1975, 8, 126.
75. Klemm A., Zagrebnoy V.A. *Physica A*, 1977, 86, 400.
76. Klemm A., Zagrebnoy V.A. *Physica A*, 1978, 92, 599.
77. Боголюбов Н.Н. /мл./, Бранков Я.Г., Загребнов В.А., Курбатов А.М., Тончев Н.С. *Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике*. Изд-во БАН, София, 1981.
78. Wang Y.K., Hioe F.T. *Phys.Rev.*, 1973, A7, 831.
79. Nepp K., Lieb E.H. *Phys.Rev.*, 1973, A8, 2517.
80. Vertogen G., DeVries A.S. *Phys.Lett.*, 1974, A48, 451.
81. Боголюбов Н.Н. /мл./. *Метод исследования модельных гамильтонианов*. "Наука", М., 1974.
82. Бранков Я.Г., Загребнов В.А., Тончев Н.С. *ДАН СССР*, 1975, 225, 71.
83. Bogolubov N.N., Jr., Plechko V.N. *Physica*, 1976, A82, 163.
84. Боголюбов Н.Н. *Вестник Московского ун-та, сер.Физ., астроном.*, 1947, №7, 43.
85. Bogolubov N.N. *J.Phys.*, 1947, 2, 23.
86. Боголюбов Н.Н. /мл./, Плечко В.Н. *ДАН СССР*, 1976, 228, 1061.
87. Боголюбов Н.Н. *Избр.труды, т.3. "Наукова думка"*, Киев, 1972.
88. Боголюбов Н.Н. /мл./, Шумовский А.Ф., Юкалов В.И. *ТМФ*, 1984, 60, 432.

89. Шумовский А.С., Жкалов В.И. Фазовые состояния и переходы. ОИЯИ, P17-85-676, Дубна, 1985.
90. Махвиладзе Т.М., Рез А.И., Сарычев М.Е. Журнал прикладной спектроскопии, 1975, 22, 642.
91. Бранков Й.Г., Загребнов В.А., Тончев Н.С. ТМФ, 1975, 22, 20.
92. Fried Z. Phys.Rev., 1974, A8, 2835.
93. Pickles J.B., Thompson B.V. Phys.Lett., 1974, A48, 451.
94. Rzaevsky K., Wodkiewicz K., Zakowicz W. Phys.Lett., 1977, A58, 111.
95. Orszak M. J.Phys.A, 1977, 10, 1995.
96. Слюсарев В.А., Янкевич Р.П. ТМФ, 1979, 40, 124.
97. Курбатов А.М., Плечко В.Н. ТМФ, 1976, 28, 127.
98. Brankov J.G., Tonchev N.S. Physica, 1976, A84, 371.
99. Kudryavtsev I.K., Shumovsky A.S. Phys.Lett., 1978, A66, 501.
100. Кудрявцев И.К., Шумовский А.С. ТМФ, 1979, 41, 103.
101. Achmeteli A.M., Kudryavtsev I.K., Shumovsky A.S. Acta Phys. Polonica, 1980, A58, 23.
102. Мелешко А.Н., Шумовский А.С. Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, 468.
103. Боголюбов Н.Н. ЭЧАЯ, 1978, 9, 501.
104. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. /мл./. ЭЧАЯ, 1980, 11, 245.
105. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. /мл./. Введение в квантовую статистическую механику. "Наука", М., 1984.
106. Боголюбов Н.Н. /мл./, Фам Ле Киен, Шумовский А.С. ТМФ, 1984, 60, 254.
107. Боголюбов Н.Н. /мл./, Фам Ле Киен, Шумовский А.С. В сб.: III-Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, Д17-84-850, Дубна, 1985, т.1, с.131.
108. Rehler N.E., Eberly J. Phys.Rev., 1971, A3, 1735.
109. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. "Мир", М., 1970.
110. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М., 1953.
111. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, М., 1961.
112. McGillivray J.C., Field M.S. Phys.Rev., 1981, A23, 1334.
113. Rosenberger A.T., Petuchovsky S.T., DeTemple T.A. In: Cooperative Effects in Matter and Radiation. Eds. C.M.Bowden, D.W.Howgate and H.R.Robl. Plenum Press, N.Y., 1977.
114. Rosenberger A.T., De Temple T.A., Bowden C.M., Sung C.C. J.Opt. Soc.Am., 1978, 68, 700.
115. Боголюбов Н.Н. /мл./, Башкиров Е.К., Фам Ле Киен, Шумовский А.С. В сб.: Краткие сообщения ОИЯИ, В3-84, Дубна, 1984, с.26.

116. Bogolubov N.N., Jr., Bashkirov E.K., Fam Le Kien, Shumovsky A.S. *Physica*, 1985, 133A, 413; ОИЯИ, P17-84-671, Дубна, 1984.
117. Shuurmans M.F.H., Polder D., Vreken Q.H.F. *J.Opt.Soc.Am.*, 1978, 68, 699.
118. Набойкин Ю.В., Самарцев В.В., Силаева Н.Б. *Изв. АН СССР, сер. физ.*, 1983, 47, 1328.
119. Зиновьев П.В., Лапина С.В., Набойкин Ю.В., Силаева Н.Б., Самарцев В.В., Шейбут Ю.Е. *ЖЭТФ*, 1983, 85, 1945.
120. Naake F., Reibold D. *Phys.Lett.*, 1982, 92A, 29.
121. Schwendimann P. *Optica Acta*, 1984, 31, 107.
122. Боголюбов Н.Н. /мл./, Башкиров Е.К., Фам Ле Киен, Шумовский А.С. ОИЯИ, P17-84-665, Дубна, 1984.
123. Ressayre E., Tallet A. *Phys.Rev.*, 1977, A15, 2410.
124. Емельянов В.И., Семиногов В.Н. *ЖЭТФ*, 1979, 76, 34.
125. Боголюбов Н.Н. /мл./, Молдоярлов А.А., Фам Ле Киен, Шумовский А.С. ОИЯИ, P17-85-665, Дубна, 1985.
126. Arecchi F.T., Courtense E. *Phys.Rev.*, 1970, A2, 1730.
127. Grubellier A., Liberman S., Pillet P. *Opt.Comm.*, 1982, 33, 143.
128. Соломатин В.С., Мелешко А.Н., Красников В.В. *Квантовая электроника*, 1979, 6, 1326; 1528.
129. Ахметели А.М., Мелешко А.Н., Шумовский А.С. *ДАН СССР*, 1981, 256, 1094.
130. Боголюбов Н.Н. /мл./, Фам Ле Киен, Шумовский А.С. *ТМФ*, 1985, 62, 461.
131. Bogolubov N.N., Jr., Fam Le Kien, Shumovsky A.S. *Physica*, 1984, 130A, 243.
132. Бломберг Н. *Нелинейная оптика*. Мир, М., 1965.
133. Башкиров Е.К., Сорокина Е.М., Фам Ле Киен, Шумовский А.С. В сб.: *Краткие сообщения ОИЯИ*, 1984, №2-84, с.8.
134. Yoo H.-I., Eberly J.H. *Phys.Rep.*, 1985, 118, 239.
135. Bogolubov N.N., Jr., Fam Le Kien, Shumovsky A.S. *J.Phys.A: Math.Gen.*, 1986, 19, 191.
136. Bogolubov N.N., Jr., Fam Le Kien, Shumovsky A.S. *J.de Phys. (Paris)*, 1986, 47, 127.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 апреля 1987 года.