

С 346  
Б-611



ЛЕКЦИИ  
ДЛЯ МОЛОДЫХ  
УЧЕНЫХ

С.М.Биленький

**Осцилляции нейтрино**

**ДУБНА**

Л В Э

ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Выпуск 29

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Д. В. Ширков - председатель  
А. Н. Сисакян - зам. председателя  
Г. М. Гавриленко - ученый секретарь  
В. Г. Маханьков  
В. А. Никитин  
В. Р. Саранцева  
С. Ю. Шмаков

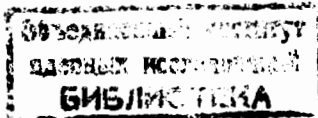
P2-83-441

C 346  
B-611

С.М.Биленький

ОСЦИЛЛЯЦИИ НЕЙТРИНО

111357



Дубна, 1983

Биленький С.М.  
Осцилляции нейтрино

P2-83-441

Лекции посвящены детальному рассмотрению явления осциллирующей нейтрино. Подробно обсуждаются все возможные схемы смешивания нейтрино с дираковскими и майорановскими массами. Рассматриваются возможные опыты по поиску эффектов CP-нарушения в осцилляциях нейтрино. Приводятся ограничения на параметры  $\Delta m^2$  и  $\sin^2 2\theta$ , полученные из последних опытов по поиску осциллирующей нейтрино. Кратко излагается теория безнейтринного двойного  $\beta$ -распада.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Bilenky S.M.  
Neutrino Oscillations

P2-83-441

The lectures are devoted to a detailed consideration of neutrino oscillation phenomena. All possible schemes of neutrino mixing with Dirac and Majorana masses are discussed. Possible experiments on the search effects of CP-violation in neutrino oscillations are considered. Constraints on parameters  $\Delta m^2$  and  $\sin^2 2\theta$  obtained from the latest experiments searching for neutrino oscillations are given. The theory of the neutrino-less double  $\beta$ -decay is briefly presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

	Стр.
I. ВВЕДЕНИЕ .....	4
2. СХЕМЫ СМЕШИВАНИЯ НЕЙТРИНО .....	6
2.1. Введение .....	6
2.2. Смешивание нейтрино с дираковскими массами (дираковский массовый член) .....	9
2.3. Смешивание нейтрино с майорановскими массами (майорановский массовый член) .....	II
2.4. Смешивание нейтрино с майорановскими массами (дираковский и майорановский массовый член) .....	I6
2.5. Смешивание нейтрино с майорановскими массами (обобщенная схема Зельдовича - Конопинского - - Махмуда) .....	I9
2.6. Смешивание двух полей нейтрино с майорановскими массами .....	23
3. ОСЦИЛЛЯЦИИ НЕЙТРИНО .....	27
3.1. Общие выражения для вероятностей осцилляций .....	27
3.2. Эквивалентность осцилляций в дираковском и майорановском случаях. Возможные методы проверки CP - инвариантности .....	34
3.3. Простейший случай осцилляций между двумя нейтринными состояниями .....	45
4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	48
Приложение А. Нейтрино Майорана .....	53
Приложение Б. Безнейтринный двойной $\beta$ -распад ..	56
ЛИТЕРАТУРА .....	65

## I. Введение

В этих лекциях подробно рассмотрено явление осцилляций нейтрино /I/. Поиск осцилляций нейтрино является в настоящее время одной из самых актуальных задач физики нейтрино. Для ее решения во всех нейтринных лабораториях мира проводятся (либо планируются) десятки сложнейших экспериментов.

Возникший в последние годы большой интерес к проблеме масс и осцилляций нейтрино связан главным образом с появлением и развитием теорий великого объединения. Как хорошо известно, в большинстве моделей великого объединения массы и углы смешивания нейтрино оказываются отличными от нуля.

Мы рассмотрим здесь явление осцилляций нейтрино с общей феноменологической точки зрения. Массы и углы смешивания нейтрино мы будем считать параметрами, подлежащими определению из опыта. Работы, в которых в рамках различных моделей великого объединения вычисляются эти параметры, излагаться здесь не будут. Эти работы рассматриваются в обзорах /3,4/.

Во втором разделе рассмотрены все возможные стандартные схемы смешивания нейтрино (схемы, отвечающие дираковскому, майорановскому, а также дираковскому и майорановскому нейтринным массовым членам). Рассмотрена также специальная схема смешивания нейтрино, представляющая собой обобщение на случай несохранения лептонных чисел и произвольного числа типов нейтрино схемы Зельдовича, Конопинского и Махмуда. Наконец, в этом разделе мы подробно рассмотрим смешивание двух полей нейтрино Майорана с отличными от нуля массами.

В третьем разделе подробно рассматривается явление осцилляций нейтрино. Получены и проанализированы общие выражения для вероятностей переходов между различными нейтринными состояниями. Рассматриваются возможные методы проверки CP-инвариантности. Обсуждаются условия, при которых могут быть наблюдаемы осцилляции нейтрино.

В заключительном разделе приводятся полученные из данных последних опытов ограничения на параметры, характеризующие осцилляции нейтрино. В приложении А кратко излагается теория поля Майорана. В приложении Б рассматривается безнейтринный двойной  $\beta$ -распад. Получено общее выражение для вероятности этого процесса. Приводятся данные од-

ного из последних геохимических опытов по поиску безнейтринного двойного  $\beta$ -распада  $^{128}\text{Te}$  и  $^{130}\text{Te}$ .

Проблема осцилляций нейтрино, обсуждению которой посвящены эти лекции, имеет долгую историю. Гипотеза осцилляций нейтрино была выдвинута Б.М. Понтекорво в 1957-1958 г.г. <sup>/1,2/</sup>. В то время только что появилась теория двухкомпонентного нейтрино Ландау, Ли и Янга, Салама. Подтверждение этой теории на опыте, казалось, свидетельствовало в пользу того, что масса нейтрино равна нулю.

Обсуждая в те годы первые опыты с реакторными антинейтрино, Б.М. Понтекорво предположил <sup>/2/</sup>, что лептонный заряд может не быть строго сохраняющимся квантовым числом и что вектор состояния нейтрино, участвующего в слабом взаимодействии, может представлять собой суперпозицию векторов состояния нейтрино Майорана с отличными от нуля и разными массами и противоположными CP-четностями. В основе этой гипотезы лежала глубокая и в высшей степени нетривиальная аналогия со случаем нейтральных каонов. В этих первых работах уже обсуждались возможные экспериментальные следствия гипотезы осцилляций нейтрино: "несохранение нейтринного заряда при различимости нейтрино и антинейтрино (или, что тождественно, существование двух нейтрино Майорана с разной комбинированной четностью) неизбежно приводит к эффектам типа Гелл-Манна-Пайса-Личчони. Эффекты превращения нейтрино в антинейтрино могут быть не наблюдаемыми в лаборатории, но будут иметь место в астрономических масштабах" <sup>/2/</sup>.

После того, как идея осцилляций была высказана, ее обобщение на случай двух типов нейтрино ( $\nu_e$  и  $\nu_\mu$ ) уже не представляло труда и было сделано в работе <sup>/5/</sup>. В работах <sup>/2,5/</sup> было введено понятие стерильных нейтрино: "Если имеются два разных лептонных заряда, переходы  $\nu_e \rightleftharpoons \bar{\nu}_e$  и  $\nu_\mu \rightleftharpoons \bar{\nu}_\mu$  превращают потенциально активные частицы в частицы, которые с точки зрения обычного слабого взаимодействия являются стерильными, т.е. практически ненаблюдаемыми, так как они имеют "неправильную спиральность". В этом случае единственный способ наблюдения обсуждаемого эффекта состоит в измерении интенсивности (и временной вариации интенсивности) первоначальных частиц..." <sup>/5/</sup>. В работе <sup>/5/</sup> уже подробно обсуждалась необходимость учета эффектов осцилляций нейтрино при сравнении с теорией результатов готовящихся в то время опытов по регистрации нейтрино от Солнца. "...Эффект на поверхности Земли заключался бы в том, что поток наблюдаемых солнечных нейтрино должен быть в два раза меньше полного потока солнечных нейтрино <sup>/5/</sup>". Подчеркнем, что это писалось за несколько лет до начала экспериментов Дэвиса и др., в которых была обнаружена так называемая "загадка солнечных нейтрино" <sup>/6/</sup>.

В основе выдвинутой Б.М. Понтекорво гипотезы осцилляций нейтрино лежала физическая идея аналогии с осцилляциями нейтральных каонов. В 1962-1963 г.г. Маки, Саката и др. в работах <sup>/7/</sup>, практически неизвестных до недавнего времени, ввели смешивание двух дираковских нейтрино с массой ( а также смешивание барионов ! ). В этих работах мало обсуждались следствия выдвинутых гипотез. Была лишь подчеркнута необходимость учета возможного смешивания нейтрино при интерпретации данных, которые будут получены в проводящемся в то время брукхавенском нейтринном эксперименте.

Первая теория осцилляций нейтрино была развита в работе Грибова и Понтекорво <sup>/8/</sup>. В этой работе для случая двух типов нейтрино был построен общего вида (нарушающий сохранение лептонных зарядов) майорановский массовый член. Было показано, что поля токовых нейтрино (поля, входящие в гамильтониан слабого взаимодействия) представляют собой в случае такого массового члена ортогональные комбинации двух полей нейтрино Майорана с отличными от нуля массами. Общий случай произвольного числа майорановских нейтрино был впервые рассмотрен в работе <sup>/9/</sup>.

В 1975 году после открытия нейтральных токов и очарованных частиц ( с - кварка) вновь появились работы по осцилляциям нейтрино <sup>/10/</sup>. Авторы этих работ основывались на кварк-лептонной аналогии и предполагали, что лептоны, так же как и кварки, входят в гамильтониан в смешанном виде.

Случай дираковского и майорановского массового члена для произвольного числа типов нейтрино был впервые рассмотрен в работе <sup>/11/</sup>. Наконец, эффекты CP - нарушения в осцилляциях нейтрино были впервые рассмотрены Кабиббо <sup>/13/</sup>. Обзор всех этих работ, включивший подробное обсуждение возможных методов поиска осцилляций нейтрино, был опубликован в 1977 году <sup>/12/</sup>.

После появления и развития теорий великого объединения интерес к осцилляциям нейтрино резко возрос. Далекое не полный перечень появившихся в последнее время работ приведен в списке литературы <sup>/14-20/</sup>.

## 2. Схемы смешивания нейтрино

### 2.1. Введение

Все имеющиеся в настоящее время данные по изучению обусловленных слабым взаимодействием процессов описываются единой теорией электро-слабого взаимодействия Глэшоу-Вайнберга-Салама <sup>/21/</sup>. Эффективный гамильтониан этой теории имеет вид



$$\mathcal{H} = \frac{G}{\sqrt{2}} (j_a^{(+)} j_a^{(-)} + j_a^0 j_a^0). \quad (1)$$

Здесь  $G \approx 10^{-5} \frac{1}{M^2}$  - константа Ферми ( $M$  - масса протона),  $j_a^{(+)}$  и  $j_a^0$  соответственно заряженный и нейтральный ток. Заряженный ток строится из левых компонент полей лептонов и кварков и имеет следующий вид <sup>(\*)</sup>:

$$j_a^{(+)} = 2 \sum_{l=e, \mu, \tau, \dots} \bar{\nu}_l \gamma_a \nu_l + 2 (\bar{u}_L \gamma_a d_L' + \bar{c}_L \gamma_a s_L' + \bar{t}_L \gamma_a b_L' + \dots) \quad (2)$$

Здесь

$$q_L' = \sum_q U_{qL} q_L, \quad (3)$$

где  $U$  - унитарная матрица смешивания. В случае шести кварков  $3 \times 3$  матрица  $U$  характеризуется тремя углами и одной фазой и может быть параметризована следующим образом <sup>[22]</sup>:

$$U = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & -c_1 s_2 c_3 - c_2 s_3 e^{i\delta} & -c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$c_i = \cos \theta_i, \quad s_i = \sin \theta_i.$$

Нейтральный ток теории Глэшоу-Вайнберга-Салама (стандартной теории электрослабого взаимодействия) имеет вид

$$j_a^0 = \sum_l \bar{\nu}_l \gamma_a \nu_l + \sum_q \bar{q} \gamma_a (g_V + g_A \gamma_5) q + \sum_q \bar{q} \gamma_a (v_q + a_q \gamma_5) q, \quad /5/$$

<sup>x</sup> Мы будем использовать метрику Паули. В этой метрике  $x = (\vec{x}, ix_0)$ ,  $\gamma_a^+ = \gamma_a$ ,  $\gamma_0 \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_0 = 2\delta_{\alpha\beta}$ ,  $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ . Свободный лагранжиан спинорного поля  $\psi$  имеет вид  $\mathcal{L} = -\bar{\psi} (\gamma_a \partial_a + m) \psi$ .

Левая и правая компоненты поля  $\psi$  определяются соответственно следующим образом:  $\psi_L = \frac{1+\gamma_5}{2} \psi$ ,  $\psi_R = \frac{1-\gamma_5}{2} \psi$ .

где параметры  $g_V, g_A, v_q$  и  $a_q$  даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 g_V &= -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_N, & g_A &= -\frac{1}{2}, \\
 v_q &= \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_N, & a_q &= \frac{1}{2}, & q &= u, c, t, \\
 v_q &= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_N, & a_q &= -\frac{1}{2}, & q &= d, s, b
 \end{aligned} \tag{6}$$

( $\theta_N$  - угол Вайнберга). Отметим, что из анализа данных опытов по изучению обусловленных нейтральными токами процессов следует, что  $\sin^2 \theta_N = 0,23 \pm 0,01$ .

В стандартной теории электрослабого взаимодействия массы нейтрино могут быть как равными нулю, так и отличными от нуля. Отметим, что в минимальном варианте теории (поля Хиггса образуют дублеты, правые компоненты полей нейтрино не входят в лагранжиан) массы нейтрино равны нулю.

Массы нейтрино оказываются отличными от нуля в большинстве моделей великого объединения (см. <sup>13,4/</sup>). Входящие в слабые токи (2) и (5) поля нейтрино  $\nu_{eL}$  представляют собой при этом линейные ортогональные комбинации левых компонент полей нейтрино с определенными массами:

$$\nu_{eL} = \sum_i U_{ei} \nu_{iL}. \tag{7}$$

Здесь  $U$  - унитарная матрица смешивания,  $\nu_i$  - поле нейтрино с массой  $m_i$ .

Смешивание полей нейтрино (7) аналогично смешиванию (3) полей кварков. Возможности смешивания полей нейтрино существенно шире, однако, чем возможности смешивания полей кварков. Это связано с тем, что кварки - дираковские частицы, а нейтрино с определенными массами могут быть как дираковскими, так и майорановскими частицами. Кроме того, число массивных майорановских нейтрино может как равняться числу токовых нейтрино, так и превышать это число.

Различные схемы смешивания нейтрино отличаются типом нейтринного массового члена. Если нейтринный массовый член записан через поля токовых нейтрино, то при этом в общем случае могут быть построены три типа нейтринных массовых членов:

- 1) дираковский массовый член;
- 2) майорановский массовый член;
- 3) дираковский и майорановский массовый член.

Мы перейдем теперь к подробному рассмотрению этих трех возможностей смешивания нейтрино.

2.2. Смешивание нейтрино с дираковскими массами  
(дираковский массовый член)

Предположим вначале, что нейтринный массовый член лагранжиана имеет вид, аналогичный кварковым массовым членам стандартной теории:

$$\mathcal{L}^{\nu} = -\sum_{e, e'} \bar{\nu}_{eR} M_{e'e} \nu_{eL} + h.c. \quad (8)$$

Мы будем рассматривать общий случай  $n$  типов нейтрино; соответственно матрица  $M$  в выражении (8) — общего вида  $n \times n$  матрица.

Очевидно, что лагранжиан (8) не сохраняет электронное  $L_e$ , мюонное  $L_\mu$ , тауонное  $L_\tau$ , ..., лептонные числа. Полный лагранжиан инвариантен, однако, относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \nu' &= e^{i\alpha} \nu, \\ e' &= e^{i\alpha} e, \\ e' &= e^{i\alpha} e', \\ q' &= q, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\alpha$  — постоянная фаза. Инвариантность относительно преобразований (9) означает, что в теории с массовым членом (8) сохраняется суммарный лептонный заряд

$$\sum_e L_e = const. \quad (10)$$

Массовый член (8) носит название дираковского массового члена. Мы покажем теперь, что он приводится к стандартному виду. Запишем выражение (8) следующим образом:

$$\mathcal{L}^{\nu} = -\bar{\nu}'_R M \nu'_L + h.c. \quad (11)$$

Здесь

$$\nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \nu'_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Далее, произвольную матрицу, детерминант которой отличен от нуля,

можно привести к диагональному виду с помощью бунитарного преобразования<sup>X</sup>

$$M = V m U^+, \quad (I3)$$

где  $V$  и  $U$  - унитарные матрицы. Подставляя (I3) в (II), имеем

$$L^0 = -\bar{\nu}_R m \nu_L + h.c. = -\bar{\nu} m \nu = -\sum_{i=1}^n m_i \bar{\nu}_i \nu_i. \quad (I4)$$

Здесь

$$\nu_L = U \nu'_L, \quad \nu = V^+ \nu'_R,$$

$$\nu = \nu'_L + \nu'_R = \begin{pmatrix} \nu'_1 \\ \nu'_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что  $\nu'_i$  - комплексное поле ( $\nu'_i \neq \nu_i$ ;  $\nu_i^c$  - зарядово-сопряженный спинор). Таким образом,  $\nu_i^c$  - поле нейтрино Дирака с массой  $m_i$ <sup>XX</sup> (нейтрино и антинейтрино отличаются фермионным числом).

<sup>X</sup> Действительно, рассмотрим матрицу  $MM^+$ . Очевидно, что эта матрица эрмитова и ее собственные значения положительны. Имеем

$$MM^+ = V m^2 V^+, \quad (I5)$$

где  $V$  - унитарная матрица, а  $m^2$  - диагональная матрица. Определим диагональную матрицу  $m$  так, что  $m \cdot m = m^2$ ,  $m_i = +\sqrt{m_i^2}$ . Имеем  $M = V m U^+$ , где  $U^+ = m^{-1} V^+ M$ . Нетрудно видеть, что матрица  $U$  унитарна. Действительно, используя (I5), получаем

$$U^+ U = m^{-1} V^+ M M^+ V m^{-1} = m^{-1} m^2 m^{-1} = 1.$$

<sup>XX</sup>

Используя унитарность матриц  $V$  и  $U$ , для кинетического члена лагранжиана полей нейтрино имеем

$$L_0 = -\bar{\nu}'_R \gamma_\alpha \partial^\alpha \nu'_R - \bar{\nu}'_L \gamma_\alpha \partial^\alpha \nu'_L = -\sum_i \bar{\nu}'_i \gamma_\alpha \partial^\alpha \nu'_i.$$

Далее получаем

$$\nu'_L = U \nu_L.$$

Отсюда имеем

$$\nu_{eL} = \sum_{i=1}^n U_{ei} \nu_{iL}. \quad (16)$$

Итак, мы приходим к выводу, что в случае, если нейтринный массовый член имеет вид (8), токовые левые поля  $\nu_{eL}$  представляют собой линейные комбинации левых компонент полей дираковских нейтрино с отличными от нуля массами. Отметим, что  $\ell(x)$  в выражениях (2) и (3) — поля лептонов с физическими массами  $m_\ell$ . Это означает, что диагонализация лептонной массовой матрицы уже проведена и поля  $\nu'_L$  в выражениях (2) и (11) включают унитарную матрицу, возникающую при такой диагонализации.

Если имеет место смешивание (16), в пучках нейтрино возникают осцилляции  $\nu_e \rightleftharpoons \nu_{e'}$ . Это явление будет подробно рассмотрено в третьей главе. Здесь мы отметим лишь, что в случае смешивания (16) наряду с осцилляциями нейтрино становятся возможными также такие несохраняющие лептонные числа процессы, как  $\mu \rightarrow e \gamma$  и  $\mu \rightarrow 3e$  <sup>/23/</sup>. Если использовать полученные на опыте верхние границы масс нейтрино, то можно, однако, показать <sup>/23/</sup>, что ожидаемые вероятности этих процессов на много порядков ниже достигнутых в настоящее время границ.

Характерной особенностью рассмотренной здесь схемы смешивания нейтрино с дираковскими массами является запрет процессов, в которых не сохраняется сумма лептонных чисел. С экспериментальной точки зрения наиболее интересный процесс такого рода — безнейтринный двойной  $\beta$  — распад. Мы перейдем теперь к рассмотрению таких схем смешивания нейтрино, в которых наряду с осцилляциями нейтрино разрешен также и этот процесс.

### 2.3. Смешивание нейтрино с майорановскими массами (майорановский массовый член)

Массовый член (8) строится как с помощью токовых левых полей  $\nu_{eL}$ , так и с помощью правых полей  $\nu_{eR}$ , не входящих в слабые токи стандартной теории. В этом смысле рассмотренная в § 2.2 схема смешивания нейтрино не является экономайской схемой. Можно, однако, так построить схему смешивания нейтрино, чтобы в нейтринный массовый член входили только токовые левые компоненты  $\nu_{eL}$ . Для случая

двух типов нейтрино такую схему смешивания впервые построили Грибов и Понтекорво /8/.

Будем рассматривать общий случай  $n$  типов нейтрино. Напомним, что спинор  $\psi^c$ , зарядово-сопряженный спинору  $\psi$ , определяется следующим образом:

$$\psi^c = C \bar{\psi}^T. \quad (17)$$

Здесь  $C$  - унитарная матрица, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} C \gamma_a^T C^{-1} &= -\gamma_a, \\ C^T &= -C. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (17) и (18) получаем, что

$$\bar{\psi}^c = -\psi^T C^{-1}. \quad (19)$$

Далее, используя соотношение

$$C \gamma_5^T C^{-1} = \gamma_5, \quad (20)$$

получаем

$$(\psi_L)^c = C \left[ \frac{1-\gamma_5}{2} \right]^T \bar{\psi}^T = \frac{1-\gamma_5}{2} \psi^c = \psi_R^c. \quad (21)$$

Аналогично имеем

$$(\psi_R)^c = \psi_L^c. \quad (22)$$

Таким образом, при зарядовом сопряжении левой (правой) компоненты поля  $\psi$  мы получаем правую (левую) компоненту поля  $\psi^c$ . Учитывая (21), нейтринный массовый член лагранжиана может быть следующим образом построен с помощью токовых левых компонент полей нейтрино:

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \sum_{\ell, \ell'} \overline{(\nu_{\ell})^c} M_{\ell\ell'} \nu_{\ell'} + h.c., \quad (23)$$

где  $M$  - комплексная  $n \times n$  матрица.

Нетрудно видеть, что матрица  $M$  симметрична. Действительно, используя (19), запишем выражение (23) в виде

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \nu_L'^T C^{-1} M \nu_L' + h.c., \quad (24)$$

где

$$\vartheta_L' = \begin{pmatrix} \vartheta_{eL} \\ \vartheta_{\mu L} \\ \vartheta_{\tau L} \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Далее, учитывая знак минус, возникающий при перестановке фермионных операторов, а также (18), имеем

$$\vartheta_L'^T C^{-1} M \vartheta_L' = -\vartheta_L'^T (C^{-1})^T M^T \vartheta_L' = \vartheta_L' C^{-1} M^T \vartheta_L'.$$

Отсюда следует, что

$$M^T = M. \quad (26)$$

Для того чтобы записать массовый член (23) в стандартном виде, необходимо диагонализировать матрицу  $M$ . Комплексная симметричная матрица приводится к диагональному виду с помощью одной унитарной матрицы  $U$ . Имеем

$$M = (U^+)^T m U^+ \quad (27)$$

Здесь  $U$  - унитарная матрица, а  $m$  - диагональная матрица с положительными элементами. Подставляя (27) в (24), для нейтринного массового члена получаем следующее выражение:

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \left[ (\overline{\vartheta_L})^c m \vartheta_L + \overline{\vartheta_L} m (\vartheta_L)^c \right], \quad (28)$$

где

$$\vartheta_L = U^+ \vartheta_L'. \quad (29)$$

<sup>x</sup> В общем случае имеем  $M = V m U^+$ , где  $V$  и  $U$  - унитарные матрицы, а  $m_{ik} = m_i \delta_{ik}$ ,  $m_i > 0$ . Мы будем предполагать, что  $m_i \neq m_k$ . Очевидно, что  $MM^+ = V m^2 V^+$ . С другой стороны, так как  $M^T = M$ , то  $MM^+ = (U^+)^T m^2 U^+$ . Приравняв оба выражения для  $MM^+$ , получаем  $U^T V m^2 = m^2 U^T V$ . Отсюда следует, что  $U^T V$  - диагональная матрица. Далее, так как  $U^T V$  - унитарная матрица, то  $U^T V = S$ , где  $S_{ik} = e^{i\alpha_i} \delta_{ik}$ ,  $\alpha_i$  - вещественные числа. Таким образом,  $U^+ = S^+ V^+$ . Далее, представим матрицу  $S^+$  в виде  $S^+ = S' S'$ , где  $S'_{ik} = e^{-i\alpha_i} \delta_{ik}$ . Окончательно получаем  $M = V' m V'^T$ , где  $V' = S' V$ .

Окончательно имеем

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \bar{\chi} m \chi = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \bar{\chi}_i \chi_i. \quad (30)$$

Здесь

$$\chi = \nu_L + (\nu_L)^c = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Очевидно, что

$$\chi^c = \chi. \quad (32)$$

Таким образом,  $\chi$  - поле нейтрино Майорана с массой  $m_i^X$ .

Массовый член  $\mathcal{L}^M$  не сохраняет не только электронное, мюонное, тауонное, ..., лептонные числа по отдельности, но и сумму лептонных чисел (лагранжиан  $\mathcal{L}^M$  не инвариантен относительно калибровочных преобразований (9)). Вследствие этого частицами с определенными массами являются в рассматриваемом случае нейтрино Майорана - истинно нейтральные частицы со спином 1/2. Отметим, что массовый член  $\mathcal{L}^M$  носит название майорановского массового члена.

Получим теперь соотношения, связывающие токовые поля нейтрино с полями нейтрино с определенными массами. Используя унитарность матрицы  $U$ , из (29) и (31) получаем

$$\nu_L' = U \chi_L. \quad (33)$$

Отсюда следует, что

$$\nu_L = \sum_{i=1}^n U_{li} \chi_{iL}, \quad l = e, \mu, \tau, \dots \quad (34)$$

Таким образом, в случае майорановского массового члена  $n$  левых токовых нейтринных полей представляют собой линейные ортогональные комбинации  $n$  левых компонент полей нейтрино с майорановскими массами.

Как и в случае смешивания нейтрино с дираковскими массами, смешивание (34) приводит к осцилляциям  $\nu_l \rightleftharpoons \nu_{l'}$ , а также к

<sup>X</sup> Для кинетического члена лагранжиана поля нейтрино получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= -\bar{\nu}_L' \gamma_a \partial_a \nu_L' = -\bar{\nu}_L \gamma_a \partial_a \nu_L = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma_a \partial_a \nu_L - \frac{1}{2} (\bar{\nu}_L)^c \gamma_a \partial_a (\nu_L)^c \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\chi} \gamma_a \partial_a \chi. \end{aligned}$$



распадам  $\mu \rightarrow e \gamma$ ,  $\mu \rightarrow 3e$  и др. Существенное отличие теории со смешиванием нейтрино с майорановскими массами от теории со смешиванием нейтрино с дираковскими массами состоит в том, что в майорановском случае становятся возможными такие несохраняющие суммарный лептонный заряд процессы, как безнейтринный двойной  $\beta$ -распад. Теорию этого последнего процесса мы изложим в приложении Б.

Мы закончим этот раздел следующим замечанием. До сих пор не делалось никаких предположений о лагранжиане  $\mathcal{L}^M$ . Теперь мы предположим, что имеет место инвариантность относительно РС-преобразования. В этом случае имеем

$$M^+ = M. \quad (35)$$

Учитывая, что  $M$  - симметричная матрица, из (35) получаем

$$M^* = M. \quad (36)$$

Вещественная симметричная матрица приводится к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования. Имеем

$$M = O m' O^T, \quad (37)$$

где  $O$  - ортогональная матрица, а  $m'$  - вещественная диагональная матрица. Элементы матрицы  $m'$  могут быть как положительными, так и отрицательными. Запишем

$$m'_i = \eta_i m_i, \quad (38)$$

где  $m_i = |m'_i|$ , а  $\eta_i = \pm 1$ . Подставляя далее (37) в (23) и учитывая (38), получаем

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} [(\bar{\nu}_L)^c m \eta \nu_L + \bar{\nu}_L m \eta (\nu_L)^c]. \quad (39)$$

Здесь

$$\nu_L = O^T \nu'_L. \quad (40)$$

Окончательно имеем

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \bar{\chi} m \chi = -\frac{1}{2} \sum_i m_i \bar{\chi}_i \chi_i, \quad (41)$$

где

$$\chi = \nu_L + \eta (\nu_L)^c. \quad (42)$$

Из (42) следует, что

$$\chi_i^c = \eta_i \chi_i. \quad (43)$$

Таким образом,  $\chi_i$  является полем нейтрино Майорана с массой  $m_i$ ; множитель  $\eta_i$  представляет собой С-четность поля  $\chi_i$ . Получим теперь соотношения, связывающие левые токовые поля  $\psi_{eL}$  с левыми компонентами полей нейтрино Майорана. Из (40) и (42) находим

$$O^T \psi_L' = \chi_L. \quad (44)$$

Отсюда, используя ортогональность матрицы  $O$ , имеем

$$\psi_{eL} = \sum_{i=1}^n O_{ei} \chi_{iL}. \quad (45)$$

Итак, в случае, если имеет место РС-инвариантность и матрица смешивания в соотношении (45) является вещественной ортогональной матрицей, С-четности полей нейтрино с майорановскими массами могут быть как положительными, так и отрицательными. Замечательно, на это обратил внимание Вольфенштейн /24/, что С-четности полей Майорана входят в амплитуду безнейтринного двойного  $\beta$ -распада и являются, следовательно, наблюдаемыми величинами. Мы вернемся к обсуждению этого вопроса в приложении Б.

В рассмотренном нами здесь случае майорановского массового члена число полей нейтрино с майорановскими массами совпадает с числом токовых полей  $\psi_{eL}$  (числом типов нейтрино). Мы перейдем теперь к рассмотрению таких схем смешивания нейтрино, в которых число полей нейтрино с майорановскими массами превышает число полей токовых нейтрино.

#### 2.4. Смешивание нейтрино с майорановскими массами (дираковский и майорановский массовый член)

Мы рассмотрим теперь наиболее общую схему смешивания, отвечающую массовому члену, который представляет собой сумму дираковского и майорановских слагаемых /11, 15-18/.

При построении дираковского массового члена  $\mathcal{L}^D$  в § 2.2. использовались как левые токовые компоненты полей нейтрино  $\psi_{eL}$ , так и правые компоненты  $\psi_{eR}$ , не входящие в заряженный и нейтральный токи стандартной теории. В § 2.3 при построении майорановского массового члена  $\mathcal{L}^M$  использовались только токовые поля  $\psi_{eL}$ . В общем случае дираковского и майорановского массового члена к сумме  $\mathcal{L}^D + \mathcal{L}^M$  необходимо добавить майорановский массовый член

$$\tilde{\mathcal{L}}^H = -\frac{1}{2} \sum_{\ell, \ell'} \bar{\nu}_{\ell R} (M_{\ell \ell'}) \nu_{\ell' L}^c + h.c., \quad (46)$$

который строится только из правых компонент  $\nu_{\ell R}$ . Получаем при этом<sup>x</sup>

$$\mathcal{L}^{\mathcal{D}+H} = -\frac{1}{2} \left[ (\nu'_L)^c M_{LL} \nu'_L + \bar{\nu}'_R M_{RR} (\nu'_R)^c + \bar{\nu}'_R M_{\mathcal{D}L} \nu'_L + (\nu'_L)^c M_{\mathcal{D}R}^T (\nu'_R)^c \right] + h.c. \quad (47)$$

Здесь

$$\nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \nu'_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (48)$$

а  $M_L$ ,  $M_R$  и  $M_{\mathcal{D}}$  - комплексные  $n \times n$  матрицы. Имеем (см. (26))

$$M_L^T = M_L, \quad M_R^T = M_R. \quad (49)$$

Запишем массовый член  $\mathcal{L}^{\mathcal{D}+H}$  в виде

$$\mathcal{L}^{\mathcal{D}+H} = -\frac{1}{2} (\nu'_L)^c M \nu'_L + h.c. \quad (50)$$

Здесь

$$\nu'_L = \begin{pmatrix} \nu'_L \\ (\nu'_R)^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu'_L \\ \nu'_L{}^c \end{pmatrix}, \quad (51)$$

а

$$M = \begin{pmatrix} M_L & M_{\mathcal{D}}^T \\ M_{\mathcal{D}} & M_R \end{pmatrix} - \quad (52)$$

комплексная  $2n \times 2n$  матрица. Из (49) очевидно, что

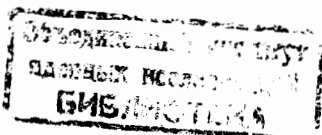
$$M^T = M. \quad (53)$$

Теперь мы проведем стандартную процедуру диагонализации массовой матрицы. Поскольку  $M$  - симметричная матрица, имеем (см. примечание на стр. 13):

$$M = (U^+)^T m U^+, \quad (54)$$

где  $U$  - унитарная  $2n \times 2n$  матрица, а  $m$  - диагональная матрица с положительными элементами. Подставляя (54) в (50), получаем

<sup>x</sup> Мы воспользовались очевидным соотношением  $\bar{\nu}'_R M_{\mathcal{D}L} = (\nu'_L)^c M^T (\nu'_R)^c$ .



$$\mathcal{L}^{2n+1} = -\frac{1}{2} \bar{\psi} m \psi = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} m_i \bar{\psi}_i \psi_i, \quad (55)$$

где

$$\psi = U^+ n_L + (U^+ n_L)^c = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{2n} \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Очевидно, что

$$\psi^c = \psi. \quad (57)$$

Таким образом, частицами с определенными массами являются в рассматриваемом случае дираковского и майорановского массового члена нейтрино Майорана. При этом для случая  $n$  типов токовых нейтрино число майорановских нейтрино равно  $2n$ .

Получим теперь соотношения, связывающие токовые поля  $\psi_{eL}$  с левыми компонентами полей нейтрино с майорановскими массами. Используя унитарность матрицы  $U$ , из (56) находим

$$n_L = U \psi_L. \quad (58)$$

Отсюда следует, что

$$\psi_{eL} = \sum_{i=1}^{2n} U_{ei} \psi_{iL}. \quad (59)$$

Итак, если нейтринный массовый член дается выражением (47), то  $n$  токовых полей представляют собой линейные комбинации  $2n$  левых компонент полей массивных майорановских нейтрино. Поля  $\psi_{eL}^c = (\psi_{eL})^c$ , не входящие в лагранжиан стандартной теории электрослабого взаимодействия, являются линейными комбинациями тех же  $2n$  левых компонент полей массивных нейтрино Майорана. Действительно, из (48), (51) и (58) имеем<sup>x</sup>

<sup>x</sup> При построении члена  $\mathcal{L}^{2n+1}$  мы основывались на предположении о том, что число стерильных правых компонент полей нейтрино совпадает с числом активных левых компонент. Очевидно, что аналогичным образом может быть построен дираковский и майорановский массовый член с помощью  $n$  активных и  $m < n$  стерильных компонент полей нейтрино [18]. В этом случае получаем

$$\psi_{eL} = \sum_{i=1}^{n+m} U_{ei} \psi_{iL}, \quad \psi_{eL}^c = \sum_{i=1}^{n+m} U_{ei}^c \psi_{iL},$$

где  $e$  принимает  $n$  значений, а  $e'$  —  $m$  значений.

$$\nu_L^c = \sum_{i=1}^{2n} U_{Li} \bar{\chi}_{iL}. \quad (60)$$

Очевидно, что в рассматриваемом здесь случае дираковского и майорановского массового члена не существует никаких сохраняющихся лептонных чисел. Это означает, что в этой схеме, как и в схеме с майорановским массовым членом, возможны такие процессы, как безнейтринный двойной  $\beta$ -распад (а также, разумеется,  $\mu \rightarrow e\gamma$ ,  $\mu \rightarrow 3e$  и др. процессы). Возникающие в рассматриваемой схеме осцилляции нейтрино принципиально отличаются от осцилляций, допускаемых предыдущими двумя схемами. Именно в схеме с дираковским, а также в схеме с майорановским массовым членом возможны осцилляции только между токовыми активными (участвующими в стандартном слабом взаимодействии) нейтрино ( $\nu_e \leftrightarrow \nu_{e'}$ ). Из (59) и (60) следует, что в схеме с дираковским и майорановским массовым членом наряду с осцилляциями  $\nu_e \leftrightarrow \nu_{e'}$  возможны также осцилляции между активными нейтрино  $\nu_e$  и стерильными (не участвующими в стандартном слабом взаимодействии) левыми антинейтрино  $\bar{\nu}_{eL}$  ( $\nu_e \leftrightarrow \bar{\nu}_{eL}$ ). В следующей главе мы подробно рассмотрим осцилляции нейтрино, возникающие во всех трех схемах смешивания.

## 2.5. Смешивание нейтрино с майорановскими массами (обобщенная схема Зельдовича-Конопинского-Махмуда)

При построении всех рассмотренных до сих пор схем смешивания мы основывались на предположении о том, что каждому заряженному лептону отвечает один тип нейтрино. Здесь мы рассмотрим такую схему, в основе которой лежит предположение о том, что в заряженном токе двум полям заряженных лептонов отвечает одно четырехкомпонентное поле нейтрино. Рассмотренная в этом параграфе схема смешивания представляет собой обобщение (на случай несохранения лептонного числа и произвольного числа заряженных лептонов) схемы Зельдовича /25/, Конопинского и Махмуда /26/.

Мы рассмотрим вначале простейший случай двух заряженных лептонов (электрона и мюона). Хорошо известно, что имеющиеся экспериментальные данные могут быть описаны, если предположить что заряженный лептонный ток имеет вид

$$j_a^{\mu} = 2 (\bar{\nu}_L \gamma_a e_L + \bar{\mu}_R^c \gamma_a \nu_R). \quad (61)$$

От стандартного выражения для заряженного тока выражение (61) отличается тем, что в него входит одно четырехкомпонентное поле нейтрино. При этом все компоненты поля нейтрино являются токовыми

компонентами. Очевидно, что лагранжиан, в который входит ток (61), сохраняет один лептонный заряд, одинаковый для  $e^-$  и  $\mu^+$ . Этот лептонный заряд был введен много лет назад Зельдовичем /25/, Конопинским и Махмудом /26/. Отметим, что в соответствии с (61) электронное нейтрино представляет собой левое нейтрино, а мюонное анти-нейтрино - правое нейтрино.

Предположим теперь, что лептонный заряд Зельдовича-Конопинского-Махмуда нарушается нейтринным массовым членом /27/. Наиболее общий массовый член, который может быть построен с помощью поля  $\psi$ , имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} [m_L (\overline{\psi}_L)^c \psi_L + m_R \overline{\psi}_R (\psi_R)^c + m_\sigma (\overline{\psi}_R \psi_L + (\overline{\psi}_L)^c (\psi_R)^c)] + h.c., \quad (62)$$

где  $m_L$ ,  $m_R$  и  $m_\sigma$  - константы. Первые два члена выражения (62) представляют собой майорановские массовые члены, последний - дираковский массовый член. Таким образом, массовый член (62) является дираковским и майорановским массовым членом. Подчеркнем, что в отличие от рассмотренного в предыдущем параграфе члена  $\mathcal{L}^{\mathcal{D}+H}$  (выражение (47)) массовый член  $\mathcal{L}$  строится только из токовых компонент поля нейтрино (других компонент у поля  $\psi$  нет).

Запишем выражение (62) следующим образом:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\overline{n}_L)^c M n_L + h.c., \quad (63)$$

где

$$n_L = \begin{pmatrix} \psi_L \\ (\psi_R)^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_L^c \end{pmatrix}, \quad (64)$$

а

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_\sigma \\ m_\sigma & m_R \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Приведем теперь матрицу  $M$  к диагональному виду. Поскольку  $M$  - симметричная матрица, то

$$M = (U^+)^T m U^+, \quad (66)$$

где  $U$  - унитарная  $2 \times 2$  матрица, а  $m$  - диагональная матрица с положительными элементами. Подставляя (66) в (63), получаем

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \overline{\psi} m \psi = -\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} m_i \overline{\psi}_i \psi_i, \quad (67)$$

где

$$\psi = U^+ n_L + (U^+ n_L)^c = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Очевидно, что

$$\chi_i^c = \chi_i.$$

Таким образом, если нейтринный массовый член дается выражением (62), то частицами с определенными массами являются нейтрино Майорана. Из (64) и (68) находим, что входящие в слабые токи поля нейтрино следующим образом выражаются через левые компоненты полей нейтрино Майорана:

$$\begin{aligned} \nu_L &= \sum_{i=1,2} U_{1i} \chi_{iL}, \\ \nu_L^c &= \sum_{i=1,2} U_{2i} \chi_{iL}. \end{aligned} \quad (69)$$

Нетрудно видеть, что для случая двух заряженных лептонов рассмотренная схема смешивания нейтрино эквивалентна схеме Грибова и Понтекорво, обсуждавшейся нами в § 2.3. Действительно, поле  $\nu$  играет в заряженном слабом токе ту же роль, что и поле  $\nu_{eL}$  в обычном слабом токе (входит в ток вместе с  $e_L$ ), а поле  $\nu_{\mu R}$  — ту же роль, что и поле  $(\nu_{\mu L})^c$ . Если в выражении (62) сделать замену  $\nu_L \rightarrow \nu_{eL}$ ,  $\nu_R \rightarrow (\nu_{\mu L})^c$  (а также  $m_e \rightarrow m_{ee}$ ,  $m_{\mu} \rightarrow m_{\mu\mu}$ ,  $m_{\mu e} \rightarrow m_{\mu e}$ ), то мы приходим к лагранжиану Грибова и Понтекорво<sup>/18/</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} [m_{ee} (\bar{\nu}_{eL})^c \nu_{eL} + m_{\mu\mu} (\bar{\nu}_{\mu L})^c \nu_{\mu L} + \\ & + m_{\mu e} ((\bar{\nu}_{\mu L})^c \nu_{eL} + (\bar{\nu}_{eL})^c \nu_{\mu L})] + h.c., \end{aligned} \quad (70)$$

представляющему собой майорановский массовый член.

Итак, для случая двух заряженных лептонов никаких физических различий между рассмотренной здесь схемой смешивания и стандартной схемой с майорановским массовым членом нет. Существенное отличие между схемами возникает в случае, когда число заряженных лептонов больше двух. Именно, поскольку в рассматриваемой схеме двум заряженным лептонам отвечает один тип нейтрино, то очевидно, что такая схема может быть построена только при четном числе заряженных лептонов. Схема с майорановским массовым членом может быть построена при любом числе заряженных лептонов. Мы рассмотрим более подробно случай четырех заряженных лептонов<sup>/27/</sup>. Назовем четвертый лептон

Σ. Заряженный лептонный ток запишем в виде

$$j_{\alpha}^{(\Sigma)} = 2 [\bar{\nu}_{1L} \gamma_{\alpha} e_L + \bar{\nu}_{2L} \gamma_{\alpha} \tau_L + \bar{\mu}_R^c \gamma_{\alpha} \nu_{1R} + \bar{\Sigma}_R^c \gamma_{\alpha} \nu_{2R}], \quad (71)$$

где  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — четырехкомпонентные поля нейтрино. Первые три члена выражения (71) позволяют описать имеющиеся данные<sup>X</sup>. Четвер-

х В соответствии с (71)  $\nu_{1L}$  следует отождествить с  $\nu_{eL}$ ;  $\nu_{2L}$  с  $\nu_{\tau L}$  и т.д. Очевидно, что в заряженном токе компоненты полей нейтрино можно было бы и по-другому комбинировать с компонентами полей заряженных лептонов.

тый заряженный лептон до сих пор не наблюдался. Из данных, полученных на встречных  $e^+e^-$  пучках, следует, что  $m_e > 19$  ГэВ.

Построим теперь нейтринный массовый член. В общем случае имеем

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[ (\bar{\nu}'_L)^c M_L \nu'_L + \bar{\nu}'_R M_R (\nu'_R)^c + \bar{\nu}'_R M_D \nu'_L + (\bar{\nu}'_L)^c M_D^T (\nu'_R)^c \right] + h.c. \quad (72)$$

Здесь

$$\nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}, \quad \nu'_R = \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \end{pmatrix},$$

а  $M_L$ ,  $M_R$  и  $M_D$  — комплексные  $2 \times 2$  матрицы. Первые два члена выражения (72) являются майорановскими массовыми членами, последний — дираковским массовым членом. В более компактном виде выражение (72) может быть записано следующим образом:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\bar{n}_L)^c M n_L + h.c., \quad (73)$$

где

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu'_L \\ (\nu'_R)^c \end{pmatrix}, \quad (74)$$

а

$$M = \begin{pmatrix} M_L & M_D^T \\ M_D & M_R \end{pmatrix}$$

—  $4 \times 4$  матрица. Нетрудно видеть, что  $M^T = M$ . В результате стандартной процедуры диагонализации матрицы  $M$  ( $M = (U^T)^T m U^T$ ,  $U$  — унитарная  $4 \times 4$  матрица,  $m_{ik} = m_i \delta_{ik}$ ,  $m_i > 0$ ) получаем

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2} \bar{\chi} m \chi = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 m_i \bar{\chi}_i \chi_i, \quad (75)$$

где

$$\chi = U^T n_L + (U^T n_L)^c = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Очевидно, что

$$\chi_i^c = \chi_i.$$

Итак, нейтрино с определенными массами являются в рассматриваемом случае массового члена (72) нейтрино Майорана.

Из (76) находим

$$n_L = U \chi_L. \quad (77)$$

Отсюда получаем следующие соотношения между токовыми полями нейтрино



и левыми компонентами полей нейтрино с майорановскими массами:

$$\begin{aligned} \nu_{iL} &= \sum_{k=1}^4 U_{ik} \chi_{kL}, \\ \nu_{iL}^c &= \sum_{k=1}^4 U_{i+2,k} \chi_{kL} \quad (i=1,2). \end{aligned} \quad (78)$$

Таким образом, если нейтринный массовый член имеет вид (72), то токовые поля нейтрино  $\nu_{iL}$  и  $\nu_{iL}^c$  представляют собой линейные ортогональные комбинации левых компонент массивных майорановских полей. Очевидно, что такая же схема смешивания возникнет и в случае стандартного майорановского массового члена для четырех заряженных лептонов и, соответственно, четырех типов левых токовых нейтрино. Привлекательность рассмотренной в этом разделе схемы в ее экономии – все компоненты полей нейтрино входят в ток. Если окажется, что в природе существует четыре заряженных лептона (в общем случае четное число заряженных лептонов), то это может быть аргументом в пользу правильности рассмотренной здесь схемы.

## 2.6. Смешивание двух полей нейтрино с майорановскими массами

В этом параграфе мы подробно рассмотрим простейший случай смешивания двух полей нейтрино с майорановскими массами. Предположим, что нейтринный массовый член представляет собой дираковский и майорановский массовый член, построенный с помощью левого токового поля  $\nu_L$  (поля электронного нейтрино либо мюонного нейтрино, ...) и поля  $\nu_R$ , не входящего в лагранжиан взаимодействия стандартной теории.

Имеем

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[ m_L (\nu_L)^c \nu_L + m_R \bar{\nu}_R (\nu_R)^c + m_D (\bar{\nu}_L \nu_L + (\nu_L)^c (\nu_R)^c) \right] + h.c., \quad (79)$$

где  $m_L$ ,  $m_R$  и  $m_D$  – константы. Как обычно, запишем выражение (79) в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\bar{n}_L)^c M n_L + h.c. \quad (80)$$

Здесь

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_L^c \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}. \quad (81)$$

Будем предполагать, что имеет место РС – инвариантность. В этом случае  $M^+ = M$ . Поскольку  $M^T = M$ , то, следовательно,  $M^* = M$ .

Для вещественной симметричной матрицы имеем

$$M = O m' O^T, \quad (82)$$

здесь  $O$  - ортогональная матрица, а  $m'_{ik} = m'_i \delta_{ik}$ , где  $m'_i$  - корни уравнения  $\det(M - m') = 0$ . Находим, что

$$m'_{1,2} = \frac{1}{2} (m_L + m_R \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2}). \quad (83)$$

Ортогональная  $2 \times 2$  матрица  $O$  имеет следующий общий вид:

$$O = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (84)$$

С помощью (82) и (84) получаем

$$\begin{aligned} m_L &= \cos^2\theta m'_1 + \sin^2\theta m'_2, \\ m_R &= \sin^2\theta m'_1 + \cos^2\theta m'_2, \\ m_D &= \cos\theta \sin\theta (m'_1 - m'_2). \end{aligned} \quad (85)$$

Отсюда следует, что

$$m_L - m_R = \cos 2\theta (m'_1 - m'_2). \quad (86)$$

Из (85) и (86) находим, что угол  $\theta$  связан следующим соотношением с параметрами  $m_L$ ,  $m_R$  и  $m_D$ :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2m_D}{m_L - m_R}. \quad (87)$$

Далее, из (83) очевидно, что величины  $m'_{1,2}$  могут быть как положительными, так и отрицательными. Запишем

$$m'_i = \eta_i m_i, \quad (88)$$

где  $m_i = |m'_i|$ , а  $\eta_i = \pm 1$ . Подставляя теперь (82) в (80), для лагранжиана получаем следующее стандартное выражение:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \bar{y} m y = -\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} m_i \bar{y}_i y_i, \quad (89)$$

где

$$y = O^T n_L + \eta (O^T n_L)^c = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (90)$$

Очевидно, что

$$y_i^c = \eta_i y_i. \quad (91)$$

Таким образом, поле  $\chi_i$  является полем нейтрино Майорана с массой  $m_i$ ;  $\eta_i$  представляет собой  $C$  - четность поля  $\chi_i$ .

Получим теперь соотношения, связывающие токовую компоненту  $\nu_L$  и стерильную компоненту  $\nu_L^c$  с левыми компонентами полей нейтрино Майорана. Используя ортогональность матрицы  $O$ , из (90) находим

$$\nu_L = O \chi_L. \quad (92)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \nu_L &= \cos\theta \chi_{1L} - \sin\theta \chi_{2L}, \\ \nu_L^c &= \sin\theta \chi_{1L} + \cos\theta \chi_{2L}. \end{aligned} \quad (93)$$

Угол  $\theta$  представляет собой, следовательно, угол смешивания. Как видно из соотношения (87), угол смешивания отличен от нуля только в случае, если в нейтринном массовом члене имеется дираковское слабое.

Все полученные до сих пор соотношения были точными. Теперь мы рассмотрим два представляющих физический интерес предельных случая /28/.

I. Предположим, что

$$m_L = m_R, \quad m_D \neq 0. \quad (94)$$

Из соотношения (87) очевидно, что при этом  $\theta = \pi/4$  (максимальное смешивание). Далее, из соотношения (83) получаем

$$m'_{1,2} = m_L \pm m_D. \quad (95)$$

Для полей Майорана  $\chi_1$  и  $\chi_2$  с помощью (90) находим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\nu_L + \nu_L^c + \eta_1 (\nu_R^c + \nu_R)], \\ \chi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [-\nu_L + \nu_L^c + \eta_2 (-\nu_R^c + \nu_R)]. \end{aligned} \quad (96)$$

<sup>X</sup> Другой эквивалентный способ приведения массового члена к диагональному виду состоит в следующем. Подставим (82) в (80). Получим

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \bar{\chi} m' \chi = -\frac{1}{2} \sum_i m'_i \bar{\chi}_i \chi_i,$$

где  $\chi = O \nu_L + (O \nu_L^c)$ . Очевидно, что  $\chi_i^c = \chi_i$ . Если  $m'_i > 0$ , то лагранжиан имеет стандартный вид. Если  $m'_i > 0$  и  $m'_j < 0$ , то в этом случае вместо поля  $\chi_2$  введем поле  $\chi'_2 = \gamma \chi_2$ . Имеем  $m'_2 \bar{\chi}_2 \chi_2 = -m'_2 \bar{\chi}'_2 \chi'_2$ . Далее, получаем  $(\chi'_2)^c = -\chi'_2$ .

Таким образом, поле  $\chi'_2$  является полем нейтрино Майорана с массой  $(-m'_2)$  и отрицательной  $C$ -четностью.

Если  $m_L \pm m_D > 0$ , то в этом случае  $\eta_1 = \eta_2 = 1$  и из (96) получаем

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu + \nu^c), \\ \chi_2 &= \gamma_5 \frac{1}{\sqrt{2}} (-\nu + \nu^c). \end{aligned} \quad (97)$$

Если  $m_L + m_D > 0$ ,  $m_L - m_D < 0$ , то в этом случае  $\eta_1 = 1$ ,  $\eta_2 = -1$  и для  $\chi_1$  и  $\chi_2$  находим

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu + \nu^c), \\ \chi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-\nu + \nu^c). \end{aligned} \quad (98)$$

Отметим, что майорановские состояния аналогичны в этом последнем случае  $K_1^+$  и  $K_2^-$  состояниям; осцилляции нейтрино аналогичны  $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$  осцилляциям.

2. Предположим, что

$$m_D \gg m_L, m_R \quad ; \quad m_D > 0. \quad (99)$$

Из (83) и (87) при этом находим

$$m'_{1,2} = \frac{1}{2} (m_L + m_R) \pm m_D, \quad \theta = \pi/4. \quad (100)$$

Очевидно, что  $m'_1 > 0$ ,  $m'_2 < 0$ . Таким образом,  $\eta_1 = 1$ ,  $\eta_2 = -1$ . С помощью (96) получаем, что поля нейтрино Майорана  $\chi_1$  и  $\chi_2$  имеют в рассматриваемом случае вид

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu + \nu^c), \\ \chi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-\nu + \nu^c). \end{aligned} \quad (101)$$

Массы нейтрино Майорана равны

$$m_{1,2} = m_D \pm \frac{1}{2} (m_L + m_R). \quad (102)$$

Итак, если выполняются условия (99), то C-четности нейтрино с майорановскими массами противоположны, угол смешивания равен  $\pi/4$ , разность масс нейтрино много меньше их масс. Полная аналогия со случаем нейтральных каонов очевидна.

Полезно рассмотреть также предельный случай

$$m_L = m_R = 0. \quad (103)$$

Из (79) очевидно, что нейтринный массовый член принимает при этом вид

$$\mathcal{L} = -m_D \bar{\nu} \nu. \quad (104)$$

Таким образом, поле  $\nu$  представляет собой в этом предельном случае поле нейтрино с дираковской массой. С другой стороны, с помощью (83), (87), (89) и (90) получаем

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} m_{\nu} \bar{\chi}_i \chi_i, \quad (105)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu + \nu^c), \\ \chi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-\nu + \nu^c). \end{aligned} \quad (106)$$

Поля  $\chi_1$  и  $\chi_2$  являются полями нейтрино Майорана с противоположными  $C$ -четностями и массой  $m_{\nu}$ . Из (106) имеем

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_1 - \chi_2), \\ \nu^c &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_1 + \chi_2). \end{aligned} \quad (107)$$

Мы приходим к известному утверждению: поле нейтрино с дираковской массой всегда можно представить в виде комбинации двух полей Майорана с одной и той же массой и углом смешивания  $\pi/4$ .

До сих пор мы рассматривали схему смешивания нейтрино, отвечающую дираковскому и майорановскому массовому члену, построенному с помощью токового левого поля  $\nu_L$  и правого поля  $\nu_R$ , не входящего в лагранжиан взаимодействия стандартной теории. В такой схеме смешивания возможны осцилляции типа  $\nu_L \rightleftharpoons \bar{\nu}_L$ . Очевидно, что все формулы этого параграфа относятся также к обобщенной схеме Зельдовича-Конопинского-Махмуда, рассмотренной в § 2.5. В этой схеме как  $\nu_L$ , так и  $\nu_R$  являются токовыми полями. Заряженный ток дается выражением (61), а нейтринный массовый член имеет вид (62), идентичный по форме (79). Смешивание в этой схеме приводит к осцилляциям между "активными" нейтрино (например,  $\nu_e \rightleftharpoons \nu_{\mu}$ ).

Наконец, очевидно, что общие формулы этого параграфа относятся также к схеме Грибова и Понтекорво, рассмотренной в § 2.3. При этом, например, для случая электронного и мюонного нейтрино в приведенных выше формулах необходимо сделать замену  $m_L \rightarrow m_{ee}$ ,  $m_R \rightarrow m_{\mu\mu}$ ,  $m_{\nu} \rightarrow m_{e\mu}$  (обозначения см. в (70)).

### 3. Осцилляции нейтрино

#### 3.1. Общие выражения для вероятностей осцилляций

Во второй главе мы рассмотрели различные возможные схемы смешивания нейтрино. Смешивание нейтрино проявится в том, что в пучках нейтрино будут иметь место осцилляции  $/1,2/$ , аналогичные осцилляциям нейтральных каонов. Здесь мы подробно рассмотрим это явление.

Итак, предположим, что левые токовые поля  $\nu_{L\alpha}$  представляют

собой ортогональные комбинации левых компонент полей нейтрино с отличными от нуля массами:

$$\nu_e = \sum_i U_{ei} \nu_{iL}. \quad (108)$$

Здесь  $U$  - унитарная матрица смешивания,  $\nu_i$  - поле нейтрино с массой  $m_i$ . Мы видели в предыдущей главе, что нейтрино могут обладать как дираковскими, так и майорановскими массами. При произвольном числе  $n$  заряженных лептонов число нейтрино с дираковской массой равно в общем случае  $n$ . Число нейтрино с майорановской массой может равняться  $n$  (майорановский массовый член) либо  $2n$  (дираковский и майорановский массовый член).

Рассмотрим поведение пучка нейтрино в случае, если имеет место смешивание. Будем предполагать, что  $|\vec{p}| \gg m_i$  ( $\vec{p}$  - импульс нейтрино). Из (108) для вектора состояния нейтрино  $\nu(\ell = e, \mu, \tau, \dots)$  получаем при этом

$$|\nu_\ell\rangle = \sum_i U_{\ell i}^* |i, L\rangle, \quad (109)$$

где  $|i, L\rangle$  - вектор состояния нейтрино (дираковского либо майорановского) с импульсом  $\vec{p}$ , массой  $m_i$  и отрицательной спиральностью. Соотношение (109) означает, что вектор состояния нейтрино, участвующего в слабом взаимодействии, представляет собой когерентную суперпозицию векторов состояния нейтрино с различными массами. Отметим, что в основе этого соотношения лежит предположение о том, что разности масс нейтрино достаточно малы.

Пусть в результате некоторого слабого процесса образуется пучок нейтрино  $\nu_\ell$ . Такой пучок в начальный момент времени описывается вектором  $|\nu_\ell\rangle$ . Вектор состояния пучка в момент времени  $t$  дается выражением

$$|\nu_\ell\rangle_t = e^{-iH_0 t} |\nu_\ell\rangle, \quad (110)$$

где  $H_0$  - свободный гамильтониан. Имеем<sup>x</sup>

$$H_0 |i, L\rangle = E_i |i, L\rangle, \quad (111)$$

<sup>x</sup> В рассматриваемых нами теориях нейтрино с определенными массами являются нестабильными частицами. Если, например,  $m_1 > m_2$ , то возможен распад  $\nu_1 \rightarrow \nu_2 + \gamma$ . Расчеты показывают, однако, что времена жизни нейтрино на много порядков превосходят время жизни Вселенной<sup>/29/</sup>. При рассмотрении осцилляций нейтрино нестабильность нейтрино можно, следовательно, учитывать. Отметим, что нестабильность нейтрино может иметь существенное значение для астрофизики<sup>/30/</sup>.

где  $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}$ . Из (I09)-(III) получаем

$$|\nu_{\ell t}\rangle = \sum_i e^{-iE_i t} |i, L\rangle U_{\ell i}^* \quad (\text{II2})$$

Нейтрино регистрируются путем наблюдения обусловленных слабым взаимодействием процессов. Для того чтобы найти амплитуду вероятности обнаружения нейтрино данного типа в пучке, который описывается вектором  $|\nu_{\ell t}\rangle$ , этот вектор необходимо разложить по полной системе векторов состояния нейтрино. При этом имеется существенное отличие схем с дираковским и майорановским массовым членом (в дальнейшем  $\mathcal{D}$ - и  $\mathcal{M}$ -схем) от схемы с дираковским и майорановским массовым членом ( $\mathcal{D}+\mathcal{M}$ ). Для первых двух схем смешивания число типов нейтрино, участвующих в слабом взаимодействии, совпадает с числом нейтрино с определенной массой. Другими словами, индекс  $i$  в выражении (I09) принимает в случае этих схем столько же значений, сколько и индекс  $\ell$ . Используя унитарность матрицы смешивания  $U$ , из (I09) при этом находим

$$|i, L\rangle = \sum_{\ell'=1}^n |\nu_{\ell' t}\rangle U_{\ell' i} \quad (\text{II3})$$

В случае схемы  $\mathcal{D}+\mathcal{M}$  суммирование по  $i$  в выражении (I09) производится от 1 до  $2n$  система векторов  $|\nu_{\ell t}\rangle$  (векторов состояния нейтрино, участвующих в слабом взаимодействии) не является полной. Наряду с (I09) из (60) в этом случае получаем

$$|\bar{\nu}_{\ell t}\rangle = \sum_{i=1}^{2n} |i, L\rangle U_{\ell i}^* \quad (\text{II4})$$

где  $|\bar{\nu}_{\ell t}\rangle$  - вектор состояния левого антинейтрино (вектор состояния стерильной частицы  $^{2,5/}$  - частицы, не участвующей в стандартном слабом взаимодействии). Используя унитарность  $2n \times 2n$  матрицы  $U$ , из (I09) и (II4) находим

$$|i, L\rangle = \sum_{\ell'} |\nu_{\ell' t}\rangle U_{\ell' i} + \sum_{\ell'} |\bar{\nu}_{\ell' t}\rangle U_{\ell' i} \quad (\text{II5})$$

Таким образом, векторы  $|i, L\rangle$  представляют собой в случае  $\mathcal{D}+\mathcal{M}$  схемы суперпозицию векторов состояния активных и стерильных нейтрино.

Подставляя (II3) в (II2), в случае  $\mathcal{D}$ - и  $\mathcal{M}$ -схем имеем

$$|\nu_{\ell t}\rangle = \sum_{\ell'} |\nu_{\ell' t}\rangle \left( \sum_{i=1}^n U_{\ell' i} e^{-iE_i t} U_{\ell i}^* \right) \quad (\text{II6})$$

В случае  $\mathcal{D}+\mathcal{M}$  схемы из (II2) и (II5) находим

$$|\nu_{\ell t}\rangle = \sum_{\ell'} |\nu_{\ell'}\rangle \left( \sum_{i=1}^{2n} U_{\ell' i} e^{-iE_i t} U_{i \ell}^* \right) + \sum_{\ell'} |\bar{\nu}_{\ell'}\rangle \left( \sum_{i=1}^{2n} U_{\ell' i} e^{-iE_i t} U_{i \ell}^* \right). \quad (\text{II7})$$

Из (II6) и (II7) очевидно, что амплитуда вероятности обнаружения  $\nu_{\ell'}$  через время  $t$  после образования  $\nu_{\ell}$  равна

$$a_{\nu_{\ell'}; \nu_{\ell}}(t) = \sum_i U_{\ell' i} e^{-iE_i t} U_{i \ell}^*. \quad (\text{II8})$$

В (II8) суммирование по  $i$  проводится от I до  $n$  в случае  $\mathcal{D}$ -и  $\mathcal{M}$ -схем и от I до  $2n$  в случае  $\mathcal{D} + \mathcal{M}$  схемы. Отметим, что амплитуду

$a_{\nu_{\ell'}; \nu_{\ell}}(t)$  можно представить также в виде

$$a_{\nu_{\ell'}; \nu_{\ell}}(t) = e^{-iJt} \left( \delta_{\ell \ell'} + \sum_i U_{\ell' i} (e^{-i(E_i - J)t} - 1) U_{i \ell}^* \right) \quad (\text{II9})$$

( $J$  фиксировано). Из этого выражения очевидно, что  $|a_{\nu_{\ell'}; \nu_{\ell}}| \neq \delta_{\ell \ell'}$  только в случае, если по крайней мере две массы нейтрино не равны друг другу.

В  $\mathcal{D} + \mathcal{M}$  схеме вектор состояния нейтрино представляет собой когерентную смесь векторов состояния активных и стерильных нейтрино. Из (II7) следует, что амплитуда вероятности обнаружения стерильного антинейтрино  $\bar{\nu}_{\ell}$  через время  $t$  после рождения  $\nu_{\ell}$  дается в этой схеме следующим выражением:

$$a_{\bar{\nu}_{\ell}; \nu_{\ell}}(t) = \sum_{i=1}^{2n} U_{\ell i} e^{-iE_i t} U_{i \ell}^*. \quad (\text{I20})$$

С помощью (II8) находим, что вероятность обнаружения в момент времени  $t$  нейтрино  $\nu_{\ell'}$  в пучке, который при  $t=0$  представлял собой пучок  $\nu_{\ell}$ , дается в случае  $\mathcal{D}$ - и  $\mathcal{M}$ -схем выражением

$$P_{\nu_{\ell'}; \nu_{\ell}}(t) = \left| \sum_{i=1}^{2n} U_{\ell' i} e^{-iE_i t} U_{i \ell}^* \right|^2. \quad (\text{I21})$$

В случае  $\mathcal{D} + \mathcal{M}$  схемы вероятности обнаружения в момент времени  $t$  активного нейтрино  $\nu_{\ell'}$  и стерильного антинейтрино  $\bar{\nu}_{\ell}$  даются (при условии, что в начальный момент времени образуются  $\nu_{\ell}$ ) выражениями

$$P_{\nu_{\ell'}; \nu_{\ell}}(t) = \left| \sum_{i=1}^{2n} U_{\ell' i} e^{-iE_i t} U_{i \ell}^* \right|^2, \quad (\text{I22})$$

$$P_{\bar{\nu}_{\ell}; \nu_{\ell}}(t) = \left| \sum_{i=1}^{2n} U_{\ell i} e^{-iE_i t} U_{i \ell}^* \right|^2.$$



Итак, если векторы состояния нейтрино представляют собой когерентные суперпозиции векторов состояния нейтрино с различными массами, то в пучке нейтрино  $\nu_e$  окажутся отличными от нуля вероятности переходов  $\nu_e \rightarrow \nu_{e'}$  (в случае  $\mathcal{D}$ - и  $\mathcal{M}$ -схем) либо вероятности переходов  $\nu_e \rightarrow \nu_{e'}$  и  $\nu_e \rightarrow \bar{\nu}_{e'}$  (в случае  $\mathcal{D} + \mathcal{M}$  схемы). Как видно из выражений (I21) и (I22), вероятности появления нейтрино нового типа периодически зависят от времени. Это явление носит название осциллирующий нейтрино /1,2/.

Квантовомеханическая природа осциллиций нейтрино видна из выражений (I09) и (I12) и состоит в следующем. Когерентные составляющие вектора состояния исходного нейтрино через макроскопическое время  $t$  приобретают различные фазовые множители (в силу того, что  $\nu_e$  обладают разными массами). Такой вектор состояния уже не является вектором состояния нейтрино исходного типа, а представляет собой суперпозицию векторов состояния нейтрино, образующих полную систему.

Явление осциллиций нейтрино аналогично явлению осциллиций нейтральных каонов. Для того чтобы осциллиции были возможны, необходимо, чтобы:

1) гамильтониан, ответственный за рождение и поглощение частиц, сохранял некоторые квантовые числа (странность в случае каонов, лептонные числа в случае нейтрино);

2) свободный гамильтониан (массовый член) был бы недиагонален по этим квантовым числам; состояния с определенной массой (и шириной) представляют собой при этом суперпозицию состояний с определенной странностью в случае каонов и определенными лептонными числами в случае нейтрино.

Рассмотрим теперь поведение пучка антинейтрино в случае, если имеет место смешивание. Для вектора состояния антинейтрино с импульсом  $\vec{p}$  ( $|\vec{p}| \gg m_i$ ) имеем

$$|\bar{\nu}_e\rangle = \sum |i, R\rangle U_{ei}. \quad (I23)$$

Здесь  $|i, R\rangle$  - вектор состояния правого антинейтрино с массой  $m_i$  в случае  $\mathcal{D}$ -схемы либо правого нейтрино с майорановской массой  $m_i$  в  $\mathcal{M}$ -схеме. В случае  $\mathcal{D} + \mathcal{M}$  схемы имеем

$$\begin{aligned} |\bar{\nu}_e\rangle &= \sum_{i=1}^{2n} |i, R\rangle U_{ei}, \\ |\nu_{eR}\rangle &= \sum_{i=1}^{2n} |i, R\rangle U_{ei}, \end{aligned} \quad (I24)$$

где  $|i, R\rangle$  - вектор состояния правого нейтрино с майорановской массой  $m_i$ . Для вероятности перехода  $\nu_L \rightarrow \nu_L'$  за время  $t$  в  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{M}$  случаям имеем

$$P_{\nu_L', \nu_L}^{\mathcal{D}}(t) = \left| \sum_{i=1}^n U_{\nu_L' i}^* e^{-iE_i t} U_{\nu_L i} \right|^2 \quad (I25)$$

В  $\mathcal{D} + \mathcal{M}$  схеме наряду с вероятностью перехода  $\bar{\nu}_L \rightarrow \bar{\nu}_L'$

$$P_{\bar{\nu}_L', \bar{\nu}_L}^{\mathcal{D}}(t) = \left| \sum_{i=1}^{2n} U_{\bar{\nu}_L' i}^* e^{-iE_i t} U_{\bar{\nu}_L i} \right|^2 \quad (I26)$$

отлична от нуля также вероятность перехода между активным анти-нейтрино  $\bar{\nu}_L$  и стерильным правым нейтрино  $\nu_{R'}^c$ :

$$P_{\nu_{R'}^c, \bar{\nu}_L}^{\mathcal{D}} = \left| \sum_{i=1}^{2n} U_{\nu_{R'}^c i}^* e^{-iE_i t} U_{\bar{\nu}_L i} \right|^2 \quad (I27)$$

Из (I21) и (I22) очевидно, что вероятность обнаружения  $\nu_{R'}^c(\bar{\nu}_L')$  на расстоянии  $R$  от места образования  $\nu_L(\bar{\nu}_L)$  может быть записана в следующем виде:

$$P_{\nu_{R'}^c, \bar{\nu}_L'}^{\mathcal{D}}(\bar{\nu}_L, \bar{\nu}_L') (R/p) = \sum_i |U_{\nu_{R'}^c i}|^2 |U_{\bar{\nu}_L i}|^2 + 2 \sum_{i>k} |U_{\nu_{R'}^c i} U_{\bar{\nu}_L i}^* U_{\nu_{R'}^c k} U_{\bar{\nu}_L k}^*| \cos\left(\frac{(m_i^2 - m_k^2) R}{2p} + \phi_{ik}^{e'l'}\right) \quad (I28)$$

Здесь

$$\phi_{ik}^{e'l'} = \arg(U_{\nu_{R'}^c i} U_{\bar{\nu}_L i}^* U_{\nu_{R'}^c k} U_{\bar{\nu}_L k}^*) \quad (I29)$$

При получении выражения (I28) мы ограничились линейным по членом в разложении  $E_i$  ( $E_i \approx p + \frac{m_i^2}{2p}$ ). В случае  $\mathcal{D}$ - и  $\mathcal{M}$ -схем суммирование в (I28) проводится от 1 до  $n$ , в случае  $\mathcal{D} + \mathcal{M}$  схемы - от 1 до  $2n$ . Очевидно, что выражение для вероятности  $P_{\nu_{R'}^c, \bar{\nu}_L'}^{\mathcal{D}}$  имеет аналогичный вид (с очевидной заменой  $U_{\nu_{R'}^c i} \rightarrow U_{\nu_{R'}^c i}$  и  $U_{\bar{\nu}_L i} \rightarrow U_{\bar{\nu}_L i}$ ).

Вероятности  $P_{\nu_{R'}^c, \nu_L}$  и  $P_{\bar{\nu}_L', \bar{\nu}_L}$  могут быть записаны также в виде

$$P_{\nu_e'; \nu_e}(\vec{p}; \vec{p}') = \delta_{e'e'} + 2 \sum_{i \neq k} |U_{ei} U_{ei}^* U_{ek}^* U_{ek}| \left[ \cos \left( \frac{m_i^2 - m_k^2}{2p} L \right) \mp \mp \phi_{ik}^{e'e'} \right] - \cos \phi_{ik}^{e'e'}. \quad (130)$$

Отметим, что для получения этих последних выражений необходимо использовать унитарность матрицы  $U$ .

В заключение получим общие соотношения, которым обязаны удовлетворять вероятности осцилляций. Сравнивая выражения (121) и (125), а также (122) и (126), мы заключаем, что вероятности переходов  $\nu_e \rightarrow \nu_{e'}$  и  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_{e'}$  отличаются заменой  $U_{ei} \rightarrow U_{ei}^*$ ,  $U_{ek} \rightarrow U_{ek}^*$ . Таким образом, для всех рассмотренных нами схем имеет место соотношение

$$P_{\nu_e'; \nu_e}(t) = P_{\bar{\nu}_e'; \bar{\nu}_e}(t). \quad (131)$$

Очевидно, что это общее соотношение является следствием СРТ-инвариантности /13/. Далее, если выражения (121) и (125) просуммировать по всем возможным значениям  $e'$ , то из унитарности  $n \times n$  матрицы смешивания следует, что

$$\sum_{e'} P_{\nu_e'; \nu_e}(t) = 1, \quad \sum_{e'} P_{\bar{\nu}_e'; \bar{\nu}_e}(t) = 1. \quad (132)$$

Эти соотношения справедливы только для  $\mathcal{D}$ -и  $\mathcal{M}$ -схем и имеют крайне простой смысл: сумма вероятностей переходов нейтрино (антинейтрино) данного типа во все возможные активные нейтрино (антинейтрино) равна единице. В случае  $\mathcal{D} + \mathcal{M}$  схем нейтрино (антинейтрино) данного типа может переходить как в активные нейтрино (антинейтрино), так и в стерильные антинейтрино (нейтрино). Используя унитарность  $2n \times 2n$  матрицы смешивания, из (122), (126) и (127) получаем в этом случае

$$\sum_{e'} P_{\nu_e'; \nu_e}(t) + \sum_{e'} P_{\bar{\nu}_e'; \nu_e}(t) = 1, \quad (133)$$

$$\sum_{e'} P_{\bar{\nu}_e'; \bar{\nu}_e}(t) + \sum_{e'} P_{\nu_e'; \bar{\nu}_e}(t) = 1.$$

Наконец, сформулируем общие условия, при которых могут иметь место осцилляции нейтрино. Предположим, что все массы  $m_i$  одинаковы. Тогда в выражении (121) и других выражениях для вероятностей экспонента  $e^{-iE_i t}$  может быть вынесена за знак суммы по  $i$ . В силу унитарности матрицы смешивания получаем при этом  $P_{\nu_e'; \nu_e} = \delta_{e'e'}$ ,  $P_{\bar{\nu}_e'; \bar{\nu}_e} = \delta_{e'e'}$  и т.д. Далее, пусть  $U_{ei} = \delta_{ei}$  является в этом

случае поле нейтрино с массой (дираковской либо майорановской)  $m_e$ . В этом случае также  $P_{\nu_i \nu_j} = \delta_{ij}$ . Таким образом, для того чтобы нейтрино одного типа могло переходить в вакууме в нейтрино другого типа (либо в стерильное нейтрино) необходимо, чтобы:

- 1) массы нейтрино были разными;
- 2) недиагональные элементы матрицы смешивания были отличными от нуля.

### 3.2. Эквивалентность осцилляций в дираковском и майорановском случаях. Возможные методы проверки CP-инвариантности

Вероятности переходов между различными состояниями нейтрино определяются разностями масс нейтрино и параметрами, входящими в матрицу смешивания  $U$ . Унитарная  $n \times n$  матрица характеризуется  $n^2$  вещественными параметрами<sup>X</sup>. Это число составляют  $\frac{n(n-1)}{2}$  углов<sup>XX</sup> и  $\frac{n(n+1)}{2}$  фаз.

В действительности число физических фаз в матрице смешивания значительно меньше, чем  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Это связано с тем, что фазы фермионных полей не являются наблюдаемыми величинами. Рассмотрим вначале смешивание нейтрино с дираковскими массами. Заряженный ток и массовый член полей нейтрино и заряженных лептонов имеют в этом случае вид

$$\begin{aligned} j_a^{(+)} &= 2 \sum_{i,l} \bar{\nu}_i U_{il} \gamma_a \nu_l, \\ \mathcal{L}^{\bar{\nu}} &= - \sum_i m_i \bar{\nu}_i \nu_i - \sum_l m_l \bar{l} l. \end{aligned} \quad (I34)$$

Перепишем следующим образом эти выражения:

$$j_a^{(+)} = 2 \sum_{i,l} \bar{\nu}_i U_{il} U'_{li} \gamma_a \nu_l', \quad (I35)$$

<sup>X</sup> Действительно, унитарная матрица всегда может быть представлена в виде  $U = e^{iK}$ , где  $K$  - эрмитова матрица. Эрмитова  $n \times n$  матрица характеризуется  $n$  (диаг. элем.) +  $2 \left( \frac{n^2 - n}{2} \right)$  (недиаг. элем.) =  $n^2$  вещественными параметрами.

<sup>XX</sup> Число углов, характеризующих унитарную матрицу, совпадает с числом элементов ортогональной матрицы. Ортогональная матрица  $O$  может быть представлена в виде  $O = e^{\kappa}$ , где  $\kappa$  - вещественная антисимметричная матрица. Очевидно, что  $n \times n$  антисимметричная матрица характеризуется  $\frac{n(n-1)}{2}$  элементами.

$$\mathcal{L}' = -\sum_i m_i \bar{\psi}'_i \psi'_i - \sum_l m_l \bar{\ell}'_l \ell'_l.$$

Здесь

$$\psi'_i = e^{i\alpha_i} \psi_i, \quad \ell'_l = e^{i\beta_l} \ell_l, \quad (I36)$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_l$  - произвольные вещественные параметры, а

$$U' = S U S^+, \quad S_{\ell\ell'} = e^{i\beta_l} \delta_{\ell\ell'}, \quad (S_{\psi})_{ik} = e^{i\alpha_i} \delta_{ik}. \quad (I37)$$

Поля  $\psi'_i, \ell'_l$  и, соответственно,  $\psi_i$  и  $\ell_l$  физически неотличимы. Таким образом, матрица смешивания определена с точностью до преобразования (I37). Это означает, что только те фазы в матрице смешивания, которые не могут быть устранены преобразованием (I37), являются физическими. При подсчете числа произвольных фаз, которые входят в  $S$  и  $S_{\psi}$ , необходимо из этих матриц выделить общие фазы. Запишем

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \tilde{\alpha}_i + \alpha, \\ \beta_l &= \tilde{\beta}_l + \beta. \end{aligned} \quad (I38)$$

Здесь

$$\sum_i \tilde{\alpha}_i = 0, \quad \sum_l \tilde{\beta}_l = 0 \quad (I39)$$

и, следовательно,

$$\alpha = \frac{1}{n} \sum_i \alpha_i, \quad \beta = \frac{1}{n} \sum_l \beta_l. \quad (I40)$$

С помощью (I38) получаем

$$U' = e^{i(\beta-\alpha)} \tilde{S} U \tilde{S}^+, \quad (I41)$$

где

$$\tilde{S}_{\ell\ell'} = \delta_{\ell\ell'} e^{i\tilde{\beta}_l}, \quad (S_{\psi})_{ik} = \delta_{ik} e^{i\tilde{\alpha}_i}. \quad (I42)$$

Таким образом, число имеющихся в нашем распоряжении произвольных фаз равно  $2(n-1)+1$ . Окончательно в матрице смешивания нейтрино с дираковскими массами остается

$$\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad (I43)$$

физических (не устранимых переопределением фаз фермионных полей) фаз. Эти фазы ответственны за нарушение CP-инвариантности<sup>x</sup>. Из (I43) следует, что при  $n=2$  число физических фаз в матрице смешивания равно нулю. Этот факт хорошо известен: в случае  $n=2$  PC-инвариантность автоматически выполняется. При  $n=3$  в матрицу смешивания входит одна ответственная за нарушение PC-инвариантности фаза и т.д.

Обратимся теперь к общим выражениям (I2I) и (I25). Из сравнения этих выражений очевидно, что в случае, если матрица смешивания вещественна, имеет место соотношение /I3/:

$$P_{\nu_{e'}; \nu_e}(t) = P_{\bar{\nu}_{e'}; \bar{\nu}_e}(t). \quad (I44)$$

Итак, если имеет место PC-инвариантность в лептонном секторе, то вероятность перехода  $\nu_e \rightarrow \nu_{e'}$

<sup>x</sup> Нетрудно видеть, что в случае, если лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{i g}{2\sqrt{2}} \sum_{i,e} \bar{\nu}_i U_{ei}^* (1+\gamma_5) \ell W_a + \frac{i g}{2\sqrt{2}} \sum_{i,e} \bar{\ell}_e (1+\gamma_5) U_{ei} \nu_i \bar{W}_a$$

инвариантен относительно PC-преобразования, матрица  $U$  вещественна. В этом выражении  $W_a$  - поле заряженных промежуточных бозонов,

$$g^2/8m_W^2 = G/12, \quad \bar{W}_a = -\eta_a W_a^\dagger (\eta_1 = -1, \eta_4 = 1).$$

Действительно, если  $U_{PC}$  - оператор PC-преобразования, то

$$U_{PC}^{-1} \ell(x) U_{PC} = -\gamma_4 C \bar{\ell}^T(x'), \quad U_{PC}^{-1} \nu_i(x) U_{PC} = \nu_i^T(x') C^{-1} \gamma_4,$$

$$U_{PC}^{-1} W_a(x) U_{PC} = -\eta_a \bar{W}_a(x'),$$

$$x' = (-\vec{x}, ix_0).$$

Из условия PC-инвариантности лагранжиана

$$U_{PC}^{-1} \mathcal{L}(x) U_{PC} = \mathcal{L}(x')$$

легко находим, что

$$U_{ei}^* = U_{ei}.$$

равна вероятности перехода  $\bar{\nu}_i \rightarrow \bar{\nu}_{i'}$ . Отметим, что равенство вероятностей диагональных переходов  $\bar{\nu}_i \rightarrow \bar{\nu}_i$  и  $\bar{\nu}_{i'} \rightarrow \bar{\nu}_{i'}$  является следствием CPT - теоремы. Проверка соотношений (I43) при  $i' \neq i$  явилась бы, следовательно, возможной проверкой PC-инвариантности слабого взаимодействия лептонов (при условии, что имеет место смешивание). Мы вернемся к обсуждению этого вопроса в конце параграфа.

Перейдем теперь к рассмотрению случая смешивания  $n$ -нейтрино с майорановскими массами. Заряженный ток и массовый член даются в этом случае выражениями

$$j_a^{(4)} = 2 \sum_{i, l} \bar{\chi}_i \chi_l U_{li}^* \gamma_a \ell_l, \quad (I45)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_i m_i \bar{\chi}_i \chi_i - \sum_l m_l \bar{\ell} \ell,$$

где

$$\chi_i^c = \chi_i \quad (I46)$$

- поле Майорана.

Условия (I46), по существу, фиксируют фазы майорановских полей. Фазы полей лептонов  $\ell(x)$  произвольны. Соответственно, вместо  $\ell(x)$  введем

$$\ell' = e^{i\beta \ell} \ell,$$

где  $\beta \ell$  - произвольные параметры. Заряженный ток и массовый член переищутся при этом следующим образом:

$$j_a^{(4)} = 2 \sum_{i, l} \bar{\chi}_i \chi_l U_{li}^* \gamma_a \ell'_l, \quad (I47)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_i m_i \bar{\chi}_i \chi_i - \sum_l m_l \bar{\ell}' \ell',$$

где

$$U' = S U, \quad S_{\ell \ell'} = e^{i\beta \ell} \delta_{\ell \ell'}. \quad (I48)$$

Итак, в случае смешивания нейтрино с майорановскими массами матрица смешивания определена с точностью до преобразования (I48). Это означает, что число физических фаз, входящих в матрицу смешивания, равно в этом случае

$$\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (I49)$$

Сравнивая (143) и (149), мы заключаем, что число фаз в матрице смешивания в случае майорановского массового члена больше, чем в случае дираковского массового члена <sup>X</sup>. Это утверждение иллюстрируется таблицей I, в которой для  $n = 2, 3, 4$  приведено число фаз, входящих в матрицу смешивания в случае  $M$ - и  $\mathcal{D}$ -схем.

Таблица I

Число фаз, входящих в матрицу смешивания в случае  $M$ -и  $\mathcal{D}$ -схем ( $n$  - число заряженных лептонов)

$n$	$M$	$\mathcal{D}$
2	1	0
3	3	1
4	6	3

Из общего выражения (128) следует, что вероятности переходов  $\nu_e \rightarrow \nu_{e'}$ , ( $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_{e'}$ ) зависят как от разностей масс нейтрино и углов смешивания, так и от фаз элементов матрицы смешивания. Так как число фаз, входящих в матрицу смешивания, разное, в  $M$ - и  $\mathcal{D}$ -случаях возникает вопрос, можно ли путем изучения осциллирующих нейтрино выяснить, какой частицей является нейтрино с определенной массой - дираковской или майорановской. Ответ на этот вопрос был дан в работах [15, 20]. Рассмотрим выражения (121) и (125) для вероятностей переходов  $\nu_e \rightarrow \nu_{e'}$  и  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_{e'}$ . Очевидно, что вероятности  $P_{\nu_e \nu_{e'}}$  и  $P_{\bar{\nu}_e \bar{\nu}_{e'}}$  не изменятся, если в (121) и (125) сделать замену

- X В дираковском случае левые и правые компоненты полей нейтрино независимы. Если левые компоненты умножить на произвольные фазовые множители ( $\nu_{iL} = e^{i\alpha_i} \nu_{iL}$ ), то правые компоненты можно всегда преобразовать путем умножения на те же фазовые множители ( $\nu_{iR} = e^{i\alpha_i} \nu_{iR}$ ). В результате при переходе к штрихованным полям нейтринный массовый член не изменится. В майорановском случае левые и правые компоненты полей нейтрино не независимы и связаны соотношением  $\chi_R = (\chi_L)^c = c \bar{\chi}_L^T$ . Если ввести  $\chi_{iL} = e^{i\alpha_i} \chi_{iL}$ , то для правых компонент имеем  $\chi_{iR} = e^{-i\alpha_i} \chi_{iR}$ . Нейтринный массовый член не инвариантен относительно таких преобразований.



$$U_{li} \rightarrow e^{i\eta} U_{li} e^{-i\delta_i}, \quad (150)$$

где  $\eta$  и  $\delta_i$  - произвольные параметры. Сравнивая (150) с (137), мы заключаем, что число фаз матрицы смешивания, которые входят в вероятности переходов  $P_{\nu_l; \nu_l}$  и  $P_{\bar{\nu}_l; \bar{\nu}_l}$ , одно и то же в случае дираковского и майорановского массовых членов. Очевидно, что оно равно

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}. \quad (151)$$

Таким образом, изучение осцилляций  $\nu_e \rightarrow \nu_{e'}$ ,  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_{e'}$  не позволяет ответить на вопрос о том, какой частицей является нейтрино с определенной массой - дираковской либо майорановской. Это, в принципе, можно выяснить путем исследования безнейтринного двойного  $\beta$  - распада (см. приложение Б).

До сих пор рассматривались только  $\mathcal{D}$ - и  $\mathcal{M}$ - члены. В случае дираковского и майорановского массового члена ( $\mathcal{D} + \mathcal{M}$  схема) участвующие в слабом взаимодействии активные нейтрино и антинейтрино ( $\nu_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \dots$ ) могут переходить в стерильные антинейтрино и нейтрино. Для того чтобы отличить  $\mathcal{D} + \mathcal{M}$  схему от  $\mathcal{D}$  - и  $\mathcal{M}$  - схем, необходима постановка таких экспериментов по поиску осцилляций, которые позволяли бы получить информацию об осцилляциях  $\nu_e \leftrightarrow \bar{\nu}_e$ ,  $\bar{\nu}_e \leftrightarrow \nu_e$ . Возможными опытами такого рода являются эксперименты, в которых нейтрино регистрируются путем наблюдения обусловленных нейтральными токами процессов /18/. Если исходные нейтрино представляют собой, например, мюнные нейтрино, то на расстоянии  $L$  от источника нейтрино имеем при этом

$$N^{NC}(R) = \sum_e P_{\nu_e; \nu_e}(R/\rho) N_0^{NC}, \quad (152)$$

где  $N(A)^{NC}$  - число событий на расстоянии  $R$ , а  $N_0^{NC}$  - ожидаемое в отсутствие осцилляций число событий. Отметим, что при получении (152) мы предположили справедливость стандартной теории; именно, мы предположили, что в нейтральный ток входят только левые компоненты полей нейтрино и что имеет место  $e - \mu - \tau \dots$  универсальность.

Для  $\mathcal{D}$ - и  $M$ -схем смешивания сумма вероятностей в правой части (I52) равна единице. В соответствии с этими схемами осцилляции нейтрино не должны, следовательно, наблюдаться в такого рода опытах.

В случае  $\mathcal{D}+H$  схемы смешивания сумма вероятностей в соотношении (I52) равна

$$\sum_{\ell} P_{\nu_{\ell}; \nu_{\mu}}(R/P) = 1 - \sum_{\ell} P_{\bar{\nu}_{\ell}; \bar{\nu}_{\mu}}(R/P). \quad (I53)$$

Таким образом, в случае  $\mathcal{D}+H$  схемы величина  $\sum_{\ell} P_{\nu_{\ell}; \nu_{\mu}}$ , во-первых, меньше единицы и, во-вторых, периодически зависит от  $R/P$ . Наблюдение осцилляций в таких опытах, в которых нейтрино детектируются путем регистрации обусловленных нейтральными токами процессов, было бы, следовательно, доказательством того, что нейтрино с определенными массами - майорановские частицы и что число массивных нейтрино больше числа токовых нейтрино (числа заряженных лептонов).

Мы рассмотрим в заключение возможный метод проверки CP-инвариантности в лептонном секторе /31/. Метод основан на изучении осцилляций в пучках нейтрино, полученных от распадов нейтральных каонов. Вначале, в общем случае нарушения PC - инвариантности, получим соотношения между разностями вероятностей переходов между нейтрино и антинейтрино /31,32/. Определим величину

$$\mathcal{D}_{\ell'\ell} = P_{\nu_{\ell'}; \nu_{\ell}} - P_{\bar{\nu}_{\ell'}; \bar{\nu}_{\ell}}. \quad (I54)$$

Из соотношений (I31), являющихся следствием CPT - инвариантности, следует, что

$$\mathcal{D}_{\ell'\ell} = -\mathcal{D}_{\ell\ell'}. \quad (I55)$$

Отсюда имеем

$$\partial_{\ell\ell} = 0. \quad (I56)$$

Далее, при любом фиксированном значении  $\ell$  имеем

$$\sum_{\ell'} \partial_{\ell\ell'} = \sum_{\ell'} P_{\nu_{\ell'}; \nu_{\ell}} - \sum_{\ell'} P_{\bar{\nu}_{\ell'}; \bar{\nu}_{\ell}} = 0 \quad (I57)$$

(суммирование проводится по всем возможным значениям  $\ell'$ ).

С помощью (I55) и (I57) для случаев осцилляций между двумя и тремя типами нейтрино между величинами  $\partial_{\ell\ell'}$  могут быть получены полезные соотношения. Действительно, рассмотрим вначале простейший случай осцилляций между двумя типами нейтрино (например,  $\nu_e \rightleftharpoons \nu_{\mu}$ ). С помощью (I57) в этом случае получаем

$$\begin{aligned} \partial_{ee} + \partial_{\mu e} &= 0, \\ \partial_{e\mu} + \partial_{\mu\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (I58)$$

Далее, из (I56) имеем

$$\partial_{ee} = \partial_{\mu\mu} = 0. \quad (I59)$$

Отсюда следует, что

$$\partial_{e\mu} = \partial_{\mu e} = 0. \quad (I60)$$

Таким образом, в случае осцилляций между двумя типами нейтрино величины  $\partial_{\ell\ell'}$  ( $\ell' \neq \ell$ ) обращаются в нуль и при нарушении CP-инвариантности. Отметим, что из (I60) и (I31) могут быть получены следующие соотношения:

$$P_{\nu_e; \nu_{\mu}} = P_{\bar{\nu}_e; \bar{\nu}_{\mu}} = P_{\nu_{\mu}; \nu_e} = P_{\bar{\nu}_{\mu}; \bar{\nu}_e}. \quad (I61)$$

Рассмотрим теперь более интересный случай осцилляций между тремя типами нейтрино ( $\nu_e \rightleftharpoons \nu_{\mu}$ ,  $\nu_e \rightleftharpoons \nu_{\tau}$ ,  $\nu_{\mu} \rightleftharpoons \nu_{\tau}$ ). Из (I57) в этом случае получаем

$$\begin{aligned}
 \partial_{ee} + \partial_{\mu e} + \partial_{\tau e} &= 0, \\
 \partial_{e\mu} + \partial_{\mu\mu} + \partial_{\tau\mu} &= 0, \\
 \partial_{e\tau} + \partial_{\mu\tau} + \partial_{\tau\tau} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{I62}$$

Далее, из СРТ - теоремы (соотношения (I55)) следует, что

$$\begin{aligned}
 \partial_{ee} = \partial_{\mu\mu} = \partial_{\tau\tau} &= 0, \\
 \partial_{\mu e} = -\partial_{e\mu}, \quad \partial_{\tau e} = -\partial_{e\tau}, \quad \partial_{\tau\mu} = -\partial_{\mu\tau}.
 \end{aligned}
 \tag{I63}$$

Для величин  $\partial_{\tau e}$ ,  $\partial_{\mu\tau}$  и  $\partial_{e\mu}$  из (I62) и (I63) получаем два уравнения. Две величины выражаются, следовательно, через третья независимую. Имеем

$$\partial_{\tau e} = \partial_{\mu\tau} = \partial_{e\mu}.
 \tag{I64}$$

Заметим, что в общем случае осциллирующий между  $n$  типами нейтрино число независимых величин  $\partial_{\ell\ell}$  равно  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ .

Перейдем теперь к обсуждению возможного метода поиска эффектов нарушения РС-инвариантности в осциллирующих нейтрино  $/31/$ . В скором времени на различных ускорителях мира будут получены пучки нейтрино от распадов  $K_L$ -мезонов. Такие пучки представляют собой смесь  $\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu$  и  $\bar{\nu}_\mu$ . При этом, если пренебречь малыми  $\sim 10^{-3}$  эффектами РС-нарушения в распадах  $K_L$ -мезонов, то в начальный момент времени число  $\nu_e$  ( $\nu_\mu$ ) в таких пучках равно числу  $\bar{\nu}_e$  ( $\bar{\nu}_\mu$ ). Для проверки РС-инвариантности в осциллирующих нейтрино необходимо, следовательно, на некотором расстоянии  $R$  от источника нейтрино сравнить числа  $\nu_e$  и  $\bar{\nu}_e$  либо  $\nu_\mu$  и  $\bar{\nu}_\mu$ , либо  $\nu_e$  и  $\bar{\nu}_\mu$ . Определим РС-нечетную асимметрию

$$A_{\ell}(\rho, R) = \frac{I_{\nu_{\ell}}(\rho, R) - I_{\bar{\nu}_{\ell}}(\rho, R)}{I_{\nu_{\ell}}(\rho, R) + I_{\bar{\nu}_{\ell}}(\rho, R)},
 \tag{I65}$$

где  $I_{\nu_{\ell}}(\rho, R)$  и  $I_{\bar{\nu}_{\ell}}(\rho, R)$  соответственно потоки  $\nu_{\ell}$  и  $\bar{\nu}_{\ell}$  на расстоянии  $R$  от источника нейтрино. Учитывая, что

$$I_{\nu_{\ell}}^{\circ}(\rho) = I_{\bar{\nu}_{\ell}}^{\circ}(\rho), \quad I_{\nu_{\mu}}^{\circ}(\rho) = I_{\bar{\nu}_{\mu}}^{\circ}(\rho), \quad I_{\nu_{\ell}}^{\circ} = 0, \quad \ell \neq e, \mu,
 \tag{I66}$$

где  $I_{\nu_{\ell}}^{\circ}(\rho)$  ( $I_{\bar{\nu}_{\ell}}^{\circ}(\rho)$ ) - начальный поток  $\nu_{\ell}$  ( $\bar{\nu}_{\ell}$ ), имеем

$$I_{\nu_e}(\rho, R) - I_{\bar{\nu}_e}(\rho, R) = \sum_{e' = e, \mu} \partial_{ee'} (R/\rho) I_{\nu_{e'}}^{\circ}(\rho). \quad (I67)$$

Из этого соотношения очевидно, что в случае, если асимметрия  $A_e$  ( $e = e, \mu, \tau$ ) оказалась бы отличной от нуля, это означало бы, что:

1) имеют место осцилляции нейтрино (если  $A_e \neq 0$  либо  $A_{\mu} \neq 0$ , то  $\nu_e \Leftrightarrow \nu_{\mu}$  осцилляции, если  $A_e \neq 0$  и (или)  $A_{\mu} \neq 0$ , то  $\nu_e \Leftrightarrow \nu_{\tau}$  осцилляции);

2) нарушается РС - инвариантность в лептонном секторе;

3) число типов осциллирующих нейтрино больше двух.

Далее, если асимметрия  $A_e$  оказалась бы отличной от нуля, то при этом асимметрия  $A_{\mu}$  также была бы отлична от нуля. Действительно, из (I55) и (I67) получаем

$$\frac{I_{\nu_e} - I_{\bar{\nu}_e}}{I_{\nu_{\mu}} - I_{\bar{\nu}_{\mu}}} = - \frac{I_{\nu_e}^{\circ}}{I_{\nu_{\mu}}^{\circ}}. \quad (I68)$$

Это соотношение основано только на СРТ - инвариантности. Его проверка была бы, следовательно, проверкой СРТ- теоремы в таком тонком эффекте, как осцилляции нейтрино.

Наконец, с помощью (I64) нетрудно убедиться в том, что имеют место следующие соотношения:

$$\frac{I_{\nu_{\tau}} - I_{\bar{\nu}_{\tau}}}{I_{\nu_e} - I_{\bar{\nu}_e}} = \frac{I_{\nu_e}^{\circ} - I_{\nu_{\mu}}^{\circ}}{I_{\nu_{\mu}}^{\circ}}, \quad (I69)$$

$$\frac{I_{\nu_{\tau}} - I_{\bar{\nu}_{\tau}}}{I_{\nu_{\mu}} - I_{\bar{\nu}_{\mu}}} = - \frac{I_{\nu_e}^{\circ} - I_{\nu_{\mu}}^{\circ}}{I_{\nu_e}^{\circ}}.$$

Эти соотношения основаны на предположении о том, что имеется только три типа осциллирующих нейтрино ( $\nu_e, \nu_{\mu}, \nu_{\tau}$ ). Их проверка позволила бы, следовательно, получить информацию о числе типов нейтрино.

Если асимметрии  $A_e$  оказались бы отличными от нуля, то это было бы доказательством того, что РС-инвариантность не имеет места (матрица смешивания комплексна). Однако матрица  $U$  может быть комплексной, но соответствующие фазы в вероятности переходов между различными состояниями нейтрино могут не войти. Мы рассмотрим две возможные ситуации такого рода.

I. Пусть все разности квадратов масс нейтрино настолько велики,

что

$$R/p \gg \frac{1}{|m_i^2 - m_\kappa^2|} \quad (i \neq \kappa). \quad (I70)$$

В условиях реальных опытов вероятности переходов нейтрино из одного состояния в другое необходимо усреднить по области, в которой образуются нейтрино, спектру нейтрино, размерам детектора. Если выполняются условия (I70), то область переменной  $R/p$ , по которой нужно произвести усреднение, также окажется много больше  $1/|m_i^2 - m_\kappa^2|$ . В результате усреднений косинусы в выражениях (I28) обращаются в нуль и для усредненных вероятностей переходов получаем при этом

$$\bar{P}_{\nu_{e'}; \nu_e} = \bar{P}_{\bar{\nu}_{e'}; \bar{\nu}_e} = \sum_i |U_{e'i}|^2 |U_{ei}|^2. \quad (I71)$$

Таким образом, если выполняются условия (I70), то асимметрии  $A_{\nu_e}$  обращаются в нуль и при нарушении РС-инвариантности.

2. Предположим, что разности квадратов масс нейтрино удовлетворяют неравенствам

$$m_n^2 - m_1^2 \gg m_i^2 - m_1^2, \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (I72)$$

$$(m_1 < m_2 < \dots < m_n).$$

Далее, пусть при всех доступных эксперименту значениях  $R$  и  $p$  выполняются неравенства

$$\frac{(m_i^2 - m_1^2)}{2p} R \ll 1, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (I73)$$

Рассмотрим выражения (I18) и (I25) для амплитуд вероятностей переходов  $\nu_e \rightarrow \nu_{e'}$  и  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_{e'}$ . Используя унитарность матрицы  $U$ , имеем

$$A_{\nu_{e'}; \nu_e}(t) = e^{-iE_1 t} \left( \sum_i U_{e'i} e^{-i(E_i - E_1)t} - 1 \right) U_{ei}^* + \delta_{ee'}, \quad (I74)$$

$$A_{\bar{\nu}_{e'}; \bar{\nu}_e}(t) = e^{-iE_1 t} \left( \sum_i U_{e'i}^* (e^{-i(E_i - E_1)t} - 1) U_{ei} + \delta_{ee'} \right). \quad (I75)$$

Напомним, что мы рассматриваем случай  $|\beta| \gg m_i$ . В этом случае

$(E_i - E_j)t = \frac{(m_i^2 - m_j^2)R}{2p}$ . Учитывая (I73) из (I74) и (I75) получаем

$$\begin{aligned}
 a_{\nu_{\ell'}; \nu_{\ell}}(R/p) &\approx e^{-iE_j t} [U_{\ell'n} U_{\ell n}^* (e^{\frac{-i(m_n^2 - m_j^2)R}{2p}} - 1) + \delta_{i;\ell'}], \\
 a_{\bar{\nu}_{\ell'}; \bar{\nu}_{\ell}}(R/p) &\approx e^{-iE_j t} [U_{\ell'n}^* U_{\ell n} (e^{\frac{-i(m_n^2 - m_j^2)R}{2p}} - 1) + \delta_{i;\ell'}].
 \end{aligned}
 \tag{I76}$$

Отсюда при  $\ell' \neq \ell$  для вероятностей находим

$$P_{\nu_{\ell'}; \nu_{\ell}}(R/p) = P_{\bar{\nu}_{\ell'}; \bar{\nu}_{\ell}}(R/p) = 2|U_{\ell'n}|^2 |U_{\ell n}|^2 (1 - \cos \frac{(m_n^2 - m_j^2)R}{2p}).
 \tag{I77}$$

Таким образом, если выполняются условия (I73), то в выражение для вероятностей переходов  $\nu_{\ell} \rightarrow \nu_{\ell'}$  и  $\bar{\nu}_{\ell} \rightarrow \bar{\nu}_{\ell'}$  ( $\ell' \neq \ell$ ) входит только одна разность квадратов масс нейтрино. Фазы матрицы  $U$  не входят при этом в вероятности переходов, и асимметрии  $\kappa_{\ell}$  обращаются в нуль при нарушении  $PC$ -инвариантности.

Наконец, с помощью (I77) нетрудно получить выражение для вероятности  $P_{\nu_{\ell'}; \nu_{\ell}}$ . Из унитарности матрицы  $U$  следует, что

$$\sum_{\ell' \neq \ell} |U_{\ell'n}|^2 = 1 - |U_{\ell n}|^2.
 \tag{I78}$$

Далее, учитывая, что

$$P_{\nu_{\ell'}; \nu_{\ell}} = 1 - \sum_{\ell' \neq \ell} P_{\nu_{\ell'}; \nu_{\ell}},
 \tag{I79}$$

получаем

$$P_{\nu_{\ell'}; \nu_{\ell}}(R/p) = P_{\bar{\nu}_{\ell'}; \bar{\nu}_{\ell}}(R/p) = 1 - 2|U_{\ell'n}|^2 (1 - |U_{\ell n}|^2) \times (1 - \cos \frac{(m_n^2 - m_j^2)R}{2p}).
 \tag{I80}$$

### 3.3. Простейший случай осцилляции между двумя нейтринными состояниями

В этом параграфе мы подробно рассмотрим случай осцилляций между нейтринными состояниями. Такие осцилляции характеризуются всего двумя параметрами (углом смешивания и разностью квадратов масс нейтрино). Отметим, что данные всех опытов по поиску осцилляций нейтрино анализируются в этом простейшем предположении.

Итак, предположим, что

$$\begin{aligned} \nu_{eL} &= \cos\theta \nu_{1L} + \sin\theta \nu_{2L}, \\ \nu_{e'L} &= -\sin\theta \nu_{1L} + \cos\theta \nu_{2L} \end{aligned} \quad (I81)$$

( $e$  и  $e'$  равны  $e$  и  $\mu$  либо  $e$  и  $\tau$  и т.д.) либо

$$\begin{aligned} \nu_{eL} &= \cos\theta \chi_{1L} + \sin\theta \chi_{2L}, \\ \nu_{e'L}^c &= -\sin\theta \chi_{1L} + \cos\theta \chi_{2L}. \end{aligned} \quad (I82)$$

Смешивание (I81) отвечает дираковскому либо майорановскому массовым членам. В первом случае  $\nu_1$  и  $\nu_2$  - дираковские поля, во втором - майорановские поля. Смешивание (I82) возникает в случае дираковского и майорановского массового члена;  $\chi_1$  и  $\chi_2$  - поля нейтрино Майорана. Угол  $\theta$  в (I81) и (I82) - угол смешивания (лептонный угол смешивания, аналог угла Кабиббо). Выражения для вероятностей переходов легко могут быть получены из общего выражения (I28). Имеем

$$\begin{aligned} P_{\nu_{e'}; \nu_e}(R/p) &= P_{\nu_e; \nu_{e'}}(R/p) = P_{\bar{\nu}_{e'}; \bar{\nu}_e}(R/p) = P_{\bar{\nu}_e; \bar{\nu}_{e'}}(R/p) = \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left(1 - \cos \frac{\Delta m^2 R}{2p}\right) \quad (e' \neq e), \end{aligned} \quad (I83)$$

$$\begin{aligned} P_{\nu_e; \nu_e}(R/p) &= P_{\nu_{e'}; \nu_{e'}}(R/p) = P_{\bar{\nu}_e; \bar{\nu}_e}(R/p) = P_{\bar{\nu}_{e'}; \bar{\nu}_{e'}}(R/p) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left(1 - \cos \frac{\Delta m^2 R}{2p}\right). \end{aligned} \quad (I84)$$

Здесь  $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$ ,  $m_1$  и  $m_2$  - массы нейтрино. Очевидно, что аналогичные выражения имеют место в случае осцилляций  $\nu_e \rightleftharpoons \bar{\nu}_e$  и  $\bar{\nu}_e \rightleftharpoons \nu_{eR}$ , возникающих при смешивании (I82).

Выражения (I83) и (I84) записаны в системе единиц  $\hbar = c = 1$ . Вводя соответствующим образом  $\hbar$  и  $c$ , получаем<sup>x</sup>

$$P_{\nu_{e'}; \nu_e}(R/p) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left(1 - \cos 2,54 \frac{\Delta m^2 R}{p}\right). \quad (I85)$$

<sup>x</sup> В системе СИ для аргумента косинуса имеем

$$\frac{\Delta m^2 R c^4}{2 p c \hbar c} = 2,54 \frac{(\Delta m^2 c^4) \left(\frac{R}{m}\right)}{(p c / \text{МэВ})}.$$



Здесь  $\Delta m^2$  - разность квадратов масс нейтрино в  $\text{эВ}^2$ ,  $R$  - расстояние между источником и детектором в метрах,  $p$  - импульс нейтрино в МэВ.

Из (I85) очевидно, что в случае, если выполняется условие

$$\Delta m^2 \frac{R}{p} \ll 1, \quad (\text{I86})$$

вероятность перехода  $\nu_e \rightarrow \nu_{e'}$  обращается в нуль. Осцилляции нейтрино в этом случае наблюдаться не будут. Очевидно, что осцилляции нейтрино могут быть наблюдаемы, если

$$\Delta m^2 \frac{R}{p} \gtrsim 1. \quad (\text{I87})$$

При этом предполагается, что угол смешивания достаточно велик.

Перепишем следующим образом условие (I87):

$$\Delta m^2 \gtrsim \frac{p}{R}. \quad (\text{I88})$$

Параметр  $\frac{p}{R}$  характеризует чувствительность опыта по поиску осцилляций нейтрино. Чем меньше этот параметр, тем при меньших значениях параметра  $\Delta m^2$  могут наблюдаться осцилляции нейтрино.

В таблице II приведены характерные значения параметра  $\frac{p}{R}$  для нейтринных опытов различного типа. Как видно из этой таблицы, рекордной чувствительностью обладают опыты по поиску осцилляций нейтрино от Солнца.

Если выполняется условие

$$\Delta m^2 \frac{R}{p} \gg 1, \quad (\text{I89})$$

то вследствие усреднений (по спектру нейтрино и т.д.) зависящие от  $R/p$  члены в выражениях (I83) и (I84) исчезают. Усредненные вероятности даются выражениями

$$\begin{aligned} \overline{P}_{\nu_{e'}; \nu_e} &= \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \quad (e' \neq e), \\ \overline{P}_{\nu_e; \nu_e} &= \overline{P}_{\nu_{e'}; \nu_{e'}} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta. \end{aligned} \quad (\text{I90})$$

В заключение отметим, что выражение (I83) может быть записано в виде

$$P_{\nu_{e'}; \nu_e} = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta (1 - \cos 2\pi \frac{R}{L}), \quad (\text{I91})$$

где

$$L = 4\pi \frac{P}{\Delta m^2} . \quad (I92)$$

Величина  $L$  является длиной осцилляций. Имеем

$$L = 2,5 \frac{P/M\text{эВ}}{\Delta m^2/\text{эВ}^2} \text{ м} . \quad (I93)$$

Условие того, что осцилляции могут наблюдаться ( условие (I87)), принимает вид

$$L \lesssim R . \quad (I94)$$

Физический смысл этого условия очевиден: осцилляции нейтрино могут быть наблюдаемы, если длина осцилляций меньше либо порядка расстояния между источником и детектором. Если длина осцилляций много больше расстояния  $R$ , то в этом случае осцилляции наблюдаться не будут.

Таблица II

Характерные значения параметра  $P/R$  для опытов с нейтрино от различных источников

Источник нейтрино	$P$ МэВ	$R$ м	$P/R$ эВ <sup>2</sup>
Реактор	I	$10^2$	$10^{-2}$
Мезонная фабрика	$10$	$10^2$	$10^{-1}$
Ускоритель (высокие энергии)	$10^3$	$10^3$	I
Космические нейтрино	$10^4$	$10^6$	$10^{-2}$
Солнце	I	$10^{11}$	$10^{-11}$

#### 4. Заключение

В заключение мы кратко изложим результаты опытов по поиску осцилляций нейтрино. Если нейтрино детектируются путем наблюдения обусловленных заряженными токами процессов, то возможны две постановки опытов такого типа.

А. Эксклюзивная постановка: поиск на некотором расстоянии от источника нейтрино данного типа нейтрино другого типа. Опыты такого рода позволяют получить информацию о вероятности  $P_{\nu_1; \nu_2}$  ( $e' \neq e$ ).

Б. Инклюзивная постановка: регистрация на некотором расстоянии от источника нейтрино данного типа нейтрино того же типа. Эти опыты позволяют ответить на вопрос о том, отлична ли от единицы вероятность  $P_{\nu_e; \nu_e}$ . В общем случае дираковского и майорановского массового члена имеем

$$P_{\nu_e; \nu_e} = 1 - \sum_{e' \neq e} P_{\nu_e; \nu_{e'}} - \sum_{e'} P_{\bar{\nu}_{e'}}; \nu_e. \quad (195)$$

Таким образом, вероятность  $P_{\nu_e; \nu_e}$  отлична от единицы в случае, если имеют место осцилляции между активными нейтрино  $\nu_e \rightleftharpoons \nu_{e'}$  и (или) осцилляции между активными и стерильными нейтрино  $\nu_e \rightleftharpoons \bar{\nu}_{e'}$ <sup>x</sup>.

В последнее время была выполнена целая серия опытов по поиску осцилляций нейтрино. В них использовались нейтрино от всех существующих источников (реакторы, мезонные фабрики, ускорители высоких энергий, космические лучи, Солнце). Однозначных указаний в пользу того, что осцилляции нейтрино имеют место, получено не было. Из этих опытов найдены весьма жесткие ограничения на параметры, которые характеризуют осцилляции нейтрино.

Данные опытов обычно анализируются в простейшем продолжении осцилляций только между двумя состояниями нейтрино (активными в постановке А; активными либо активным и стерильным в постановке Б). Для вероятности перехода  $\nu_e \rightarrow \nu_{e'}$  ( $\nu_e \rightarrow \bar{\nu}_{e'}$ ) имеем в этом случае

$$P_{\nu_e; \nu_{e'}}(R/p) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta (1 - \cos \Delta m^2 \frac{2R}{2p}). \quad (196)$$

Вероятность  $P_{\nu_e; \nu_e}$  равна

$$P_{\nu_e; \nu_e}(R/p) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta (1 - \cos \Delta m^2 \frac{2R}{2p}). \quad (197)$$

<sup>x</sup> Отметим, что в работе /II/ осцилляции  $\nu_e \rightleftharpoons \bar{\nu}_{e'}$  были названы экзотическими осцилляциями. В последнее время осцилляции  $\nu_e \rightleftharpoons \nu_{e'}$  часто называют осцилляциями I-го рода, а осцилляции  $\nu_e \rightleftharpoons \bar{\nu}_{e'}$  осцилляциями II-го рода /I7/.

В этих выражениях  $\theta$  - угол смешивания,  $\Delta m^2 = |m_1^2 - m_2^2|$  - разность квадратов масс нейтрино.

Результаты законченных недавно экспериментов по поиску осциллирующих реакторных и ускорительных нейтрино представлены в таблице III, взятой из доклада<sup>/33/</sup>. В последних двух колонках таблицы приведены верхние значения параметров  $\sin^2 2\theta$  и  $\Delta m^2$ , полученные соответственно в предположении, что  $\Delta m^2$  велико ( настолько, что в результате усреднений в (I96) и (I97) исчезает косинус) и

$$\sin^2 2\theta \approx 1.$$

Опыты по поиску осциллиаций космических нейтрино были выполнены недавно в Бюксанской нейтринной лаборатории<sup>/34/</sup>. В этих экспериментах регистрировались мюонные нейтрино, образованные на противоположной стороне Земли от распадов пионов и каонов, возникающих при взаимодействии космических лучей с атмосферой. Для отношения потока мюонных нейтрино к ожидаемому потоку  $\nu_\mu$  в опытах<sup>/34/</sup> получено значение

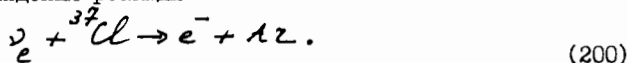
$$\frac{N_{\text{эксп.}}}{N_{\text{ожижд.}}} = 0,98 \pm 0,20. \quad (\text{I98})$$

Из (I98) были найдены следующие ограничения на параметры  $\Delta m^2$  и  $\sin^2 2\theta$

$$\Delta m^2 \leq 6 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2 (\sin^2 2\theta \approx 1),$$

$$\sin^2 2\theta \leq 0,65 (\Delta m^2 \text{ велико}). \quad (\text{I99})$$

Наконец, мы приведем последние данные, полученные в опыте по регистрации нейтрино от Солнца, выполненном Дэвисом и др.<sup>/35/</sup>. Нейтрино в этом эксперименте регистрируются радиохимическим методом Понтекорво путем наблюдения реакции



Напомним, что из-за большого порога этой реакции (0,81 МэВ) в экспериментах Дэвиса регистрируется только малая ( $\sim 10^{-4}$ ) часть полного потока солнечных нейтрино. В результате многолетних наблюдений было получено, что<sup>x</sup>

<sup>x</sup>  $\bar{I}$  представляет собой выраженную в солнечных нейтринных единицах (SNU) скорость образования аргона:

$$\bar{I} \text{ SNU} = 10^{-36} \frac{\text{событий}}{\text{атом } {}^{37}\text{Cl} \text{ сек}} \nu_e + \text{Cl} \rightarrow e^- + {}^{37}\text{Ar}$$

Таблица III

Верхние границы параметров  $\sin^2 2\theta$  и  $\Delta m^2$  соответственно для случаев больших  $\Delta m^2$  и  $\sin^2 2\theta \approx 1$ .  
Уровень достоверности: 90%

Эксперимент	Исходные нейтрино	Детектируемые нейтрино	$R/P$ $\frac{\mu}{H \times \delta}$	Верх. гран. $\sin^2 2\theta$ (большие $\Delta m^2$ )	Верх. гран. $\Delta m^2$ ( $\sin^2 2\theta \approx 1$ ) эВ <sup>2</sup>
Реактор <i>Goergen</i>	$\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_e$	6	0,17	0,016
<i>LAMPF</i>	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_e$	0,3	0,2	0,9
	$\nu_e$	$\nu_e$	0,3		2,5
<i>Columbia-BNL-FNAL</i>	$\nu_\mu$	$\nu_e$	0,16	$6 \cdot 10^{-3}$	0,6
	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	0,04	$6 \cdot 10^{-2}$	3
	$\nu_e$	$\nu_\tau$	0,04	$6 \cdot 10^{-1}$	8
Эмульсии <i>FNAL</i>	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	0,02	$1,3 \cdot 10^{-2}$	3
<i>FNAL-Mich-Ill</i>	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_e$	0,04	$8 \cdot 10^{-3}$	1,7
	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_\tau$	0,04	$6 \cdot 10^{-2}$	2,4
<i>Gargamelle (PS)</i>	$\nu_\mu$	$\nu_e$	0,05	$2 \cdot 10^{-3}$	0,7
<i>Gargamelle (SPS)</i>	$\nu_\mu$	$\nu_e$	0,03	$1,2 \cdot 10^{-2}$	2
	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	0,03	$8 \cdot 10^{-2}$	5
<i>BEBC</i>	$\nu_\mu$	$\nu_e$	0,03	$10^{-2}$	1,7
	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	0,03	$5 \cdot 10^{-2}$	6
	$\nu_e$	$\nu_e$	0,03	$7 \cdot 10^{-2}$	10
<i>Berkeley-FNAL-Kanai</i>	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_e$	0,03	$1,6 \cdot 10^{-2}$	2,3
	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_\tau$	0,03	$1,4 \cdot 10^{-1}$	6,7

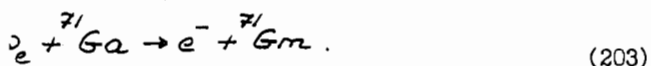
$$\bar{I} = 1,9 \pm 0,3 \text{ SNU}. \quad (201)$$

Эту величину следует сравнить со значением

$$\bar{I}_{\text{ошиг.}} = 7,6 \pm 3,3 \text{ SNU}, \quad (202)$$

найденным /36/ в предположении, что справедлива стандартная модель Солнца. Отметим, что ошибка в (201) отвечает тройной ошибке в сечениях, используемых при вычислении ожидаемого потока.

Из сравнения (201) и (202) следует, что наблюдаемый поток нейтрино от Солнца меньше ожидаемого потока. Это, однако, не может считаться доказательством справедливости гипотезы осцилляций нейтрино: значение (202) для ожидаемого потока существенно зависит от модели Солнца, а также от температуры невидимых внутренних областей Солнца и др. параметров. В настоящее время в СССР и США готовятся опыты по регистрации солнечных нейтрино путем наблюдения процесса /37/



Порог этой реакции всего 0,2 МэВ. Галлий-германиевый метод позволит, следовательно, регистрировать нейтрино от основных источников ( $pp \rightarrow de^+\nu_e$  и др.). Их поток может быть предсказан на основе безмодельных термодинамических соображений. Опыты по регистрации солнечных нейтрино галлий-германиевым методом дадут, по-видимому, возможность решить проблему осцилляций нейтрино. Напомним, что чувствительность этих опытов на много порядков превосходит чувствительность экспериментов с нейтрино от земных источников и космических лучей (см. таблицу II).

В заключение мы отметим также, что в настоящее время проводятся нового типа опыты по поиску осцилляций нейтрино. Именно, опыты с двумя детекторами (ЦЕРН, Батавия, Брукхэвен), а также опыты, в которых может меняться расстояние между источником и детектором нейтрино (Лос Аламос, Гёбген). После завершения этих экспериментов несомненно будет достигнут большой прогресс в изучении одной из важнейших проблем физики нейтрино — проблемы масс и смешивания нейтрино.

В этих лекциях в основном изложены результаты наших совместных с Б.М. Понтекорво работ. Я выражаю Бруно Максимовичу самую глубокую благодарность за многолетнее плодотворное сотрудничество. Я глубоко благодарен С. Петкову, Ф. Пидермайеру, И. Хошеку за исключительно полезные обсуждения проблем смешивания и осцилляций нейтрино.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Нейтрино Майорана

Мы приведем здесь необходимые для понимания основного текста сведения о поле Майорана — поле, квантами которого являются нейтральные частицы со спином 1/2. Классический лагранжиан поля Майорана  $\chi(x)$  дается выражением

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2i} \bar{\chi} (\gamma_\alpha \partial_\alpha + m) \chi. \quad (\text{A.1})$$

Из вариационного принципа (считая  $\chi$  и  $\bar{\chi}$  независимыми) получаем уравнения поля

$$(\gamma_\alpha \partial_\alpha + m) \chi = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$-2i \bar{\chi} \gamma_\alpha + \bar{\chi} m = 0. \quad (\text{A.3})$$

Последнее уравнение может быть переписано следующим образом:

$$(-\gamma_\alpha^T \partial_\alpha + m) \bar{\chi}^T = 0. \quad (\text{A.4})$$

Умножим это уравнение слева на матрицу зарядового сопряжения  $C$ . Напомним, что матрица  $C$  удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} C \gamma_\alpha^T C^{-1} &= -\gamma_\alpha, \\ C^T &= -C. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Получаем

$$(\gamma_\alpha \partial_\alpha + m) C \bar{\chi}^T = 0. \quad (\text{A.6})$$

Таким образом, функции  $\chi$  и  $C \bar{\chi}^T$  удовлетворяют одному и тому же уравнению. Потребуем, чтобы

$$C \bar{\chi}^T = \eta_c \chi, \quad (\text{A.7})$$

где  $\eta_c = \pm 1$ .

Поле  $\chi \eta_c$ , удовлетворяющее условию (A.7), носит название поля Майорана. Множитель  $\eta_c$  представляет собой  $C$ -четность поля Майорана.

Из (A.2) для тензора энергии-импульса и 4-вектора импульса поля  $\chi$  стандартным способом получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \bar{\chi} \gamma_\mu \partial_\nu \chi, \\ P_\mu &= -i \frac{1}{2} \int \bar{\chi} \gamma_4 \partial_\mu \chi dx. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Далее, поле Майорана следующим образом раскладывается по плоским волнам:

$$\chi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} [u^z(\rho) a_z(\rho) e^{ipx} + \eta_c u^z(\rho) a_z^+(\rho) e^{-ipx}] d\vec{\rho}, \quad (\text{A.9})$$

где

$$u^z(-\rho) = C(\bar{u}^z(\rho))^T. \quad (\text{A.10})$$

Отметим, что спиноры  $u^z(\rho)$  нормированы условием

$$\bar{u}^z(\rho) \gamma_4 u^z(\rho) = 2\rho_0 \delta_{z'z}. \quad (\text{A.11})$$

В квантовой теории  $a_z(\rho)$  и  $a_z^+(\rho)$  - операторы. Подставляя (A.9) в (A.8), для оператора импульса имеем

$$P_\mu = \int a_z^+(\rho) a_z(\rho) p_\mu d\vec{\rho}. \quad (\text{A.12})$$

Далее, потребуем, чтобы операторы  $a(\rho)$  и  $a^+(\rho)$  удовлетворяли каноническим герестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [a_z(\rho), a_{z'}(\rho')]_+ &= 0, \\ [a_z(\rho), a_{z'}^+(\rho')]_+ &= \delta_{z'z} \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}'). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Из (A.12) и (A.13) следует, что  $a_z^+(\rho)$  и  $a_z(\rho)$  - операторы рождения и уничтожения частицы с 4-импульсом  $\rho$ .

В рассмотренной нами теории нет античастиц. Очевидно, что античастицы не появляются вследствие того, что мы приравнили оператор  $\chi$  зарядово-сопряженному оператору  $C\bar{\chi}^T$ . Отсутствие античастиц означает, что все заряды частиц - квантов поля Майорана равны нулю.

Далее, найдем свертку  $\overline{\chi(x_1) \chi(x_2)}$ . С помощью (A.9) и (A.13) получаем

$$\begin{aligned} \overline{\chi_\alpha(x_1) \chi_\beta(x_2)} &= \overline{[\chi_\alpha^{(+)}(x_1) \bar{\chi}_\beta^{(-)}(x_2)]_+} \quad x_{10} > x_{20} = \\ &= -\overline{[\bar{\chi}_\beta^{(+)}(x_2) \chi_\alpha^{(-)}(x_1)]_+} \quad x_{20} > x_{10} \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{(\vec{\rho} + im)_{\alpha\beta}}{\rho^2 + m^2 - i\epsilon} e^{ip(x_1 - x_2)} d\vec{\rho} = S_{\alpha\beta}(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$



Свертка  $\overline{\psi(x_1)} \overline{\psi(x_2)}$  совпадает со стандартной сверткой  $\overline{\psi(x_1)} \overline{\psi(x_2)}$ , где  $\psi(x)$  - поле Дирака. Существенное отличие поля Майорана от поля Дирака состоит в том, что в случае поля Майорана отличны от нуля также свертки  $\overline{\psi(x_1)} \psi^T(x_2)$  и  $\overline{\psi^T(x_1)} \overline{\psi}(x_2)$ . Действительно, используя (А.7), без труда получаем

$$\begin{aligned} \overline{\psi(x_1)} \overline{\psi^T(x_2)} &= -\eta_C S(x_1 - x_2) C, \\ \overline{\psi^T(x_1)} \overline{\psi}(x_2) &= \eta_C C^{-1} S(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (\text{А.15})$$

Мы воспользуемся этими соотношениями при вычислении вероятности безнейтринного двойного  $\beta$ -распада (см. приложение Б).

В заключение сделаем два замечания:

1.  $P$  - четность частиц Майорана может принимать значения  $\pm i$ . Действительно, пусть  $U_P$  - оператор  $P$ -инверсии. Имеем

$$U_P^{-1} \psi(x') U_P = \eta_P \gamma_4 \psi(x), \quad (\text{А.16})$$

где  $x' = (-\vec{x}, ix_0)$ ,  $\eta_P$  -  $P$ -четность поля Майорана. Из (А.16) находим

$$U_P^{-1} \overline{\psi^T}(x') U_P = \eta_P^* \gamma_4 \overline{\psi^T}(x). \quad (\text{А.17})$$

Умножая это соотношение слева на  $C$  и учитывая (А.7), получаем

$$U_P^{-1} \overline{\psi}(x') U_P = -\eta_P^* \gamma_4 \overline{\psi}(x). \quad (\text{А.18})$$

Сравнивая (А.16) и (А.17), находим, что

$$\eta_P = -\eta_P^*. \quad (\text{А.19})$$

Таким образом,

$$\eta_P = \pm i. \quad (\text{А.20})$$

2. Пусть  $\chi_1$  и  $\chi_2$  - поля Майорана. Нетрудно видеть, что

$$\bar{\chi}_2 \not{O} \chi_1 = \eta_{1c} \eta_{2c} \epsilon \bar{\chi}_1 \not{O} \chi_2, \quad (\text{A.21})$$

где  $O$  - матрицы Дирака  $1, \gamma_\alpha, \sigma_{\alpha\beta}, \gamma_\alpha \gamma_5, \gamma_5$ ,  
 $\eta_{1c}$  и  $\eta_{2c}$  -  $C$ - четности полей  $\chi_1$  и  $\chi_2$ ;  $\epsilon_v = \epsilon_\tau = 1$ ,  
 $\epsilon_s = \epsilon_p = \epsilon_\lambda = 7$ . Действительно, используя (A.7), получаем

$$\bar{\chi}_1 \not{O} \chi_2 = -\chi_2^T \not{O}^T \bar{\chi}_1^T = \eta_{1c} \eta_{2c} \bar{\chi}_2 C O^T C^{-1} \chi_1. \quad (\text{A.22})$$

Далее, с помощью (A.5) находим

$$C \sigma_{\alpha\beta}^T C^{-1} = -\sigma_{\alpha\beta}, \quad C (\gamma_\alpha \gamma_5)^T C^{-1} = \gamma_\alpha \gamma_5, \quad C \gamma_5^T C^{-1} = \gamma_5. \quad (\text{A.23})$$

Из (A.22) и (A.23) следует соотношение (A.21). С помощью (A.21) получаем, в частности,

$$\bar{\chi} \gamma_\alpha \chi = -\bar{\chi} \gamma_\alpha \chi = 0 \quad (\text{A.24})$$

(ток поля Майорана  $\chi(x)$  равен нулю). Отметим также, что

$$\begin{aligned} \bar{\chi} \gamma_\alpha \partial_\mu \chi &= -\partial_\mu \chi^T \gamma_\alpha^T \bar{\chi}^T = -\partial_\mu \bar{\chi} \gamma_\alpha \chi = \\ &= -\partial_\mu (\bar{\chi} \gamma_\alpha \chi) + \bar{\chi} \gamma_\alpha \partial_\mu \chi. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Полную производную в правой части (A.25) можно опустить.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Безнейтринный двойной $\beta$ -распад

В этом приложении мы кратко изложим общую теорию безнейтринного двойного  $\beta$ -распада <sup>138</sup>/<sub>( $\beta\beta$ )<sub>00</sub></sub> - распада. Нас интересуют теории со смешиванием нейтрино. В случае смешивания нейтрино с дираковскими массами сохраняется суммарный лептонный заряд (см. § 2.2) и процесс

$$(\nu, Z) \rightarrow (\nu, Z+2) + e^- + e^- \quad (\text{B.1})$$

запрещен. Процесс (B.1) может иметь место в случае, если массивные нейтрино-майорановские частицы.

Итак, предположим, что гамильтониан взаимодействия пары электрон-нейтрино и адронов имеет стандартный вид:

$$\mathcal{H} = \frac{G}{\sqrt{2}} 2(\bar{e}_L \gamma_\alpha \nu_{eL}) j_\alpha + h.c., \quad (B.2)$$

где  $j_\alpha$  - не меняющий странности адронный ток, а

$$\nu_{eL} = \sum_i U_{ei} \chi_i. \quad (B.3)$$

Здесь  $U$  - унитарная матрица смешивания,  $\chi_i$  - поле Майорана с массой  $m_i$ .

Процесс (B.1) может иметь место во втором порядке теории возмущений по  $G$ . При этом один из нейтронов ядра испускает пару электрон-виртуальное нейтрино. Другой нейтрон поглощает нейтрино и испускает электрон.

Перейдем к вычислению вероятности  $(\beta\beta)_{00}$ -распада. Во втором порядке по  $G$  в амплитуду процесса (B.1) дает вклад оператор

$$S^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!} 4 \left( \frac{G}{\sqrt{2}} \right)^2 \int N(\bar{e}_L(x_1) \gamma_\alpha \nu_{eL}(x_1) \nu_{eL}^T(x_2) \gamma_\beta \bar{e}_L^T(x_2)) T(j_\alpha(x_1) j_\beta(x_2) e^{-i\int \mathcal{H}_h(x) dx})^2 dx_1 dx_2, \quad (B.4)$$

где  $\mathcal{H}_h(x)$  - гамильтониан сильного взаимодействия. Рассмотрим свертку  $\nu_{eL}^T(x_1) \nu_{eL}^T(x_2)$ . Очевидно, что

$$\nu_{eL}^T = \sum_k U_{ek} \chi_k^T \left( \frac{1+\gamma_5}{2} \right)^T. \quad (B.5)$$

Далее, для поля Майорана  $\chi_k$  имеем

$$C \bar{\chi}_k^T = \eta_k \chi_k. \quad (B.6)$$

Здесь  $\eta_k = \pm 1$  -  $C$ -четность поля  $\chi_k$ ,  $C$  - матрица зарядового сопряжения  $\chi$ . Отсюда находим

$$\chi_k^T = \eta_k \bar{\chi}_k C^T. \quad (B.7)$$

Из (B.3), (B.5) и (B.7) получаем

<sup>x</sup> Множители  $\eta_k$  имеют физический смысл только в случае, если имеет место CP-инвариантность в лептонном секторе. При этом  $U$ -ортогональная матрица.

$$\overline{\psi_{eL}(x_1)} \overline{\psi_{eL}(x_2)}^T = \sum_{i,k} U_{ei} U_{ek} (-\eta) \frac{1+\gamma_5}{2} \overline{\psi_i(x_1)} \psi_k(x_2) \frac{1+\gamma_5}{2} C. \quad (\text{Б.8})$$

Отметим, что при получении (Б.8) мы учли, что

$$C^T = -C, \quad C \left( \frac{1+\gamma_5}{2} \right)^T C^{-1} = \frac{1+\gamma_5}{2}.$$

Используя (Б.8), с помощью (А.15) получаем

$$\overline{\psi_{eL}(x_1)} \overline{\psi_{eL}(x_2)}^T = i \sum_k U_{ek} \eta m_k \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{iq(x_1-x_2)}}{q^2 + m_k^2} dq \frac{1+\gamma_5}{2} C. \quad (\text{Б.9})$$

Из (4) и (3) для матричного элемента процесса (Б.1) находим

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)} | i \rangle &= \frac{(i)^2}{2!} \left( \frac{G}{\sqrt{2}} \right)^2 4 N_{p_1} N_{p_2} \sum_k U_{ek} \eta m_k \times \\ &\times \int e^{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} \overline{u}(p_1) \gamma_\alpha \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma_\beta u(p_2) \frac{(i)}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{iq(x_1-x_2)} dq}{q^2 + m_k^2} \times \\ &\times \langle A' | T(J_\alpha(x_1) J_\beta(x_2)) | A \rangle dx_1 dx_2 - (p_1 \leftrightarrow p_2). \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

Здесь  $p_1$  и  $p_2$  - 4-импульсы электронов,  $N_p = \frac{1}{(2\pi)^3/2} \frac{1}{2p_0}$  - стандартный нормировочный множитель,  $|A\rangle$  и  $|A'\rangle$  - векторы состояния начального и конечного ядра,  $J_\alpha(x)$  - адронный слабый ток в представлении Гейзенберга, а

$$u(-p_2) = C \overline{u}^T(p_2). \quad (\text{Б.11})$$

Второй член в выражении (Б.10) возникает вследствие тождественности электронов. Нетрудно убедиться в том, что он совпадает с первым членом. Для этого необходимо использовать соотношение

$$\overline{u}(p_1) \gamma_\alpha \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma_\beta u(-p_2) = - \overline{u}(p_2) \gamma_\beta \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma_\alpha u(-p_1), \quad (\text{Б.12})$$

которое легко можно получить с помощью (Б.11). В связи с (Б.10) заметим следующее:

1. В матричный элемент  $(\beta\beta)_{00}$  -распада входят  $C$  -четности полей нейтрино Майорана. Если  $C$  - четности различных полей Майорана разные, то вклады в (Б.10) разных слагаемых могут сок-

ращаться и вероятность  $(\beta\beta)_{00}$  - распада может быть весьма малой и при относительно больших майорановских массах нейтрино /24/.

2. Матричный элемент безнейтринного двойного  $\beta$  -распада обращается в нуль при  $m_\nu \rightarrow 0$ . Отметим, что это связано с калибровочной инвариантностью, которая имеет место в случае, если майорановские массы равны нулю и в лагранжиан не входят правые токи. Действительно, если  $\chi$  -поле Майорана, то нетрудно проверить, что  $\chi' = e^{i\alpha\gamma_5} \chi$  ( $\alpha$  - произвольный вещественный параметр) также является полем Майорана. Имеем  $\chi'_L = e^{i\alpha} \chi_L$ ,  $\chi'_R = e^{-i\alpha} \chi_R$ . Если нейтрино-бесмассовые частицы и в лагранжиан слабого взаимодействия входят только левые компоненты полей, то очевидно, что имеет место инвариантность относительно преобразований  $e' = e^{i\alpha} e$ ,  $\chi'_L = e^{i\alpha} \chi_L$ . Эта инвариантность означает существование сохраняющегося лептонного числа, равного 1 для  $e^-$  и левого нейтрино,  $-1$  для  $e^+$  и правого нейтрино и нулю для всех остальных частиц. Мы приходим, таким образом, к известной теореме об эквивалентности (при  $m_\nu \rightarrow 0$ ) нейтрино Дирака и нейтрино Майорана.

Имея в виду те приближения, которые будут сделаны в дальнейшем, проведем в выражении (Б.10) интегрирование по  $x_{10}$  и  $x_{20}$ . Находим<sup>X</sup>

X

Интеграл по  $x_{10}$  и  $x_{20}$  представим в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_{10} \int_{-\infty}^{\infty} dx_{20} F(x_{10}, x_{20}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_{10} \left[ \int_{-\infty}^0 dt F(x_{10}, x_{10}+t) + \int_0^{\infty} dt F(x_{10}, x_{10}+t) \right].$$

Далее, интегралы  $I_1 = \int_0^{\infty} e^{i\alpha t} dt$  и  $I_2 = \int_{-\infty}^0 e^{-i\beta t} dt$  определяются с помощью стандартной процедуры адиабатического выключения взаимодействия на бесконечности:

$$I_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{i(\alpha - i\epsilon)t} dt = \frac{1}{i(\alpha - i\epsilon)}, \quad I_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 e^{-i(\beta - i\epsilon)t} dt = \frac{1}{i(\beta - i\epsilon)}.$$

Наконец, отметим, что при получении (Г.13) использовалось очевидное соотношение

$$\langle A' / J(x_1) J(x_2) / A \rangle = \sum_n \langle A' / J(\vec{x}_1, 0) / n \rangle \langle n / J(\vec{x}_2, 0) / A \rangle \times \\ \times e^{i(E_f - E_n)x_{10}} e^{i(E_n - E_L)x_{20}}$$

$$\langle f | S | i \rangle = i \left( \frac{G}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_k u_{ek}^2 \eta_k m_k N_{p_1} N_{p_2} \bar{u}(p_1) \gamma (1 + \gamma_5) \gamma_\beta u(p_2) \times$$

$$\times \int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 e^{-i\vec{p}_1 \vec{x}_1 - i\vec{p}_2 \vec{x}_2} \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{q}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} d\vec{q}}{q_{0k}} \right) \times$$

$$\sum_n \left[ \frac{\langle n | J(\vec{x}_1) | n \rangle \langle n | J(\vec{x}_2) | n \rangle}{E_n + q_{0k} + p_{20} - m_k} + \frac{\langle n | J(\vec{x}_2) | n \rangle \langle n | J(\vec{x}_1) | n \rangle}{E_n + q_{0k} + p_{10} - m_k} \right] \times$$

где  $m_k$  и  $m_k'$  - массы начального и конечного ядер,  $E_n$  - энергия промежуточного состояния  $|n\rangle$ ,  $q_{0k} = \sqrt{\vec{q}^2 + m_k^2}$ .

Обычно при вычислении вероятности двойного  $\beta$ -распада делаются следующие приближения<sup>[38]</sup>:

1. Энергии промежуточных состояний  $E_n$  заменяются в выражении (Б.13) средним значением  $\langle E_n \rangle$ ; это позволяет в (Б.13) провести суммирование по полной системе состояний  $|n\rangle$  (приближение полноты).

2. Оператор тока  $J_\alpha(\vec{x})$  заменяется

$$J_\alpha(\vec{x}) = \sum_n (\tau_n)_+ (\delta_{\alpha 4} + i g_{\alpha k} \delta_{\alpha k} \vec{\sigma}) \delta(\vec{x} - \vec{x}_n); \quad g_{\alpha k} \approx 1,25$$

(импульсное нерелятивистское приближение).

3. Экспонента  $e^{i\vec{p}_1 \vec{x}_1 + i\vec{p}_2 \vec{x}_2}$  заменяется единицей (длинноволновое приближение).

Так как  $(\tau_n)_+ (\tau_n)_+ = 0$ , то из 2 вытекает, что

$$J_\alpha(\vec{x}_1) J_\beta(\vec{x}_2) = J_\beta(\vec{x}_2) J_\alpha(\vec{x}_1). \quad (\text{Б.14})$$

Запишем далее матричный элемент (Б.13) в виде

$$\langle f | S | i \rangle = \bar{u}(p_1) \gamma_\alpha \gamma_\beta (1 - \gamma_5) u(-p_2) A_{\alpha\beta}(\vec{p}_1, \vec{p}_2). \quad (\text{Б.15})$$

С помощью (Б.14) нетрудно убедиться в том, что

$$A_{\alpha\beta}(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = A_{\beta\alpha}(\vec{p}_1, \vec{p}_2). \quad (\text{Б.16})$$

Далее, представляя  $\gamma_\alpha \gamma_\beta$  в виде  $\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha)$  и учитывая (Б.16) для матричного элемента рассматриваемого нами процесса получаем следующее выражение:

$$\langle f | S | i \rangle = \frac{i}{4\pi} \left( \frac{G}{\sqrt{2}} \right)^2 N_{p_1} N_{p_2} \bar{u}(p_1) (1-\gamma_5) u(p_2) \sum_k u_{ek}^2 \eta_k m_k^x$$

$$\times \langle A' | \sum_{n,m} [H_1(\vec{x}_n - \vec{x}_m; m_k) + H_2(\vec{x}_n - \vec{x}_m; m_k)] (\tau_{n+}) (\tau_{m+}) (1 - g^2 \vec{\sigma}_n \vec{\sigma}_m) | A \rangle \times$$

$$\times 2\pi \delta(p_{10} + p_{20} + m_{k'} - m_{k'})$$

(Б.17)

Здесь

$$H_j(\vec{x}; m_k) = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}} d\vec{q}}{q_{0k}(q_{0k} + a_j)}, \quad j=1,2, \quad (\text{Б.18})$$

где

$$a_j = \langle E_n \rangle + p_{0j} - m_k. \quad (\text{Б.19})$$

Если величинами  $a_j$  пренебречь по сравнению с  $q_{0k}$  (основной вклад дает  $q_{0k}$  зоны,  $a_j$  - порядка нескольких МэВ), то в этом случае имеем:

$$H_j(x; m_k) \approx H_2(x; m_k) = H(x; m_k) = e^{-m_k x} / x. \quad (\text{Б.20})$$

Для матричного элемента  $(\beta\beta)_{\omega}$ -распада из (Б.17) получаем при этом следующее выражение:

$$\langle f | S | i \rangle = \frac{i}{4\pi} \left( \frac{G}{\sqrt{2}} \right)^2 N_{p_1} N_{p_2} \bar{u}(p_1) (1-\gamma_5) u(p_2) \times$$

$$\times \left( \sum_k u_{ek}^2 \eta_k \right) 2 \langle H \rangle (M_F - g^2 M_{GT}) 2\pi \delta(p_{10} + p_{20} + m_{k'} - m_{k'})$$

(Б.21)

Здесь

$$M_F = \langle A' | \sum_{n,m} (\tau_{n+}) (\tau_{m+}) | A \rangle,$$

$$M_{GT} = \langle A' | \sum_{n,m} (\tau_{n+}) (\tau_{m+}) (\vec{\sigma}_n \vec{\sigma}_m) | A \rangle \quad (\text{Б.22})$$

соответственно фермиевский и гамов-теллеровский матричные элементы. Отметим, что при  $m_k \ll 1 \text{ МэВ}$

$$\langle H \rangle \sim \frac{1}{R}, \quad (\text{Б.23})$$

где  $R$  - размер ядра.

Из выражения (Б.22) для дифференциальной вероятности безнейтринного двойного  $\beta$ -распада находим

$$d\Gamma = \frac{1}{2} \frac{G^4 m^5}{(2\pi)^5} \left( \sum_{ek} U_{ek}^2 \frac{m}{k} \eta \right)^2 | \langle N \rangle |^2 \left| M_F - g_A^2 M_{GT} \right|^2 \times F^2 (1 - \cos\theta) (\varepsilon + 1)^2 (\varepsilon_0 - \varepsilon + 1)^2 d\varepsilon \sin\theta d\theta. \quad (\text{Б.24})$$

Здесь  $\varepsilon$  - кинетическая энергия электрона в единицах массы электрона  $m$ ,  $\theta$  - угол между электронами,

$$\varepsilon_0 = \frac{m_k - m_{k'} - 2m}{m}, \quad (\text{Б.25})$$

а

$$F = \frac{2\pi\alpha(Z+2)}{1 - \exp[-2\pi\alpha(Z+2)]} \quad (\text{Б.26})$$

- кулоновский множитель. Отметим, что в (Б.24) мы пренебрегли квадратом массы электрона по сравнению с квадратом его энергии.

Как видно из (Б.24), вероятность рассматриваемого нами процесса обращается в нуль при  $\theta = 0$ . Это связано с тем, что ультрарелятивистские электроны, образующиеся в результате взаимодействия (Б.2), обладают отрицательной спиральностью и не могут вылетать в одном направлении при  $0 \rightarrow 0$  переходе.

Из (Б.24) для полной вероятности  $(\beta\beta)_{02}$ -распада получаем следующее выражение:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{G^4 m^5}{(2\pi)^5} \left( \sum_{ek} U_{ek}^2 \frac{m}{k} \eta \right)^2 | \langle N \rangle |^2 \times \left| M_F - g_A^2 M_{GT} \right|^2 F^2 G(\varepsilon_0), \quad (\text{Б.27})$$

где

$$G(\varepsilon_0) = \frac{1}{15} (\varepsilon_0^5 + 10\varepsilon_0^4 + 40\varepsilon_0^3 + 60\varepsilon_0^2 + 30\varepsilon_0). \quad (\text{Б.28})$$

До сих пор мы предполагали, что гамильтониан слабого взаимодействия имеет стандартный вид (Б.2). Вероятность безнейтринного двойного  $\beta$ -распада пропорциональна при этом множителю  $\left( \sum_{ek} U_{ek}^2 \frac{m}{k} \eta \right)^2$ , обращаемому в нуль при  $m_k \rightarrow 0$ . Если в гамильтониан слабого взаимодействия наряду с левыми входят также и правые токи, то  $(\beta\beta)_{02}$ -распад становится возможным и при равных нулю массах майорановских нейтрино. Действительно, предположим, что гамильтониан взаимодействия пары электрон-нейтрино и адронов имеет вид



$$\mathcal{H} = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma_{\alpha} [(1 + \gamma_5) + \eta(1 - \gamma_5)] \chi \gamma_{\alpha} + h.c. \quad (\text{Б.29})$$

Здесь  $\chi$  - поле безмассового майорановского нейтрино,  $\eta$  - параметр. В соответствии с (Б.29) один из нейтронов ядра может испустить электрон и правое майорановское нейтрино (оператор  $\chi_L^{(e)}$ ); правое нейтрино может поглотиться другим нейтроном (оператор  $\chi_R^{(n)}$ ), и при этом испустится второй электрон. Свертка, в которую входит поле нейтрино, имеет вид

$$\begin{aligned} & [(1 + \gamma_5) + \eta(1 - \gamma_5)] \overline{\chi(x_1)} \chi^T(x_2) [(1 + \gamma_5^T) + \eta(1 - \gamma_5^T)] = \\ & = \frac{4\eta}{(2\pi)^4} \int \frac{\hat{q} e^{iq(x_1 - x_2)}}{q^2} dq \quad (\text{Б.30}) \end{aligned}$$

С помощью этого выражения нетрудно показать, что в матричный элемент  $(\beta\beta)_{02}$  - распада дает вклад оператор

$$\begin{aligned} S^{(2)} = & 4\eta \frac{(-i)^2}{2!} \left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^2 \int \bar{e}^{(-)}(x_1) \gamma_{\alpha} (2\pi)^4 \int \frac{\hat{q}}{q^2} e^{iq(x_1 - x_2)} \gamma_{\beta} C \bar{e}^{(-)}(x_2) \times \\ & \times T \left( J_{\alpha}(x_1) J_{\beta}(x_2) \right) dx_1 dx_2. \quad (\text{Б.31}) \end{aligned}$$

На этом мы закончим рассмотрение теории безнейтринного двойного  $\beta$  - распада. В заключение несколько слов об экспериментальных данных. Опыты по поиску  $(\beta\beta)_{02}$  - распада ведутся в настоящее время во многих лабораториях мира. До сих пор этот процесс не был наблюден. Мы приведем результаты, полученные в недавней работе [39]. В этой работе геохимическим методом исследовались  $\beta\beta$  - распады изотопов  $^{128}\text{Te}$  и  $^{130}\text{Te}$ . Очевидно, что геохимический метод позволяет определить только сумму вероятностей  $(\beta\beta)_{02}$  - распада и разрешенного законом сохранения лептонного числа процесса испускания двух электронов и двух антинейтрино.

<sup>x</sup> В руде, возраст которой известен, определяется концентрация элементов, образующихся при  $\beta\beta$  - распаде  $^{128}\text{Te}$  и  $^{130}\text{Te}$  ( $^{128}\text{Xe}$  и  $^{130}\text{Xe}$ ). Предполагается, что разница между концентрацией этих элементов в руде и атмосфере обусловлена  $\beta\beta$  - распадом.

Для периода полураспада  $^{130}\text{Te}$  в работе /38/ получено значение

$$^{130}T_{1/2} = (2,60 \pm 0,28) 10^{21} \text{ лет,}$$

согласующееся со значениями, найденными в других работах.

Определим величину

$$\rho = \frac{^{130}T_{1/2}}{^{128}T_{1/2}}. \quad (\text{Б. 32})$$

Б. Понтекорю /40/ впервые обратил внимание на то, что отношение  $\rho$  не является столь чувствительным к неопределенностям, связанным с ядерными матричными элементами, как величины  $^{128}T_{1/2}$  и  $^{130}T_{1/2}$ . Для отношения  $\rho$  в работе /39/ получено значение

$$\rho = (1,03 \pm 1,13) 10^{-4}. \quad (\text{Б. 33})$$

Отсюда следует, что

$$^{128}T_{1/2} > 8 \cdot 10^{24} \text{ лет.} \quad (\text{Б. 34})$$

Отметим, что значения (Б. 33) и (Б. 34) противоречат старым данным /41/, также полученным геохимическим методом.

Если предположить, что безнейтринный двойной  $\beta$ -распад запрещен, то для отношения  $\rho$  можно получить значение

$$\rho = 2 \cdot 10^{-4}, \quad (\text{Б. 35})$$

не противоречащее (Б. 33). Таким образом, из данных работы /39/ нельзя сделать однозначных заключений о  $(\beta\beta)_{0\nu}$ -распаде. Можно получить лишь верхние границы параметров, характеризующих этот процесс. Если предположить, что  $\eta = 0$  (нет правых токов), то

$$m_{\nu} < 5,6 \text{ эВ.} \quad (\text{Б. 36})$$

Если предположить, что  $m_{\nu} = 0$  и есть правые токи, то из данных работы /39/ следует, что

$$\eta < 2,4 \cdot 10^{-5}. \quad (\text{Б. 37})$$

## Литература

1. Понтекорво Б.М. ЖЭТФ, 1957, 33, с. 649.
2. Понтекорво Б.М. ЖЭТФ, 1958, 34, с. 247.
3. Ellis J. Proc. Les Houches Summer School, 1981;  
Wolfenstein L. Proc. of Wisconsin Neutrino Mass Miniconference, 1980; Maiani L. Preprint TH 2846-CERN, 1980.
4. Frampton P.H., Vogel P. Phys. Rep., 1982, 82, p. 339.
5. Понтекорво Б.М. ЖЭТФ, 1967, 53, с. 1717.
6. Davis R., Evans J.C., Cleveland B. Proc. of the Int. Conf. "Neutrino-78", Purdue, 1978, p. 53.
7. Maki Z., Nakagawa M., Sakata S. Prog. Theor. Phys., 1962, 28, p. 870; Nakagawa M. et al. Progr. Theor. Phys., 1963, 30, p. 727.
8. Gribov V., Pontecorvo B. Phys. Lett., 1969, 28B, p. 463.
9. Понтекорво Б. Письма ЖЭТФ, 1971, 13, с. 281.
10. Bilenky S.M., Pontecorvo B. Phys. Lett., 1976, B61, p. 248;  
Fritzsch H., Menkowsky P. Phys. Lett., 1976, B62, p. 72;  
Eliezer S., Swift A. Nucl. Phys., 1976, B105, p. 45.
11. Bilenky S.M., Pontecorvo B. Lett. Nuovo Cimento, 1976, 17, p. 569.
12. Биленький С.М., Понтекорво Б.М. УФН, 1977, 123, с. 181.
13. Cabibbo N. Phys. Lett., 1978, 72B, p. 333.
14. de Rujula A., Lusignoli M., Maiani L., Petcov S.T., Petrosio R. Nucl. Phys., 1980, B168, p. 54.
15. Bilenky S.M., Hošek J., Petcov S.T. Phys. Lett., 1980, 94B, p. 495.
16. Кобзарев И.Ю. и др. ЯФ, 1980, 32, с. 1590.
17. Barger V. et al. Phys. Rev. Lett., 1980, 45, p. 692.
18. Schechter J., Valle J.P. Phys. Rev., 1980, D22, p. 2227.
19. Cheng T.P., Li L.F. Phys. Rev., 1980, D22, p. 2860.
20. Doi M. et al. Phys. Lett., 1981, 102B, p. 323.
21. Glashow S.L. Nucl. Phys., 1961, 22, p. 579;  
Weinberg S. Phys. Rev. Lett., 1967, 19, p. 1264;  
Salam A. Proc. 8th Nobel Symposium, Stockholm, 1968.
22. Kobayashi M., Maskawa K. Prog. Theor. Phys., 1973, 49, p. 652.
23. Петков С.Т. ЯФ, 1977, 25, с. 641.
24. Wolfenstein L. Phys. Lett., 1981, 107B, p. 77.
25. Зельдович Я.Б. ДАН СССР, 1952, 86, с. 505.
26. Konopinski E.J., Mahmoud M. Phys. Rev., 1953, 92, p. 1045.
27. Bilenky S.M., Pontecorvo B. Phys. Lett., 1980, 95B, p. 233;  
Phys. Lett., 1981, 102B, p. 32.
28. Bilenky S.M., Pontecorvo B. JINR, E2-82-722, Dubna, 1982;  
JINR, E2-83-126, Dubna, 1983.

29. Петров С.Т. ЯФ, 1977, 25, с.340;  
 Marciano W.J., Sanda A.I. Phys. Lett., 1977, 67B, p.303.
30. De Rijula A., Glashow S.L. Phys. Rev. Lett., 1980, 45, p.942;  
 Pal P.B., Wolfenstein L. Phys. Rev., 1982, D25, p. 766.
31. Биленький С.М., Нидермайер Ф. ЯФ, 1981, 34, с. 1091.
32. Barger V. et al. Phys. Rev. Lett., 1980, 45, p. 2084.
33. Baltay C. Proc. of Intern. Conf. "Neutrino-82", Budapest, 1982,  
 Supplement to v. I, p. 9.
34. Болиев М.М., Буткевич А.Б. и др. ЯФ, 1981, 34,  
 с. 1418.
35. Davis R. Proc. of the Brookhaven Solar Neutrino Conf.,  
 BNL, 50879, 1978, I, p. I.
36. Bahcall S.N. Rev. Mod. Phys., 1978, 50, p. 881.
37. Кузьмин В.А. ЖЭТФ, 1965, 49, с. 1532.
38. Primakoff M., Rosen S.P. Phys. Rev., 1969, 184, p.1925;  
 Doi M. et al. Prog. Theor. Phys., 1981, 66, p. 1739.
39. Kirsten T. et al. Phys. Rev. Lett., 1983, 50, p. 474.
40. Pontecorvo B. Phys. Lett., 1968, 26B, p. 630.
41. Hennecke E. Phys. Rev., 1978, C17, p.1168.

Рукопись поступила в издательский отдел  
 24 июня 1983 года.