ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Б.М.БАРБАШОВ, В.В.НЕСТЕРЕНКО

Непрерывные симметрии в теории поля

ДУБНА

ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Выпуск 18

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Р2 - 12029

Б.М.Барбашов, В.В.Нестеренко

НЕПРЕРЫВНЫЕ СИММЕТРИИ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Дубна 1978

Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. P2 - 12029

Непрерывные симметрии в теории поля

Лекции посвящены следствиям симметрии полевых теорий при непрерывных преобразованиях координат и полей. Излагается вариационный формализм в случае непрерывных групп преобразований, доказываются обе теоремы Нетер, рассматриваются собственные и несобственные, сильные и слабые законы сохранения. Обсуждается усилие и обобщение этих теорем. Кратко рассмотрены системы со связями, описываемые сингулярными лагранжианами. Приведены примеры из механики, электродинамики, теории поля Янга-Миллса, релятивистской струны, гравитации.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Barbashov B.M., Nesterenko V.V. P2 - 12029

Continuous Symmetry in Field Theory

The lectures are devoted to consequences of the symmetries of field theories under the continuous coordinate and field transformations. The variation formalism in the case of continuous group transformations is represented. The proof of both Nother's theorem and the Nother classification of the conservation laws are given. The reinforcement and generalization of these theorems are also discussed. A brief consideration is given to the systems with constraints described by singular Lagrangians. Examples are taken from the classical mechanics and electrodynamics, from the Yang-Mills field theory and the theory of relativistic string, and from the gravitational theory.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

"Симметрия, в каком бы широком или узком смысле мы не понимали этого слова, есть та единственная идея, с помощью которой человек испокон веков пытался постигнуть и воспроизвести порядок, красоту и совершенство"

H.Weyl.Symmetry,Princeton,1952.

ГЛАВА I. ТЕОРИЯ

§ I. Введение

Симметрии, с которыми имеют дело в квантовой теории поля, можно разделить на дискретные и непрерывные. К первым относятся, например, симметрии по отношению к хорошо известным преобразованиям C , P , T и их комбинациям. Непрерывные симметрии делятся, в свою очередь, на алгебраические и динамические. Алгебраические симметрии возникают при инвариантности теории по отношению к непрерывным преобразованиям координат и полевых функций, зависящим от конечного набора числовых параметров. Алгебраическая симметрия позволяет классифицировать элементарные частицы с помощью унитарных представлений соответствующих групп преобразований. Примером таких групп являются группа Пуанкаре, $SU(N)$-группы.

Динамические симметрии связаны с инвариантностью теории при преобразованиях, образующих бесконечные группы. Эти преобразования зависят от конечного числа параметров-функций. Классическими примерами здесь являются калибровочные преобразования в электродинамике и общековариантные преобразования в теории гравитации. Инвариантность полевой модели по отношению к бесконечной группе преобразований позволяет найти лагранжиан взаимодействия (минимальное взаимодействие в электродинамике) и приводит к низкоэнергетическим теоремам.

Свойства симметрии удобно формулировать и исследовать в рамках лагранжева метода, когда система полностью определяется заданием своей функции Лагранжа. Та или иная симметрия вводится в теорию требованием, чтобы действие системы было интегральным инвариантом соответствующей группы преобразований (см. § 3).

Данные лекции посвящены следствиям симметрии полевых теорий при непрерывных преобразованиях координат и полевых функций. Весь материал разделен на две главы. В первой главе достаточно подробно излагается вариационный формализм в случае непрерывных групп преобразований, дается доказательство первой и второй теорем Нетер, рассматриваются собственные и несобственные, сильные и слабые законы сохранения. Обсуждается обобщение и усиление теорем Нетер. Кратко рассматриваются системы со связями, описываемые сингулярными лагранжианами. Во второй главе приведены примеры применения теорем Нетер в классической механике, в электродинамике, в хромодинамике, в теории релятивистской струны и в гравитации. Основное внимание при этом уделяется следствиям инвариантности по отношению к бесконечным группам преобразований.

§ 2. Вариация функционала при одновременном изменении функций и независимых переменных /1/

Рассмотрим функционалы следующего вида:

$$I[u(x)] = \int_{\Omega} dx\, \mathcal{L}(x, u, \partial u, \partial^2 u), \tag{2.1}$$

где $u(x)$ означает набор из m функций $u_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, зависящих от n переменных x_1, x_2, ..., x_n, которые для сокращения записи будем обозначать просто x. Символы ∂u и $\partial^2 u$ означают любую частную производную вида $\partial u_j / \partial x_\mu = u_{j,\mu}$ и $\partial^2 u_j / \partial x_\mu \partial x_\nu = u_{j,\mu\nu}$, соответственно.

Пусть G – некоторая конечная или бесконечная непрерывная группа, осуществляющая преобразование как независимых переменных

x, так и функций $u(x)$. В случае конечной группы G_r эти преобразования зависят от r постоянных параметров ε_1, ε_2, ..., ε_r, а в случае бесконечной группы $G_{\infty r}$ – от r параметров – функций $\varepsilon_i(x), i=1,\dots,r$. Как обычно, будем считать, что тождественному преобразованию соответствуют нулевые значения параметров ε_i. Наиболее общее преобразование имеет вид

$$
\begin{aligned}
y_\mu &= \Phi_\mu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots; \varepsilon) = x_\mu + \delta x_\mu, \quad \mu=1,\dots,n;\\
v_j(y) &= \Psi_j(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots; \varepsilon) = u_j(x) + \delta u_j, \quad j=1,\dots,m.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Вариации δx_μ и δu_j в первом порядке по ε определяются следующими выражениями

$$
\begin{aligned}
\delta x_\mu &= \varepsilon_i \left.\frac{\partial \Phi_\mu}{\partial \varepsilon_i}\right|_{\varepsilon_i=0} \equiv \varepsilon_i \delta x_\mu^{(i)},\\
\delta u_j &= \varepsilon_i \left.\frac{\partial \Psi_j}{\partial \varepsilon_i}\right|_{\varepsilon_i=0} \equiv \varepsilon_i \delta u_j^{(i)}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Помимо полной вариации функции

$$\delta u_j(x) = v_j(y) - u_j(x)$$

нам потребуется вариация формы функции

$$\bar{\delta} u_j(x) = v_j(x) - u_j(x).$$

Из этого определения следует, что операция $\bar{\delta}$ перестановочна с дифференцированием: $\bar{\delta} u_{j,\mu} = \partial_\mu \bar{\delta} u_j$. Между этими вариациями имеет место следующая связь:

$$
\begin{aligned}
\delta u_j(x) &= v_j(y) - u_j(x) = v_j(y) - u_j(y) + u_j(y) - u_j(x) \sim\\
&\sim \bar{\delta} u_j(y) + u_{j,\mu}\delta x_\mu \sim \bar{\delta} u_j(x) + u_{j,\mu}\delta x_\mu .
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Знак $\sim$ означает равенство с точностью до величин первого порядка по ε включительно. Напомним, что при выводе уравнений движения из принципа наименьшего действия варьируется именно форма полевых функций, а независимые переменные остаются при этом неизменными.

Установим связь между полной вариацией производных полевых функций и вариацией их формы. Для этого нам потребуются некоторые предварительные выкладки. Производную $\partial y_\mu / \partial x_\nu$, согласно формулам (2.2), можно представить так:

$$\frac{\partial y_\mu}{\partial x_\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{\partial \delta x_\mu}{\partial x_\nu} .$$

Далее

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial y_\nu} + \frac{\partial \delta x_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial y_\mu} ,$$

поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{\partial}{\partial y_\nu} = \frac{\partial \delta x_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial y_\mu} . \qquad (2.5)$$

Аналогично для вторых производных имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \left(\frac{\partial}{\partial y_\mu} + \frac{\partial \delta x_\rho}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial y_\rho} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_\nu} + \frac{\partial \delta x_\sigma}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial y_\sigma} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial y_\nu} + \frac{\partial \delta x_\rho}{\partial x_\mu} \frac{\partial^2}{\partial y_\rho \partial y_\nu} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y_\mu} \left(\frac{\partial \delta x_\sigma}{\partial x_\nu} \right) \frac{\partial}{\partial y_\sigma} + \frac{\partial \delta x_\sigma}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial y_\sigma} .$$

В последних трех слагаемых производные по y можно заменить, согласно (2.5), производными по x . В результате получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial y_\nu} =$$

$$= \frac{\partial \delta x_\rho}{\partial x_\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_\rho \partial x_\nu} + \frac{\partial^2 \delta x_\sigma}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial \delta x_\sigma}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\sigma} . \qquad (2.6)$$

Теперь рассмотрим полную вариацию первой производной от функции

$$\delta u_{j,\mu}(x) = \frac{\partial v_j(y)}{\partial y_\mu} - \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial y_\mu}[v_j(y) - u_j(y)] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y_\mu}[u_j(y) - u_j(x)] + \left(\frac{\partial}{\partial y_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) u_j(x) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_\mu}\bar{\delta} u_j(y) + \frac{\partial}{\partial y_\mu}\left(\left.\frac{\partial u_j(y)}{\partial y_\sigma}\right|_{y_\mu = x_\mu} \cdot \delta x_\sigma\right) - \frac{\partial \delta x_\sigma}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial}{\partial y_\sigma} u_j(x).$$

Опять с точностью до ε полученное выражение можно записать так:

$$\delta u_{j,\mu}(x) = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\delta} u_j(x) + \frac{\partial^2 u_j(x)}{\partial x_\mu \partial x_\sigma}\delta x_\sigma . \tag{2.7}$$

Таким же путем для второй производной функции $u_j(x)$ имеем, с учетом (2.6),

$$\delta u_{j,\mu\nu}(x) = \frac{\partial^2 v_j(y)}{\partial y_\mu \partial y_\nu} - \frac{\partial^2 u_j(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial y_\nu}[v_j(y) - u_j(y)] +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial y_\nu}[u_j(y) - u_j(x)] + \left(\frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial y_\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right) u_j(x) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial y_\nu}\bar{\delta} u_j(y) + \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial y_\nu}\left(\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_\sigma}\delta x_\sigma\right) -$$

$$- \frac{\partial \delta x_\rho}{\partial x_\mu}\frac{\partial^2 u_j(x)}{\partial x_\rho \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 \delta x_\sigma}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\cdot\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \delta x_\sigma}{\partial x_\nu}\,\frac{\partial^2 u_j(x)}{\partial x_\mu \partial x_\sigma} .$$

Заменяя $\partial/\partial y$ производной $\partial/\partial x$, получаем с точностью до ε

$$\delta u_{j,\mu\nu}(x) = \bar{\delta} u_{j,\mu\nu} + u_{j,\mu\nu\sigma}\delta x_\sigma . \tag{2.8}$$

Формулы (2.4), (2.7) и (2.8) показывают, что полная вариация как самой функции, так и ее производных складывается из вариации формы плюс изменение функции или ее производной за счет преобразования аргумента. Это правило остается в силе не только для производных более высокого порядка

$$\delta u_{j\,\mu\nu\rho\ldots} = \bar{\delta} u_{j,\mu\nu\rho\ldots} + u_{j,\mu\nu\rho\ldots\sigma}\delta x_\sigma ,$$

но и для функций $\mathcal{L}(x, u, \partial u, \partial^2 u)$, форма которых не меняется при преобразованиях (2.2), то есть $\mathcal{L}(x, u, \partial u, \partial^2 u)$ переходит в ту же самую функцию, но уже от новых аргументов $\mathcal{L}(y, v, \partial v, \partial^2 v)$. При этом полная вариация $\delta\mathcal{L}$ оказывается равной

$$\delta\mathcal{L} = \bar{\delta}\mathcal{L} + \frac{\mathcal{D}\mathcal{L}}{\mathcal{D}x_\mu}\delta x_\mu . \tag{2.9}$$

Здесь и в дальнейшем нам часто придется иметь дело с производными по x, от $\mathcal{L}(x, u, \partial u, \partial^2 u)$, которые вычисляются с учетом не только явной зависимости $\mathcal{L}$ от x, но и с учетом зависимости посредством u, ∂u и $\partial^2 u$. Введем специальное обозначение для такой производной

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\mu} \equiv \mathcal{D}_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + u_{j,\mu}\frac{\partial}{\partial u_j} + u_{j,\mu\nu}\frac{\partial}{\partial u_{j,\nu}} + u_{j,\mu\nu\rho}\frac{\partial}{\partial u_{j,\nu\rho}} . \tag{2.10}$$

Очевидно, что основные правила дифференцирования для $\mathcal{D}/\mathcal{D}x_\mu$ будут такими же, как и для обычных производных.

Докажем формулу (2.9)

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(x+\delta x, u+\delta u, \partial u + \delta\partial u, \partial^2 u + \delta\partial^2 u) -$$

$$- \mathcal{L}(x, u, \partial u, \partial^2 u) =$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \delta x_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} \delta u_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu}} \delta u_{j,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu\nu}} \delta u_{j,\mu\nu}. \tag{2.11}$$

Используя формулы для полных вариаций (2.4), (2.7), (2.8) и определение (2.10), получаем из (2.11)

$$\delta \mathcal{L} = \bar{\delta} \mathcal{L} + \frac{\mathcal{D} \mathcal{L}}{\mathcal{D} x_\mu} \delta x_\mu , \tag{2.12}$$

где $\bar{\delta}\mathcal{L}$ - вариация $\mathcal{L}$ за счет изменения формы функциональных аргументов

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \bar{\delta} u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,\mu}} \bar{\delta} u_{i,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,\mu\nu}} \bar{\delta} u_{i,\mu\nu} . \tag{2.13}$$

Теперь возвратимся к функционалу (2.1) и, используя преобразования (2.2), поставим ему в соответствие новый функционал

$$I[v(y)] = \int\limits_{\Omega + \Delta\Omega} dy\, \mathcal{L}(y, v(y), \partial v(y), \partial^2 v(y)), \tag{2.14}$$

где $\Omega + \Delta\Omega$ означает ту область в координатном пространстве, в которую переходит Ω при преобразовании (2). Для доказательства теорем Нетер нам потребуется вычисление разности $I[v(y)] - I[u(x)]$. Мы покажем, что эту величину в первом порядке по ε, то есть вариацию функционала $I[u(x)]$, можно представить в следующем виде:

$$\delta I = \int\limits_{\Omega} dx \left[\bar{\delta} \mathcal{L} + \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D} x_\mu} (\mathcal{L} \delta x_\mu) \right], \tag{2.15}$$

где $\bar{\delta}\mathcal{L}$ определено в формуле (2.13). Второе слагаемое в подынтегральном выражении в (2.15) в полной записи имеет вид

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\mu}(\mathcal{L}\delta x_\mu) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_j} u_{j,\mu}\delta x_\mu +$$

$$+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\nu}} u_{j,\nu\mu}\delta x_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\nu\sigma}} u_{j,\nu\sigma\mu}\delta x_\mu + \mathcal{L}\frac{\partial\delta x_\mu}{\partial x_\mu}.$$

Перейдем к доказательству формулы (2.15)

$$\delta I = I[v(y)] - I[u(x)] =$$

$$= \int\limits_{\Omega+\Delta\Omega} dy\, \mathcal{L}(y, v(y), \partial v(y), \partial^2 v(y)) - \qquad (2.16)$$

$$- \int\limits_{\Omega} dx\, \mathcal{L}(x, u(x), \partial u(x), \partial^2 u(x)).$$

Интегрирование по y в первом слагаемом можно заменить интегрированием по x. Якобиан преобразования, согласно (2.2), равен

$$\frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = \det\left\|\delta_{\mu\nu} + \frac{\partial\delta x_\mu}{\partial x_\nu}\right\| = \prod_{\mu=1}^{n}\left(1 + \frac{\partial\delta x_\mu}{\partial x_\mu}\right) + O(\varepsilon^2) =$$

$$= 1 + \sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial\delta x_\mu}{\partial x_\mu} + O(\varepsilon^2).$$

Формула (2.16) теперь принимает вид

$$\delta I = \int\limits_{\Omega} dx\, [\mathcal{L}(y, v(y), \partial v(y), \partial^2 v(y)) - \mathcal{L}(x, u(x), \partial u(x), \partial^2 u(x)) +$$

$$+\ \mathcal{L}(x, u(x), \partial u(x), \partial^2 u(x))\ \frac{\partial \delta x_\mu}{\partial x_\mu}\Big] = \int_\Omega dx\,(\bar{\delta}\mathcal{L} + \mathcal{L}_{,\mu}\,\delta x_\mu). \tag{2.17}$$

Переходя от полной вариации $\delta\mathcal{L}$ к вариации формы $\bar{\delta}\mathcal{L}$ с помощью (2.12), получаем (2.15).

В формуле (2.15) фигурируют только вариации формы функций $u_j(x)$ и их частных производных. Поэтому именно эту формулу, а не (2.17), удобно использовать в том случае, если мы хотим установить связь полной вариации δI с той вариацией функционала I, о которой говорится в принципе наименьшего действия.

Если независимые переменные x_μ не подвергаются преобразованию, то второе слагаемое в формуле (2.15) обращается в ноль, и мы получаем обычное выражение для вариации функционала при изменении только формы функций $u_j(x)$, хорошо известное в вариационном исчислении.

Предполагая, что $\bar{\delta}u_j(x)$ исчезают на границе области интегрирования Ω, получаем после интегрирования по частям

$$\delta I = \int dx\, L_j(x, u, \partial u, \ldots)\,\bar{\delta}u_j(x), \tag{2.18}$$

где L_j - лагранжевы выражения (эйлерианы или лагранжевы производные)

$$L_j = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_j} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu}}\right) + \frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{D}x_\mu\,\mathcal{D}x_\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu\nu}}\right) \tag{2.19}$$

Согласно принципу наименьшего действия $\delta I = 0$, и из (2.18) следуют уравнения движения (уравнения Эйлера) для полевых функций $u_j(x)$:

$$L_j(x, u, \partial u, \ldots) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots m. \tag{2.20}$$

В дальнейшем нам потребуется новая величина $A_r(x, u, \partial u, \ldots)$, которую введем с помощью формулы

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = L_j \bar{\delta} u_j - \mathcal{D}iv A =$$

$$= L_j \bar{\delta} u_j - \frac{\mathcal{D} A_\mu}{\mathcal{D} x_\mu}. \tag{2.21}$$

Для рассматриваемых функционалов $\mathcal{D}iv A$ имеет вид

$$\mathcal{D}iv A = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D} x_\mu}\left[\left(\mathcal{D}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\nu\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu}}\right)\bar{\delta} u_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu\nu}} \bar{\delta} u_{j,\nu}\right]. \tag{2.22}$$

Подставляя (2.22) и (2.19) в (2.21), легко проверить, что справа в (2.21) стоит как раз величина, определяемая формулой (2.13).

§ 3. Доказательство теорем Нетер[3]

Нам потребуется следующее определение: функционал $I[u(x)]$ называется инвариантом группы G_r, если $I[v(y)] = I[u(x)]$, (см. формулы (21) и (2.14)). Очевидно, что в этом случае полная вариация δI, определяемая формулой (2.15), равна нулю.

Первая теорема Нетер. Если интеграл I инвариантен по отношению к некоторой r - параметрической группе G_r, осуществляющей непрерывные преобразования координат и функций, то r линейно независимых комбинаций лагранжевых выражений обращаются в дивергенции и, наоборот, из последнего условия вытекает инвариантность I по отношению к некоторой группе G_r. Теорема сохраняет справедливость и в предельном случае бесконечно большого числа параметров.

При доказательстве этой теоремы и следующей второй теоремы Нетер мы ограничимся рассмотрением только прямых утверждений, отсылая за доказательством обратных теорем к оригинальной работе Э. Нетер /3,4/.

Следует подчеркнуть, что в первой теореме Нетер идет речь о преобразованиях с постоянными параметрами, не зависящими от координат, то есть ε_i, $i=1,2,\dots,r$ являются просто числами. Перейдем к доказательству теоремы. Из основной формулы для вариации функционала (2.15) и формулы (2.21) с учетом того, что $I[u]$ - инвариант группы G_r, получаем

$$\delta I = \int\limits_\Omega dx \left[L_i \bar{\delta} u_i - \mathcal{D}iv\, A + \mathcal{D}_\mu (\mathcal{L} \delta x_\mu) \right] =$$

$$= \int\limits_\Omega dx \left(L_i \bar{\delta} u_i - \mathcal{D}iv\, B \right) = 0, \tag{3.1}$$

где $B_\mu = A_\mu - \mathcal{L} \delta x_\mu$. Равенство (3.1) справедливо для любой области интегрирования Ω, поэтому подынтегральное выражение должно тождественно обращаться в ноль

$$L_i \bar{\delta} u_i = \mathcal{D}iv\, B. \tag{3.2}$$

Полные вариации δu_j, $\delta u_{j,\nu}$, δx_μ, как это было предположено ранее, линейны по групповым параметрам ε_i, поэтому, согласно формулам (2.4) и (2.7), вариации формы $\bar{\delta} u_j$ и $\bar{\delta} u_{j,\nu}$ также линейны по ε_i :

$$\delta u_j = \varepsilon_i \delta u_j^{(i)}, \quad \delta u_{j,\nu} = \varepsilon_i \delta u_{j,\nu}^{(i)}, \quad \delta x_\mu = \varepsilon_i \delta x_\mu^{(i)},$$

$$\bar{\delta} u_j = \varepsilon_i \bar{\delta} u_j^{(i)}, \quad \bar{\delta} u_{j,\nu} = \varepsilon_i \bar{\delta} u_{j,\nu}^{(i)}. \tag{3.3}$$

Следовательно, и вектор B_μ линеен по ε_i

$$B_\mu = \varepsilon_i B_\mu^{(i)}. \tag{3.4}$$

Подставляя (3.3) и (3.4) в (3.2), получаем искомые соотношения

$$L_j \bar{\delta} u_j^{(i)} = \mathcal{D}iv\, B^{(i)}, \quad i=1,2,\ldots,r, \tag{3.5}$$

где

$$B_\mu^{(i)} = \left(\mathcal{D}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\nu\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu}}\right)\bar{\delta} u_j^{(i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu\nu}}\bar{\delta} u_{j,\nu}^{(i)} - \mathcal{L}\delta x_\mu^{(i)} =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu}} - \mathcal{D}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\nu\mu}}\right) u_{j,\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\nu\sigma}} u_{j,\nu\sigma} - \mathcal{L}\delta_{\mu\sigma}\right]\delta x_\sigma^{(i)} -$$

$$- \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu}} - \mathcal{D}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\nu\mu}}\right)\delta u_j^{(i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu\nu}}\delta u_{j,\nu}^{(i)}. \tag{3.6}$$

Таким образом, r линейно независимых комбинаций лагранжевых выражений переходят в дивергенции.

Отметим, что именно в этом месте мы воспользовались тем, что рассматривается преобразования (2.2), образующие конечную группу, и параметры ε_i не зависят от x . Поэтому после подстановки (3.3) и (3.4) в (3.2) можно было вынести ε_i из-под знака $\mathcal{D}iv$ и приравнять коэффициенты при одинаковых параметрах ε_i в левой и правой частях (3.2).

В формулах (3.5) не предполагается, что функции $u_j(x)$ удовлетворяют уравнениям движения (2.20). Если это так, то левые части в (3.5) обращаются в ноль, и мы имеем r законов сохранения

$$\mathcal{D}iv\, B^{(i)} = 0, \quad i=1,2,\ldots,r. \tag{3.7}$$

Перейдем теперь к бесконечной группе $G_{\infty r}$, когда параметры преобразования являются функциями координат: $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x)$, i =1,2,...,r.

В этом случае имеет место вторая теорема Нетер. Если интеграл I инвариантен относительно бесконечной группы $G_{\infty r}$, осуществляющей непрерывные преобразования координат и функций, причем эти преобразования зависят не только от самих параметров-функций $\varepsilon_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, но и от их производных до k - го порядка включительно, то имеют место r тождественных соотношений между лагранжевыми выражениями и производными от них до k - го порядка; здесь также возможно обращение.

Вариацию формы функций $u_j(x)$ представим в следующем виде:

$$\bar{\delta} u_j(x) = a_j^{(i)}(x, u, \partial u, \ldots)\varepsilon_i(x) + b_{j\mu}^{(i)}(x, u, \partial u, \ldots)\frac{\partial \varepsilon_i(x)}{\partial x_\mu}. \tag{3.8}$$

Для простоты мы ограничились случаем $k=1$. Аналогичная формула имеет место и для δx_μ, однако явный вид этой вариации в дальнейшем нам не потребуется. Подставляя (3.8) в (3.I) и используя равенство

$$L_j b_{j\mu}^{(i)} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_\mu} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\mu}\left(L_j b_{j\mu}^{(i)} \varepsilon_i\right) - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\mu}\left(L_j b_{j\mu}^{(i)}\right)\varepsilon_i,$$

получаем

$$\delta I = \int_\Omega dx \left\{\left[L_j a_j^{(i)} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\mu}\left(L_j b_{j\mu}^{(i)}\right)\right]\varepsilon_i(x) - \right.$$
$$\left. - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\mu}\left(B_\mu - L_j b_{j\mu}^{(i)}\varepsilon_i\right)\right\} = 0. \tag{3.9}$$

Теперь выберем параметры-функции $\varepsilon_i(x)$ так, чтобы они сами и все их производные, встречающиеся в $B_\mu - L_j b_{j\mu}^{(i)}\varepsilon_i$, исчезли на границе области интегрирования Ω, например, $c_i \sim$ $\sim c_i \delta(x-z), z \in \Omega$. В результате получаем

$$\delta I = \int_\Omega dx \left[L_j a_j^{(i)} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\mu}\left(L_j b_{j\mu}^{(i)}\right)\right]\varepsilon_i(x) = 0,$$

откуда следуют тождества

$$L_j a_j^{(i)} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\mu}\left(L_j b_{j\mu}^{(i)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{3.10}$$

Этими тождествами, которые были получены при частном выборе параметров-функций $\varepsilon_i(x)$, не исчерпываются все следствия симметрии функционала (I) относительно бесконечной группы $G_{\infty r}$ /5,6/. Новые тождества возникают в том случае, если в подынтегральном выражении в формуле (3.9) (или в (3.I) приравнять нулю по отдельности коэффициенты при каждой функции $\varepsilon_i(x)$ и при каждой ее производной $\varepsilon_{i,\mu\nu\ldots\rho\sigma}(x)$. Это, очевидно, соответствует выбору функций $\varepsilon_i(x)$ в следующем виде: $\varepsilon_i(x)\sim$ $\sim c_i x_\mu x_\nu \ldots x_\rho x_\sigma$. Получим эти тождества для случая, когда имеют место только преобразования (3.8), не затрагивающие координат x_μ. Будем считать для простоты, что $\mathcal{L}$ не зависит от вторых производных функций $u_j(x)$. В этом случае формула (3.I) с учетом (3.6) и (3.8) принимает вид

$$\delta I=\int_\Omega dx\Big[L_j a_j^{(i)}\varepsilon_i+L_j b_{j\mu}^{(i)}\varepsilon_{i,\mu}+$$

$$+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu}}\right)_{,\mu}\left(a_j^{(i)}\varepsilon_i+b_{j\nu}^{(i)}\varepsilon_{i,\nu}\right)+ \tag{3.II}$$

$$+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu}}\left(a_{j,\mu}^{(i)}\varepsilon_i+a_j^{(i)}\varepsilon_{i,\mu}+b_{j\nu,\mu}^{(i)}\varepsilon_{i,\nu}+b_{j\nu}^{(i)}\varepsilon_{i,\nu\mu}\right)\Big]=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\varepsilon_i(x)$ и при первых и вторых производных этих функций в подынтегральном выражении в формуле (3.II), получаем тождества

$$L_j a_j^{(i)}+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu}}a_j^{(i)}\right)_{,\mu}\equiv 0,\quad i=1,2,\ldots r, \tag{3.I2}$$

$$L_j b_{j\nu}^{(i)}+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu}}b_{j\nu}^{(i)}\right)_{,\mu}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\nu}}a_j^{(i)}\equiv 0, \tag{3.I3}$$

$$i=1,2,\ldots,r,\quad \nu,\mu=1,2,\ldots,n;$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\nu}}b_{j\mu}^{(i)}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu}}b_{j\nu}^{(i)}\equiv 0,\quad \begin{array}{l} i=1,2,\ldots,r,\\ \nu,\mu=1,2,\ldots,n.\end{array} \tag{3.I4}$$

Два слагаемых в (3.I4) возникли за счет того, что $\varepsilon_{i,\nu\mu}$ симметрично по индексам ν и μ.

Из тождеств (3.I2 - 3.I4) следует (3.I0). Действительно, дифференцируя (3.I3) по $\mathcal{D}/\mathcal{D}x_\nu$ и учитывая, что $(\partial\mathcal{L}/\partial u_{j,\mu})\, b^{(i)}_{j\nu}$, согласно (3.I4), антисимметрично по индексам μ и ν, имеем

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\nu}}\, a^{(i)}_j\right) = -\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\nu}\left(L_j\, b^{(i)}_{j\nu}\right).$$

Подставляя это в (3.I2), получаем (3.I0). Следует отметить, что на практике оказываются более важными тождества (3.I0), которые однородны и линейны по L_j.

Тождества (3.I0) и (3.I2 - 3.I4) устанавливают зависимость между левыми частями уравнений Эйлера, то есть они указывают, что часть этих уравнений является следствием остальных. Поэтому число независимых уравнений меньше числа искомых функций $u_j(x)$. Следовательно, для нахождения $u_j(x)$ уравнения движения (2.20) необходимо дополнить в этом случае некоторыми условиями на $u_j(x)$ и их производные, то есть выбрать ту или иную калибровку, исходя уже из физических соображений.

Во второй главе мы выпишем полученные здесь тождества для конкретных полевых моделей.

Следствия из свойств инвариантности лагранжиана в рамках вариационных методов изучались в 1915–1918 годах Г. Лоренцом, Д. Гильбертом, Ф. Клейном, Г. Вейлем (ссылки на эти работы можно найти в [6]). Наиболее четко основные результаты в виде двух теорем были сформулированы Э. Нетер [3]. В немалой степени эти исследования были стимулированы общей теорией относительности, разрабатывавшейся Эйнштейном в эти годы.

§ 4. Обобщение теорем Нетер

А. Теоремы Нетер допускают обобщение на случай, когда функционал $I[u(x)]$ не строго инвариантен относительно преобразований (2.2), а инвариантен только с точностью до дивергенции [2,7]. Вариация такого функционала δI может быть представлена

$$\delta I = \int dx\, \frac{\mathcal{D} C_\mu}{\mathcal{D} x_\mu}, \tag{4.I}$$

где полная дивергенция $\mathcal{D}iv\, C = \mathcal{D}C_\mu/\mathcal{D}x_\mu$ линейна по групповым параметрам ε_i : $C_\mu = \sum_1^r C_\mu^{(i)} \varepsilon_i$. Такие преобразования иногда называют дивергентными /2/. Очевидно , что в этом случае в соотношениях дивергенций (3.5) и в законах сохранения (3.7), вытекающих из первой теоремы Нетер, к векторам $B_\mu^{(i)}$ следует прибавить $C_\mu^{(i)}$.

Если C_μ зависит только от $u_j(x)$ и x , то добавка (4.I) не приводит к изменению уравнений движения (2.20). Действительно,

$$\frac{\mathcal{D}C_\mu}{\mathcal{D}x_\mu} = \frac{\partial C_\mu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial C_\mu}{\partial u_j} u_{j,\mu},$$

поэтому

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{\mathcal{D}C_\mu}{\mathcal{D}x_\mu}\right) = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\mu}\left(\frac{\partial C_\mu}{\partial u_j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial u_{j,\nu}}\left(\frac{\mathcal{D}C_\mu}{\mathcal{D}x_\mu}\right) = \frac{\partial C_\nu}{\partial u_j}.$$

В результате получаем

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\mathcal{D}iv\, C - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\nu}\left(\frac{\partial}{\partial u_{j,\nu}}\mathcal{D}iv\, C\right) =$$

$$= \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\mu}\left(\frac{\partial C_\mu}{\partial u_j}\right) - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\nu}\left(\frac{\partial C_\nu}{\partial u_j}\right) = 0.$$

Характерным примером здесь служит нерелятивистская классическая система N материальных точек, взаимодействующих между собой парными центральными силами (см. § 8). По отношению к преобразованиям Галилея действие этой системы инвариантно с точностью до дивергенции. Следствием этой инвариантности является закон о равномерном и прямолинейном движении центра масс такой системы.

Что касается тождеств (3.10), вытекающих из второй теоремы Нетер, то они остаются неизменными и в том случае, когда функционал $I[u(x)]$ инвариантен с точностью до дивергенции при преобразованиях группы $G_{\infty r}$. При получении более широкого класса тождеств (3.12 - 3.14) необходимо опять в формулах (3.1) или (3.9) прибавить C_μ к вектору B_μ .

Примером бесконечной группы преобразований, относительно которых действие инвариантно с точностью до дивергенции, являются специальные локальные калибровочные преобразования в системе дираковского поля, взаимодействующего с нейтральным векторным полем с ненулевой массой/8/ (см. § II).

Б. Первая теорема Нетер может быть усилена еще и в следующем направлении/9,IO/.

Если преобразования координат и функций (2.2), образующие некоторую конечную r - параметрическую группу, переводит любое решение уравнений Эйлера (2.20) опять в решение этих же уравнений, причем функционал $I[u(x)]$, рассматриваемый только на экстремалях, инвариантен по отношению к этим преобразованиям, то имеют место r законов сохранения (3.7).

В отличие от формулировки теоремы, данной Нетер, законы сохранения, возникающие здесь, не обязаны быть все линейно независимы, так как рассматривается ограниченный класс функций $u_j(x)$ (только экстремами), на которых инвариантен функционал $I[u(x)]$.

Группа преобразований, при которых инвариантны уравнения движения и функционал $I[u(x)]$, рассматриваемый только на экстремалях, может оказаться более широкой, чем группа инвариантности функционала $I[u(x)]$ на всех функциях $u_j(x)$. Поэтому здесь можно получить в принципе больше законов сохранения по сравнению со стандартной формулировкой первой теоремы Нетер.

Доказательство усиленной теоремы Нетер и соответствующие примеры можно найти в работах/9,IO/.

§ 5. Собственные и несобственные законы сохранения

Рассмотрим специальный случай, когда конечная группа G_r получается из бесконечной $G_{\infty r}$, если параметры - функции $\varepsilon_i(x)$ в $G_{\infty r}$ считать константами. Будем предполагать по-прежнему, что функционал (2.I) является инвариантом группы $G_{\infty r}$, и, следовательно, группы G_r. В этом случае работают обе теоремы Нетер, то есть имеют место и соотношения дивергенций (3.5), и тождества (3.IO). Соотношения дивергенций (3.5) являются следствиями тождеств (3.IO), так как существование этих тождеств в силу второй обратной теоремы Нетер означает инвариантность функционала I относительно $G_{\infty r}$, а следовательно, и относительно G_r; последнее утверждение приводит к соотношениям дивергенций (3.5). Поэтому соотношения дивергенций (3.5) есть линейные комбинации тождеств (3.IO), при этом и (3.5) и (3.IO) должны быть выписаны для преобразований из группы G_r. Тождества (3.IO) имеют тот же вид, что и соотношения дивергенций (3.5): левые части (3.10) и (3.5) есть линейные комбинации лагранжевых производных L_j, справа стоят дивергенции. Поэтому правая часть (3.5) является линейной комбинацией правых частей тождеств (3.10), то есть

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\mu} B_\mu^{(i)} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\mu}\left(L_j b_{j\mu}^{(i)}\right), \tag{5.1}$$

причем $B_\mu^{(i)}$ вычисляются по формуле (3.6) для преобразований из конечной группы G_r.

Сами сохраняющиеся "токи" $B_\mu^{(i)}$, согласно (5.1), есть линейные комбинации лагранжевых производных плюс величины, дивергенции которых тождественно равны нулю. Такие законы сохранения Э. Нетер назвала несобственными, все остальные – собственными. Если учесть уравнения движения, то несобственные токи оказываются равными дивергенции от некоторого асимметричного тензора. Проиллюстрируем это на примере преобразований (3.8), считая, что $\delta x_\mu = 0$, и $\mathcal{L}$ зависит только от первых производных полевых функций $u_j(x)$.

Обозначим через $J_\mu^{(i)}$ ту часть $B_\mu^{(i)}$, которая не исчезает при переходе от параметров – функций $\varepsilon_i(x)$ к параметрам – числам ε_i. При преобразованиях (3.8)

$$B_\mu^{(i)} \varepsilon_i(x) = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu}}\left[a_j^{(i)}(x,u,\partial u,\ldots)\varepsilon_i(x) + b_{j\nu}^{(i)}(x,u,\partial u,\ldots)\frac{\partial\varepsilon_i(x)}{\partial x_\nu}\right] = \tag{5.2}$$

$$= J_\mu^{(i)}(x)\varepsilon_i(x) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu}} b_{j\nu}^{(i)} \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial x_\nu},$$

где

$$J_\mu^{(i)}(x) = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu}} a_j^{(i)}(x,u,\partial u,\ldots).$$

Подставляя (5.2) в (3.9) и приравнивая нулю коэффициенты при $\varepsilon_i(x)$, $\varepsilon_{i,\nu}(x)$ и $\varepsilon_{i,\nu\mu}(x)$, получаем

$$\mathcal{D}iv\, J^{(i)}(x) = L_j a_j^{(i)},$$

$$J_\mu^{(i)}(x) = L_j b_{j\mu}^{(i)} + \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j,\nu}} b_{j\mu}^{(i)}\right) \tag{5.3}$$

и тождество (3.14), согласно которому величина $(\partial\mathcal{L}/\partial u_{j,\nu}) b_{j\mu}^{(i)}$

есть тензор, асимметричный по индексам μ и ν. Если выполнены уравнения движения, то, согласно (5.3),

$$J^{(i)}_{\mu}(x) = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x_{\nu}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\nu}} b^{(i)}_{j\mu}\right), \tag{5.4}$$

то есть ток $J^{(i)}_{\mu}(x)$ есть дивергенция антисимметричного тензора.

Равенство (5.4) показывает, что в случае несобственных сохраняющихся токов добавление к ним дивергенций от антисимметричных тензоров (такая процедура используется, например, при переходе от канонического тензора энергии-импульса к симметричному тензору энергии-импульса) требует особой осторожности.

§ 6. Слабые и сильные законы сохранения

Помимо деления на собственные и несобственные законы сохранения различают еще слабые и сильные законы сохранения /11,12/. Слабые законы - это обычные законы сохранения, которые выполняются только с учетом уравнений движения. Сильные законы сохранения выполняются тождественно без учета уравнений движения. Фактически эти законы представляют собой такие комбинации тождеств Нетер, которые имеют вид дивергенций. Например, в электродинамике (см. § 10) сильным законом сохранения является тождество

$$\partial_{\mu}(\partial_{\nu} F^{\mu\nu}(x)) = 0,$$

где $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}$.

§ 7. Сингулярные лагранжианы

Если действие системы инвариантно по отношению к бесконечной группе преобразований, то, согласно второй теореме Нетер, уравнений движения оказывается недостаточно для однозначного определения динамических переменных в такой задаче и требуется наложить на эти переменные дополнительные условия. В результате задача сводится к рассмотрению системы со связями. Теория этих систем, построение гамильтонова формализма и квантование рассматривались Дираком /13/ (см. также работы /14,15/).

В механике такие системы описываются сингулярными лагранжианами. По определению, сингулярным называется лагранжиан $L(q,\dot{q})$, для которого справедливо равенство

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L(q,\dot q)}{\partial \dot q_i \, \partial \dot q_j} \right\| \equiv 0 . \tag{7.I}$$

Точка означает здесь дифференцирование по переменной, играющей роль времени. Для полевой теории с лагранжевой плотностью $\mathcal{L}(u,\partial u)$ это условие имеет вид

$$\det \| \Lambda_{ij}(x) \| = 0 , \qquad \Lambda_{ij}(x) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(u,\partial u)}{\partial \dot u_i(x) \, \partial \dot u_j(x)} . \tag{7.2}$$

Ранг матрицы Λ_{ij} должен быть отличен от нуля, так как в противном случае система будет описываться уравнениями не второго порядка по времени, а первого.

Равенства (7.I) и (7.2) приводят к следующим следствиям. Уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D} x_\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,\mu}}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u_i \, \partial u_{j,\mu}} u_{i,\mu} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u_{i,\nu} \, \partial u_{j,\mu}} u_{i,\nu\mu} = 0 \tag{7.3}$$

в этом случае нельзя разрешить относительно вторых производных по времени $\ddot u_j(x)$. Поэтому для системы (7.3) нельзя решить задачу Коши /I6/. Действительно, задав в начальный момент $t = t_0$ данные Коши

$$u_j(t,\vec x)\Big|_{t=t_0} = \varphi_j(\vec x) , \qquad \dot u_j(t,\vec x)\Big|_{t=t_0} = \psi_j(\vec x) ,$$

мы не сможем восстановить все производные функций $u_j(x)$ в этот момент, а именно, не определим при $t = t_0$ значение тех производных, которые содержат два и более дифференцирования по времени. В результате нельзя будет получить $u_j(t,\vec x)$ в последующие моменты времени путем суммирования ряда Тейлора. Следовательно, гиперповерхность $t = t_0$ в этом случае оказывается характеристической /16/.

При переходе к гамильтоновой теории условия (7.I) или (7.2) приводят к тому, что из уравнений

$$\pi_j(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(u, \partial u)}{\partial \dot{u}_j(x)} \qquad (7.4)$$

нельзя определить $\dot{u}_j$ как функции координат и импульсов. Поэтому импульсы $\pi_i(x)$ и координаты $u_j(x)$ нельзя рассматривать как независимые переменные, что необходимо для перехода к гамильтонову формализму. Между $\pi_i(x)$ и $u_j(x)$ имеют место связи

$$\varphi_k(\pi(x), u(x), \partial^\ell u(x)) = 0, \quad k = 1, \ldots, m-r, \qquad (7.5)$$

где $\partial^\ell u(x)$ означает любую частную производную функции $u(x)$, кроме производной по времени, m – общее число полевых функций $u_i(x)$, r – ранг матрицы $\lambda_{ij}(x)$ в формуле (7.2). Связи (7.5) определяются не произвольно, а непосредственно следуют из самого лагранжиана и называются по терминологии Дирака первичными связями.

В гамильтоновом формализме связей (7.5) недостаточно для однозначного определения $u_i(x)$ и $\pi_j(x)$. Это можно пояснить так. В лагранжевом методе, где уравнения движения есть дифференциальные уравнения второго порядка по времени на m функций $u_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, в случае сингулярного лагранжиана требуется $(m-r)$ дополнительных условий для определения $u_j(x)$. В методе Гамильтона число переменных удваивается, поэтому и число дополнительных условий должно быть равно $2(m-r)$. Следовательно, связи (7.5) необходимо дополнить еще $(m-r)$ условиями на $u_j(x)$ и $\pi_i(x)$

$$\psi_i(u, \partial^\ell u, \pi) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m-r. \qquad (7.6)$$

Связи (7.5) и (7.6) будут однозначно определять канонические переменные, если ψ_i подобраны так, что

$$\{\varphi_i, \psi_j\} \neq 0, \quad i,j = 1,2,\ldots, m-r, \tag{7.7}$$

где $\{\ \}$ – скобка Пуассона (см., например,/I4/). В совокупности связи φ_i и ψ_j (которые мы обозначим одной буквой χ_k, $k=1,\ldots,2(m-r)$: $\chi_i = \varphi_i$, $\chi_{m-r+i} = \psi_i$, $i=1,2,\ldots,m-r$) являются связями второго рода по терминологии Дирака, так как их скобка Пуассона (7.7) отлична от нуля. Дирак показал/I3/, что гамильтонов формализм можно обобщить и на системы со связями, если в уравнениях движения (а также и при переходе к квантовой теории) модифицировать скобки Пуассона следующим образом

$$\{A,B\} \to \{A,B\}^* = \{A,B\} - \{A,\chi_i\}\{\chi_i,\chi_j\}^{-1}\{\chi_j,B\},$$
$$i,j = 1,2,\ldots,2(m-r),$$

где $\{\chi_i,\chi_j\}^{-1}$ – матрица, обратная $\{\chi_i,\chi_j\}$. В силу (7.7) такая матрица существует. Скобки $\{\ \}^*$ получили название скобок Дирака. Более подробное изложение теории систем с сингулярными лагранжианами можно найти в/I3-I5/.

ГЛАВА II. ПРИМЕРЫ

В этой части лекций будут кратко рассмотрены следствия из свойств симметрии в некоторых физических системах. Основное внимание будет уделено инвариантности по отношению к бесконечным группам преобразований.

§ 8. Классическая система N материальных точек

Предполагая, что взаимодействие между частицами обусловлено парными центральными силами, лагранжиан системы возьмем в следующем виде

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - \sum_{i<j} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \tag{8.1}$$

Функционал действия

$$S[\vec{r}_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(t) \qquad (8.2)$$

инвариантен относительно 10-параметрической группы преобразований координат $\vec{r}_i$ и времени t (преобразования Ньютона-Галилея). Бесконечно-малые преобразования этой группы имеют вид

а) $t' = t + \delta t$,

б) $\vec{r}_i{}'(t) = \vec{r}_i(t) + \delta\vec{r}$,

в) $\vec{r}_i{}'(t) = \vec{r}_i(t) + [\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i(t)]$,

г) $\vec{r}_i{}'(t) = \vec{r}_i(t) + \delta\vec{v}\cdot t$.

По отношению к собственно преобразованиям Галилея г) действие (8.2) инвариантно только с точностью до дивергенции. Следствием этой симметрии являются, как хорошо известно, 10 интегралов движения в системе N тел : интеграл энергии (преобразование а))

$$E = T + U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} + \sum_{i<j} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = const,$$

сохранение полного импульса системы (преобразования б))

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i(t) = const$$

и сохранение полного углового момента (преобразования в))

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} m_i [\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i] = const.$$

Преобразование Галилея приводит к следующему изменению функции Лагранжа

$$L(\vec{r}_i{}', \dot{\vec{r}}_j{}') = L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_j) + \frac{d}{dt}\Big(\delta\vec{v}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i(t)\Big).$$

Величина C , фигурирующая в формуле (4.1), в данном случае имеет вид

$$\delta\vec{v}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i . \qquad (8.3)$$

С помощью формулы (3.6) и (3.7), в которых к B надо прибавить (8.3), получим

$$\frac{d}{dt}\left(-\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i t + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right) = 0$$

или

$$\vec{R}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i(t)}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i}{M} t + \vec{R}_0 = \frac{\vec{P}}{M} t + \vec{R}_0,$$

где $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – полная масса системы. Таким образом, из галилеевой инвариантности вытекает закон о равномерном и прямолинейном движении центра масс системы N тел.

§ 9. Заряженные частицы, взаимодействующие с электромагнитным полем

Функционал действия в данном случае имеет вид:

$$S = -\sum_{i=1}^{N} m_i \int \sqrt{\dot{z}_i(\tau_i)}\, d\tau_i - \frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e\sum_{i=1}^{N}\int A_\mu(z_i)\, \dot{z}_i^\mu(\tau_i)\, d\tau_i, \tag{9.1}$$

где $z_i^\mu(\tau_i)$ – параметрическое задание траекторий частиц. Это действие инвариантно относительно 10-параметрической неоднородной группы Лоренца, относительно локальных калибровочных преобразований и при замене параметров τ_i , $i = 1,2,\dots,N$ новыми параметрами

$$\tilde{\tau}_i = f_i(\tau_i) \tag{9.2}$$

с N произвольными функциями f_i . Остановимся на следствиях инвариантности S при заменах (9.2). Согласно второй теореме Нетер, уравнения движения частиц

$$L_{z_i^\mu} = m_i \frac{d}{d\tau_i}\left(\frac{\dot{z}_{\mu i}(\tau_i)}{\sqrt{\dot{z}_i^2(\tau_i)}}\right) + e F_{\mu\nu}(z_i)\, \dot{z}_i^\nu(\tau_i) = 0,$$

$$i = 1,2,\dots,N$$

должны удовлетворять N тождествам. Учитывая, что $\delta z_i^\mu(\tau_i) = -\dot{z}_i^\mu(\tau_i)\varepsilon_i(\tau_i)$, получаем с помощью формулы (3.10):

$$L_{z_i^\mu} \dot{z}_i^\mu \equiv 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{9.3}$$

(по i суммирования нет). В справедливости (9.3) легко убедиться непосредственно, учитывая, что $F_{\mu\nu}$ - антисимметричный тензор и производная единичного вектора $\dot{z}_{\mu i}(\tau_i)/\sqrt{\dot{z}_i^2(\tau_i)}$ всегда ортогональна к этому вектору.

Наличие связей (9.3) между уравнениями Эйлера позволяет наложить на переменные $z_i(\tau_i)$ N условий, например, $\dot{z}_i^2 = 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$. В этом случае τ_i есть собственные времена частиц.

Кроме тождеств (9.3) в рассматриваемой модели имеют место следующие тождества, вытекающие из инвариантности (9.1) при преобразованиях (9.2)

$$\mathcal{L}_i(z_i) - \frac{\partial \mathcal{L}_i(z_i)}{\partial \dot{z}_{i\mu}} \dot{z}_{i\mu} \equiv 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{9.4}$$

где $\mathcal{L}_i$ - лагранжева функция i - ой частицы:

$$\mathcal{L}_i(z_i) = -m_i \sqrt{\dot{z}_i^2} - e A_\mu(z_i) \dot{z}_i^\mu .$$

Если отвлечься от конкретного вида лагранжиана в (9.1) и потребовать только инвариантность S относительно преобразований (9.2), то уже одно это условие ограничивает допустимую форму $\mathcal{L}$, а именно, согласно (9.4), лагранжианы $\mathcal{L}_i$ отдельных частиц должны быть в этом случае однородными функциями первой степени по скоростям $\dot{z}_{\mu i}(\tau_i)$.

Канонически сопряженные импульсы частиц определяются формулой

$$p_i^{\mu}(\tau_i) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_{\mu}^{i}(\tau_i)} = m_i \frac{\dot{z}_i^{\mu}(\tau_i)}{\sqrt{\dot{z}_i^2}} + eA^{\mu}(z_i).$$

Отсюда непосредственно следуют связи

$$[p_i^{\mu}(\tau_i) - eA^{\mu}(z_i)]^2 = m_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Таким образом, лагранжиан в (9.I) сингулярен.

§ IO. Электродинамика

Из лагранжиана Максвелла-Дирака

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}[\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - ieA_{\mu})\psi - (\partial_{\mu} + ieA_{\mu})\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi] - - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{IO.I}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$, следуют уравнения движения

$$\begin{aligned} L_{\psi} &= (-i\partial_{\mu} + eA_{\mu})\bar{\psi}\gamma^{\mu} - m\bar{\psi} = 0, \\ L_{\bar{\psi}} &= (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + eA_{\mu}\gamma^{\mu} - m)\psi = 0, \\ L_{A_{\mu}} &= \partial^2 A^2 - \partial^{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu} + e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi = 0. \end{aligned} \tag{IO.2}$$

Действие с лагранжианом (IO.I) инвариантно относительно калибровочных преобразований второго рода

$$\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}(x),$$

$$A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha(x). \tag{IO.3}$$

Вариации формы полевых функций в данном случае имеют вид

$$\bar{\delta}\psi(x)=i\alpha(x)\psi(x),\quad \bar{\delta}\bar{\psi}(x)=-i\alpha(x)\bar{\psi}(x),\quad \bar{\delta}A_\mu(x)=-\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x).$$

Выпишем коэффициенты a и b, входящие в формулу (3.8):

$$a_\psi=i\psi,\quad b_{\psi\mu}=0;\qquad a_{\bar{\psi}}=-i\bar{\psi},\quad b_{\bar{\psi}\mu}=0;$$
$$a_{A_\mu}=0,\quad b_{A_\nu\mu}=-\frac{1}{e}\delta_{\mu\nu}.$$

Согласно (3.10), имеет место следующее тождество Нетер:

$$ie\left(L_\psi\psi(x)-\bar{\psi}(x)L_{\bar{\psi}}\right)+\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x^\nu}\left(L_{A_\nu}\right)\equiv 0. \qquad (10.4)$$

Это означает, что как минимум, одно из уравнений в системе (10.2) является следствием остальных. Поэтому уравнения (10.2) не определяют полностью $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $A_\mu(x)$, и на эти функции можно наложить одно условие, например, условие Лоренца:

$$\partial_\mu A^\mu(x)=0. \qquad (10.5)$$

Однако тождеством (10.4) не исчерпываются все следствия инвариантности электродинамики относительно калибровочных преобразований (10.3). Формулы (3.12)-(3.14) дают более широкий класс тождеств

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,\mu}}\psi\right)_{,\mu}-\left(\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_{,\mu}}\right)_{,\mu}+L_\psi\psi-\bar{\psi}L_{\bar{\psi}}\equiv 0, \qquad (10.6)$$

$$L_{A_\nu}+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\nu,\mu}}\right)_{,\mu}-ie\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,\nu}}\psi-\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_{,\nu}}\right)\equiv 0, \qquad (10.7)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\nu,\mu}}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}}\equiv 0. \qquad (10.8)$$

Последнее тождество (I0.8) тривиально, так как оно означает, что $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Дифференцируя по x_ν (I0.7), с учётом (I0.6) и (I0.8), легко получить (I0.4). Поэтому мы имеем здесь всего лишь одно новое тождество. Следовательно, в системе (I0.2) на самом деле два уравнения являются следствием других, и кроме условия (I0.5) можно наложить еще одно условие, например, кулоновскую калибровку

$$A_0(x) = 0 , \tag{I0.9}$$

чтобы уравнения (I0.2) вместе с условиями (I0.5) и (I0.9) однозначно определяли искомые функции $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ и $A_\mu(x)$.

Инвариантность (I0.I) относительно глобальных калибровочных преобразований $(\alpha(x) = const)$ приводит к сохраняющемуся току

$$j^\mu(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x), \quad \partial_\mu j^\mu(x) = 0.$$

Согласно классификации Нетер, этот ток несобственный, то есть он выражается через лагранжиан выражения и дивергенцию антисимметричного тензора. Это непосредственно следует из (I0.2)

$$j^\mu(x) = -L_{,A_\mu} + \partial^2 A^\mu - \partial^\mu\partial_\nu A^\nu = -L_{A_\mu} - \partial_\nu F^{\mu\nu}.$$

§ II. Векторное нейтральное поле с массой, взаимодействующее с дираковским полем [8]

Лагранжиан в данном случае имеет вид

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{2} A_{\mu,\nu} A^{\mu,\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu^2 +$$
$$+ \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu)\psi - (\partial_\mu + igA_\mu)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right] - m\bar{\psi}\psi \tag{II.I}$$

Действие в этой модели инвариантно с точностью до дивергенции при калибровочных преобразованиях (I0.3) с функцией $\alpha(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$\partial_\mu [\partial^2 + m^2]\, \alpha(x) = 0. \qquad (11.2)$$

В этом случае (10.1) переходит в

$$\mathcal{L} + g^{-1} \partial_\mu \left(A_\nu(x)\, \partial_\mu \partial_\nu \alpha(x) \right).$$

Соотношение дивергенций (3.5) с учетом уравнений движения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(j_\mu(x) - i A_\nu(x)\, \partial_\mu \partial_\nu \alpha(x) \right) = 0,$$

где $j_\mu(x) = -g \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$. При $\alpha(x) = const$ это уравнение переходит в обычный закон сохранения тока $j_\mu(x)$

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0.$$

Получить тождества Нетер по формулам (3.10) и (3.12 - 3.14) здесь нельзя, так как $\alpha(x)$ не произвольно, а удовлетворяет условию (12.2). Уравнения движения, получаемые при варьировании (12.1), полностью определяют поля $A_\mu(x)$ и $\psi(x)$. Дополнительное условие в этой теории $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ можно наложить, исходя из физических соображений, а именно, чтобы исключить из рассмотрения поле спина 0.

§ 12. Хромодинамика

Поле Янга-Миллса, взаимодействующее со спинорным полем, описывается лагранжианом /17/

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \} + g \bar{\psi} \gamma^\mu B_\mu \psi -$$
$$- m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2}\, tr\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \qquad (12.1)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu - ig (B_\mu B_\nu - B_\nu B_\mu),$$

$$B_\mu = \frac{\tau^a}{2} b_\mu^a, \quad F_{\mu\nu} = \frac{\tau^a}{2} f_{\mu\nu}^a,$$

$$\vec{f}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{b}_\nu - \partial_\nu \vec{b}_\mu + g[\vec{b}_\mu \times \vec{b}_\nu].$$

Для простоты рассматривается калибровочная группа $SU(2)$.

Лагранжиан (I2.I) инвариантен относительно глобальных и локальных калибровочных преобразований

$$\psi'(x) = e^{i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\alpha}(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}'(x) = e^{-i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\alpha}(x)} \bar{\psi}(x),$$

$$F'_{\mu\nu}(x) = e^{i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\alpha}(x)} F_{\mu\nu}(x) e^{-i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\alpha}(x)}.$$

При инфинитезимальных преобразованиях

$$\vec{b}'_\mu(x) = \vec{b}_\mu(x) + [\vec{b}_\mu(x) \times \vec{\alpha}(x)] + g^{-1}\partial_\mu \vec{\alpha}(x),$$

$$\vec{f}'_{\mu\nu}(x) = \vec{f}_{\mu\nu}(x) + [\vec{f}_{\mu\nu}(x) \times \vec{\alpha}(x)].$$

Таким образом, при глобальных изотопических преобразованиях, когда $\vec{\alpha}(x) = const$, $\vec{b}_\mu(x)$ преобразуется как вектор, но при локальных преобразованиях появляется дополнительный член $g^{-1}\partial_\mu \vec{\alpha}(x)$. Тензор $\vec{f}_{\mu\nu}(x)$ всегда преобразуется как изовектор.

Уравнения движения имеют вид

$$L_{\vec{b}^\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \vec{f}_{\mu\nu} + g[\vec{b}^\mu \times \vec{f}_{\mu\nu}] + g\bar{\psi}\gamma_\nu \frac{\vec{\tau}}{2}\psi = 0,$$

$$L_{\bar{\psi}} = (i\gamma^\mu \partial_\mu + g\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{b}_\mu \gamma^\mu - m)\psi = 0. \qquad \text{(I2.2)}$$

Если $\vec{\alpha}(x) = const$, то по первой теореме Нетер имеем следующий сохраняющийся изоспиновый ток

$$\vec{j}_\mu(x) = -g\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\vec{\tau}}{2}\psi - g[\vec{f}_{\mu\nu}\times\vec{b}^\nu]. \tag{12.3}$$

Калибровочное поле $\vec{b}_\mu(x)$ само несет изотопический заряд и дает вклад в суммарный изоспиновый ток (второе слагаемое в формуле (12.3)). Отметим, что величина $g[\vec{f}_{\mu\nu}\times\vec{b}^\nu]$, и, следовательно, и сама плотность изоспинового тока (12.3) не являются изотопическими векторами при локальных калибровочных преобразованиях. Тем не менее, полный изоспин системы

$$\vec{T} = \int\limits_{R_3}\vec{j}_0(x)d^3x$$

есть изовектор по отношению к локальным калибровочным преобразованиям, которые на пространственной бесконечности переходят в постоянные, не зависящие от координат изотопические преобразования: $\vec{\alpha}(x)\xrightarrow[|\vec{x}|\to\infty]{}const$. Действительно, используя уравнения движения (12.2) и учитывая, что $\vec{f}_{00} = 0$, получаем

$$\vec{T} = \int\limits_{R_3}\vec{j}_0(x)\,d^3x = \int\frac{\partial\vec{f}_{\nu0}}{\partial x_\nu}\,d^3x = -\int d^3x\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\vec{f}_{i0}}{\partial x^i}.$$

Этот интеграл по теореме Гаусса может быть сведен к интегралу от $\vec{f}_{i0}$ по поверхности, содержащей трехмерную область R_3. Если на этой поверхности $\vec{\alpha}(x) = const$, то $\vec{T}$ – вектор по отношению к преобразованиям $exp\{i\vec{\tau}\vec{\alpha}(x)/2\}$.

Ток $\vec{j}_\mu(x)$ несобственный, потому что рассматриваемая теория инвариантна при глобальных и локальных калибровочных преобразованиях, поэтому $\vec{j}_\mu(x)$ является дивергенцией антисимметричного тензора $\vec{f}_{\nu\mu}(x)$.

По формуле (3.10) получаем три тождества Нетер

$$\nabla_\mu L_{b^c_\mu} - i\frac{g}{2}(L_\psi\tau^c\psi - \bar{\psi}\tau^c L_{\bar{\psi}}) \equiv 0, \quad c = 1,2,3, \tag{12.5}$$

где ∇_μ означает ковариантную производную

$$\nabla_\mu L_{b^c_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} L_{b^c_\mu} - g L_{b^a_\mu} b^b_\mu \varepsilon^{abc}.$$

Поэтому уравнения Эйлера (12.2) можно дополнить условием калибровки, например можно потребовать

$$\partial^\mu \vec{b}_\mu(x) = 0.$$

Тождества (12.5) имеют тот же вид, что и аналогичные тождества в электродинамике (формула (10.4)). Отличие состоит только в том, что обычная производная теперь заменена на ковариантную.

Отметим следующие общие черты в рассматриваемой модели и в теории тяготения Эйнштейна (см. § 13).

Плотность изотопического тока (12.3) состоит из двух частей: первое слагаемое обусловлено "материальными" полями (полями с $m \neq 0$) и представляет собой изотопический вектор, второе слагаемое, как уже отмечалось выше, описывает изотопический спин поля Янга-Миллса.

Суммарный тензор энергии-импульса в общей теории относительности $\Theta_{\mu\nu}$ состоит также из двух частей:

$$\Theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu},$$

где $T_{\mu\nu}$ - тензор энергии-импульса полей материи (всех полей, кроме гравитационного), $t_{\mu\nu}$ - псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля. При общековариантных преобразованиях координат (13.2) $T_{\mu\nu}(x)$ преобразуется как тензор, $t_{\mu\nu}(x)$ - как псевдотензор. По аналогии добавку в изотопический ток $g[\vec{f}_{\mu\nu} \times \vec{b}^\nu]$ можно было бы назвать псевдотоком.

§ 13. Теория тяготения

Теория гравитации Эйнштейна представляет собой полевую теорию симметричного метрического тензора $g_{\mu\nu}(x)$, определяемую действием

$$S = -\varkappa^{-1} \int R\sqrt{-g}\, d^4x + \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g}\, d^4x, \qquad (13.1)$$

где R – скалярная кривизна , $\mathcal{L}_m$ – лагранжева плотность всех полей $u_j(x)$ кроме гравитационного. Действие S является инвариантом при произвольных преобразованиях координат

$$x'^{\mu} = f^{\mu}(x), \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{13.2}$$

поэтому, согласно второй теореме Нетер, уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \varkappa T_{\mu\nu} \tag{13.3}$$

должны удовлетворять 4 тождествам.

Получим эти тождества в явном виде для случая, когда есть только одно гравитационное поле

$$S_g = \int \mathcal{L}_g \sqrt{-g}\, d^4x. \tag{13.4}$$

Не будем предполагать, что $\mathcal{L}_g$ обязательно равно $-\varkappa^{-1}R$. Нам будет достаточно того, что S_g есть инвариант при общековариантных преобразованиях (13.2). Например, $\mathcal{L}_g$ может быть квадратична по компонентам тензора Римана:

$$\mathcal{L}_g = aR^2 + b R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}.$$

Вариацию δS_g, согласно (3.1), можно представить в следующем виде:

$$\delta S_g = \int G_{\mu\nu} \bar{\delta} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x + \int \mathcal{D}iv\, B\, d^4x, \tag{13.5}$$

где $G_{\mu\nu}$ – симметричный тензор. Для теории Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R.$$

Заметим, что мы не предполагаем, что уравнения движения выполнены и $G_{\mu\nu} = 0$. При бесконечно малых преобразованиях (13.2)

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x)$$

вариация формы метрического тензора $\bar{\delta} g^{\mu\nu}(x)$ определяется формулой [18]

$$\bar{\delta} g^{\mu\nu}(x) = \varepsilon^{\mu;\nu}(x) + \varepsilon^{\nu;\mu}(x),$$

где точка с запятой означает ковариантное дифференцирование. Опять выберем $\varepsilon^{\mu}(x)$ так, чтобы эти функции вместе со своими производными, входящие в B в формуле (I3.5), исчезли на границе области интегрирования. В результате получаем

$$\delta S_g = 2\int G_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu;\nu}\sqrt{-g}\,d^4x = 2\int G_{\mu}^{\nu}\left(\frac{\partial\varepsilon^{\mu}(x)}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}\varepsilon^{\sigma}(x)\right)\sqrt{-g}\,d^4x =$$
$$= 2\int\left(-\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial(\sqrt{-g}\,G_{\mu}^{\nu})}{\partial x^{\nu}} + G_{\sigma}^{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\right)\varepsilon^{\mu}(x)\sqrt{-g}\,d^4x. \tag{I3.6}$$

Так как функции $\varepsilon^{\mu}(x)$ внутри области интегрирования произвольны, то из (I3.6) следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}\,G_{\mu}^{\nu}\right) - G_{\sigma}^{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = G_{\mu;\nu}^{\nu} \equiv 0, \qquad \mu = 0,1,2,3. \tag{I3.7}$$

В том случае, когда $\mathcal{L}_g = -\varkappa^{-1}R$, тождества (I3.7) есть просто следствие тождества Бианки для тензора кривизны Римана-Кристоффеля [18].

Тождества (I3.7) представляют собой полученные ранее в общем виде тождества (3.I0), записанные теперь для гравитационного поля. Как и в случае электродинамики, для уравнений Эйнштейна можно получить более широкий класс тождеств, соответствующих формулам (3.I2)-(3.I4). Мы не будем останавливаться на этом, отсылая к работе Клейна [5].

Таким образом, уравнения движения в общей теории относительности можно дополнить как минимум 4 условиями. Например, можно выбрать такую координатную систему, для которой выполняется условие гармоничности [19].

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}_{(x)}\right) = 0. \qquad (13.8)$$

Если выполнены уравнения движения (13.3), то в силу тождеств (13.7) тензор энергии-импульса материи $T_\mu^{\ \nu}$ должен удовлетворять уравнениям

$$T_{\mu\,;\nu}^{\ \nu}(x) = 0. \qquad (13.9)$$

Так как здесь стоит ковариантная производная, то из этих равенств не следует никаких законов сохранения. В этом заключается одна из основных трудностей теории Эйнштейна. Закон сохранения энергии-импульса вводится следующим образом. Подбирается такая величина $t_\mu^{\ \nu}$, зависящая только от $g_{\mu\nu}$ и от производных $\partial_\rho g_{\cdot\rho}$, чтобы имело место уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(T_\mu^{\ \nu} + t_\mu^{\ \nu}\right) = 0.$$

По внешнему виду это уравнение нековариантное, тем не менее его можно сделать ковариантным, если в качестве $t_\mu^{\ \nu}$ взять нетензорную величину. Введенный таким образом комплекс $t_\mu^{\ \nu}$ интерпретируется как псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля.

Здесь возникают следующие трудности. Во-первых, процедура введения $t_\mu^{\ \nu}$ существенно неоднозначна. Во-вторых из-за псевдотензорного характера $t_\mu^{\ \nu}$ всегда можно выбрать такую координатную систему, в которой все компоненты $t_\mu^{\ \nu}$ в данной точке пространства обращаются в ноль /20/.

Следует подчеркнуть прямую связь между общей ковариантностью теории Эйнштейна и трудностями с законом сохранения энергии-импульса в этой теории.

Широкое использование второй теоремы Нетер в теории поля Янга-Миллса и в теории гравитации можно найти в работах /21/.

§ 14. Релятивистская струна

Релятивистская струна представляет собой одномерно-протяженный объект, действие которого пропорционально площади мировой поверхности, покрываемой им при движении в пространстве Минковского /22-24/. Если $x_\mu(\sigma,\tau)$ - параметрическое задание этой поверхности, то действие струны имеет вид:

$$S = -\gamma \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{l} d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}\,, \tag{14.1}$$

где $\dot{x} = \partial x/\partial\tau$, $x' = \partial x/\partial\sigma$. Параметр σ нумерует точки струны, а τ играет роль параметра эволюции.

Релятивистскую струну можно рассматривать как систему 4 полей $x_\mu(\sigma,\tau)$, заданных в двумерном пространстве σ , τ . Действие (14.1) инвариантно при общековариантных преобразованиях координат $\xi_1 = \tau$ и $\xi_2 = \sigma$:

$$\xi'_i = f_i(\xi), \quad i = 1,2. \tag{14.2}$$

Эти преобразования определяются двумя произвольными функциями, поэтому, согласно второй теореме Нетер, левые части уравнений движения в данной задаче должны удовлетворять двум тождествам. Функции $x_\mu(\sigma,\tau)$ по отношению к преобразованиям (14.2) являются скалярами

$$x'_\mu(\sigma',\tau') = x_\mu(\sigma,\tau),$$

следовательно:

$$\delta x_\mu(\xi) = 0, \quad \bar{\delta} x_\mu(\xi) = -x_{\mu,i}\,\varepsilon_i(\xi),$$

где $\varepsilon_i(\xi)$ - бесконечномалые преобразования параметров ξ_i :

$$\xi'_i = \xi_i + \varepsilon_i(\xi).$$

Вариация δS , равная нулю, имеет вид

$$\delta S = \int d^2\xi\, [\bar{\delta}\mathcal{L} + \mathcal{D}_i(\mathcal{L}\varepsilon_i)] = 0, \tag{14.3}$$

где $\bar{\delta}\mathcal{L}$ – вариация формы лагранжиана

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu}\bar{\delta}x_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\mu,i}}\bar{\delta}x_{\mu,i}\,.$$

Обозначая левые части уравнений Эйлера через L_μ

$$L_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\xi_i}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu_{,i}}\right),$$

формулу (I4.3) преобразуем следующим образом:

$$\delta S = \int d^2\xi \left\{\left[\left(\mathcal{L}\delta_{ij} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\mu,i}}\bar{\delta}x_{\mu,j}\right)\varepsilon_j\right]_{,i} - L^\mu x_{\mu,j}\,\varepsilon_j\right\} = 0 \qquad (I4.4)$$

Вначале рассмотрим такие вариации $\varepsilon_j(\xi)$ независимых переменных ξ_j, которые исчезают на границе области интегрирования. Тогда очевидно, что слагаемое в квадратных скобках в формуле (I4.4) не дает вклада в δS, и как следствие этого, получаем два тождества

$$L_\mu \dot{x}^\mu \equiv 0, \quad L_\mu x'^\mu \equiv 0. \qquad (I4.5)$$

Фактически эти равенства являются обобщением тех тождеств, которые имеют место в релятивистской механике точечных частиц (см. формулу (9.3)).

Учитывая тождества (I4.5), уравнения Эйлера в данной теории можно дополнить двумя условиями на $x_\mu(\sigma,\tau)$. Обычно выбирается изотермическая система координат на мировой поверхности струны /25/, в которой

$$(\dot{x} \pm x')^2 = 0.$$

В этом случае уравнения движения сводятся к уравнению Даламбера на $x_\mu(\sigma,\tau)$:

$$\ddot{x}_\mu - x''_\mu = 0.$$

В круглых скобках в подынтегральном выражении в (I4.4) стоит двумерный тензор энергии-импульса по отношению к сдвигам в пространстве ξ_i :

$$t_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}{}_{,i}} x^{\mu}{}_{,j} - \delta_{ij} \mathcal{L}.$$

Возьмем в качестве параметров-функций $\varepsilon_i(\xi)$ в формуле (I4.4) вначале константы, а затем функции, линейные по ξ_i, и учтем тождества (I4.5). В результате получаем новые тождества

$$t_{ij} \equiv 0, \quad i,j = 1,2. \qquad (I4.6)$$

Эта процедура эквивалентна приравниванию нулю в формуле (I4.4) коэффициентов при $\varepsilon_i(\xi)$ и при производных $\varepsilon_{i,j}(\xi)$. Запишем тождества (I4.6) в явном виде

$$\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\mu}} \dot{x}_{\mu} \equiv 0, \qquad \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_{\mu}} x'_{\mu} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\mu}} x'_{\mu} \equiv 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_{\mu}} \dot{x}_{\mu} \equiv 0.$$

Первое равенство означает, что гамильтониан, построенный по каноническим правилам, в данном случае равен нулю. Третье тождество представляет собой связь между каноническими переменными x_{μ} и $\pi_{\mu} = -\partial \mathcal{L}/\partial \dot{x}^{\mu}$: $x'_{\mu} \pi^{\mu} \equiv 0$. Таким образом, лагранжиан релятивистской струны является сингулярным.

Равенство нулю параметрического тензора энергии-импульса в теории струны, конечно, не означает отсутствия для струны понятия энергии и импульса. Так как здесь имеет место инвариантность по отношению к неоднородным преобразованиям Лоренца

$$x'_{\mu}(\sigma,\tau) = \lambda_{\mu\nu} x^{\nu}(\sigma,\tau) + a_{\mu},$$

то обычный тензор энергии-импульса может быть построен точно также, как и для точечной релятивистской частицы, и он отличен от нуля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для того, чтобы могли работать теоремы Нетер, необходимо установить симметрию в рассматриваемой задаче. Выявление симметрии, то есть группы преобразований координат и полевых функций, по отношению к которым действие инвариантно, в отдельных случаях может оказаться не менее легким делом, чем нахождение самих законов сохранения. Этому немало примеров.

Давно известен дополнительный интеграл в задаче Кеплера с потенциалом α/r (знак α любой) - так называемый вектор Рунге--Ленца-Лапласа[26]

$$\vec{R} = [\dot{\vec{r}} \times \vec{M}] + \alpha \frac{\vec{r}}{r} = const.$$

Только имея этот интеграл в явном виде, удалось установить, что здесь имеет место группа симметрии, изоморфная группе вращений в четырехмерном евклидовом пространстве $O(4)$ [27].

Другим примером могут служить бесконечные серии законов сохранения в нелинейных уравнениях (уравнение Синус-Гордона, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Кортевега - де Вриза), которые были найдены методом обратной задачи рассеяния или же с помощью преобразований Бэклунда[28-30]. Лишь потом была выяснена связь этих законов с симметрией соответствующих нелинейных уравнений. Так, например, для уравнения Синус-Гордона было показано, что бесконечная серия законов сохранения есть следствие инвариантности этого уравнения относительно бесконечного числа однопараметрических групп преобразований[31].

Эти замечания не снижают роль теорем Нетер в теории поля, так как при построении новых полевых моделей в теорию обычно заранее вкладывают ту или иную симметрию. Например, модель Вайнберга-Салама строилась на симметрии $SU(2) \times U(1)$.

Литература

I. И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. Вариационное исчисление. Физматгиз, М., I96I.

2. E.L.Hill. Rev.Mod.Phys. 23, 353 (1951).

3. E.Noether. Gottinger Nachrichten. Math.Phys. Kl., H. 2,235 (I9I8) (имеется перевод в /4/); Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М., "Наука", I976.

4. Вариационные принципы механики (сборник статей). Физматгиз, М., I959.

5. F.Klein. Göttinger Nachrichten, Math.Phys. Kl., H.2, 171 (1918).

6. И.В. Полубаринов. ТМФ, I, 34 (I969).

7. E.Bessel-Hagen. Math.Ann., 84, H3/4, 258 (I92I).

8. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. ЖЭТФ, 4I, вып. I(7),247 (I96I).

9. Н.Х. Ибрагимов. ТМФ, I, 350 (I969).

I0. Л.В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений. "Наука", М., I978.

II. А. Траутман. Эйнштейновский сборник, стр. 308, "Наука", М., I967.

I2. J.N.Goldberg. Phys.Rev. 89, 263 (1953).

I3. П. Дирак. Лекции по квантовой механике. "Мир", I968.

I4. Л.Д. Фаддеев. ТМФ, I, 3 (I969).

I5. A.J.Hanson, Regge T., C.Teitelboim. Constrained Hamiltonian Systems. Princeton Preprint, 1974.

I6. И.Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. Физматгиз, М., I96I.

I7. В.И. Смирнов. Курс высшей математики, том 4, Гостехиздат, М., I957.

I8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. "Наука", М., I957.

I9. В.А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. Физматгиз, М., I96I.

20. Н.В. Мицкевич. Физические поля в общей теории относительности. "Наука", М., I969.

2I. V.I.Ogievetsky, I.V.Polubarinov. Nuol.Phys., 76, 677 (1966). V.I.Ogievetsky, I.V.Polubarinov. Ann.of Phys., 35,167 (1965).

22. C.Rebbi. Physics Reports, v.12C, N 1, 1974.
23. J.Scherk. Rev.Mod.Phys. 47, 123, 1975.
24. Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко. Физика элементарных частиц и атомного ядра. т. 9, вып. 5, 709, 1978.
25. Р. Оссерман. УМН, 22, вып. 4 55 (1967).
26. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика. "Наука", 1965.
P.S.Laplace. Celestial Mechanics, v.1, p.344, Chelsea Publ.Co., B.Y., 1966.
27. V.Fock, Z.Phys. 98, 145 (1935).
28. A.C.Scott, F.Y.Chu, McLaughlin. Proceedings of the IEEE, 61, 1443 (1973).
29. Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. "Мир", М., 1977.
30. Нелинейные волны. Под редакцией С. Лейбовича и А. Сибасса. "Мир", М., 1977.
31. S.Kumei. Journ.Math.Phys., 16, 2461 (1975); 18, 256 (1977).
Б.Г. Конопельченко. ЯФ, 26, вып.3(9),658 (1977).

СОДЕРЖАНИЕ

Рукопись поступила в издательский отдел
I7 ноября I978 г.