ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМ. Н. Н. БОГОЛЮБОВА

на правах рукописи

ПИРОЖЕНКО Ирина Георгиевна

Методы спектральной геометрии в задачах теории эффекта Казимира

Специальность 1.3.3 - „Теоретическая физика"

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Дубна – 2025

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Научный консультант:
ведущий научный сотрудник Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, хабилитированный доктор наук (Dr. rer. nat. habil.) Михаэль Бордаг.

С электронной версией диссертации можно ознакомиться на официальном сайте Объединенного института ядерных исследований в информационно-телекоммуникационной сети “Интернет” по адресу: https://dissertations.jinr.ru/. Там же будет указана дата защиты.

С печатной версией диссертации можно ознакомиться в Научно-технической библиотеке Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна Московской области, ул. Жолио-Кюри, д.6)

Технический секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук Юрий Михайлович Быстрицкий

Общая характеристика работы

Энергией Казимира называют свободную от расходимостей часть вакуумной энергии квантованного поля, которая зависит от расстояния между границами. А эффектом Казимира – возникновение вследствие этой зависимости силы Казимира [1]. Под обобщенным эффектом Казимира понимают зависимость энергии вакуума не только от положения границ, их свойств и геометрии, но и классического гравитационного или другого фона [2], как при нулевой, так и при конечной температуре.

В задачах квантовой теории поля во внешних условиях используется представление свободной и вакуумной энергии через континуальный интеграл. Для не зависящих от времени границ и стационарного фона вакуумная энергия выражается соотношением,

$$E_0 = \frac{i}{\mathcal{T}} \ln Z, \quad Z = \int [\mathcal{D}\phi] \exp(iS[\phi]/\hbar), \tag{1}$$

где $\mathcal{T} = \int dt$ - это полное время, $S[\phi]$ - действие, квадратичное по квантовым флуктуациям динамического поля ϕ на классическом фоне, включающим и граничные условия,

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^D x \, \phi \, \mathcal{K} \, \phi.$$

Динамика в теории задается дифференциальным оператором $\mathcal{K}$, интегрирование идет по всему D-мерному пространству.

С континуальным интегралом от евклидова действия S_E связана свободная энергия Гельмгольца $\mathcal{F}$ квантовополевой системы,

$$e^{-\beta\mathcal{F}} = Z_E = \int [\mathcal{D}\phi] \exp(-S_E[\phi]/\hbar), \tag{2}$$

где интегрирование выполняется по полям ϕ, периодическим по мнимому времени, с периодом пропорциональным обратной температуре, $\beta = 1/(k_B T)$. Вакуумная энергия получается из (2) предельным переходом,

$$E_0 = -\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \ln Z_E. \tag{3}$$

В квантовой теории поля во внешних условиях широко применяются методы спектральной геометрии [3], которые предлагают наиболее универсальный и естественный язык описания ультрафиолетовых расходимостей КТП. К методам спектральной геометрии относят метод дзета-функции [4] и связанный с ним метод собственного времени [5, 6] или теплового ядра [7].

Теория спектральных функций лучше всего разработана для дифференциальных операторов вида обобщенного оператора Лапласа [8]. Именно с такими операторами мы будем иметь дело в диссертации. Определим спектральные функции, о которых пойдет в речь, и продемонстрируем их связь со свободной и вакуумной энергией.

Спектральную дзета-функцию дифференциального оператора второго порядка L с положительными действительными собственными функциями $\phi_j(x)$ и собственными значениями λ_j определим как след оператора L^{-s},

$$\zeta_L(s) \equiv \mathrm{Tr} L^{-s} = \int dx \sum_j \lambda_i^{-s} \phi_j(x) \phi_j(x) = \sum_j \lambda_j^{-s}. \tag{4}$$

Вторая спектральная функция, рассматриваемая в диссертации - это след ядра уравнения теплопроводности, $K(\tau|L) = \mathrm{Tr} e^{-\tau L}$. При малых значениях параметра τ для $K(\tau|L)$ существует асимптотическое разложение,

$$K(\tau|L) = \sum_n e^{-\tau \lambda_n} \underset{\tau \to 0}{\sim} (4\pi\tau)^{-D/2} \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n B_n + \mathrm{ES}, \tag{5}$$

где D - это размерность многообразия, а ES обозначает экспоненциально малые поправки при $\tau \to +0$. Коэффициенты B_n, называются коэффициентами Сили-Швингера-ДеВитта (Sieley-Schwinger-DeWitt) или просто коэффициентами теплового ядра [7]. Они определяются полюсами спектральной дзета-функции,

$$\frac{B_n}{(4\pi)^{D/2}} = \lim_{s \to D/2-n} (s + n - D/2)\, \zeta_L(s) \Gamma(s), \quad n = 0,\, 1/2,\, 1,\, \ldots . \tag{6}$$

Полуцелые степени τ и соответствующие коэффициенты с полуцелым номером появляются в разложении (5), когда рассматривается многообразие с границей.

Спектральную ζ-функцию удобно использовать для регуляризации определителя эллиптического дифференциального оператора L [3],

$$(\ln\det L)_s = -\mu^{2s}\Gamma(s)\zeta_L(s). \tag{7}$$

Масштабный фактор μ описывает конечный произвол при перенормировке, который фиксируется из физических соображений. Раскладывая (7) в ряд вблизи $s=0$, получаем

$$(\ln\det L)_s = -\left(\frac{1}{s} - \gamma_E + \ln\mu^2\right)\zeta_L(0) - \zeta_L'(0) + \mathcal{O}(s). \tag{8}$$

Отождествим $\ln\det L$ с конечной частью выражения (8) (формула Рея-Зингера),

$$(\ln\det L)_s = -\zeta_L'(0). \tag{9}$$

Полюсной член и конечный произвол оказываются пропорциональными значению спектральной дзета-функции в $s=0$, которое в D-мерном пространстве совпадает с коэффициентом теплового ядра $B_{D/2}$, $\zeta_L(0) = B_{D/2}$.

Пусть динамика поля задается оператором $\mathcal{K}$,

$$\mathcal{K} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \tag{10}$$

где Δ – эллиптический оператор, зависящий только от пространственных координат, с собственными значениями ω_k^2/c^2. Индекс k нумерует как дискретные, так и непрерывные собственные значения.

Свободную энергию (3) и вакуумную энергию (1) выразим через производную дзета-функции евклидова оператора $\mathcal{K}_E$, который получается из $\mathcal{K}$ виковым поворотом, $t \to -i\tau$,

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2\beta}\mathrm{Tr}\,\ln\mathcal{K}_E = -\frac{k_BT}{2}\,\zeta_{\mathcal{K}_E}'(0), \quad E_0 = -\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{2\beta}\,\zeta_{\mathcal{K}_E}'(0). \tag{11}$$

Вакуумную энергию можно определить и через ζ-функцию оператора низшей размерности. Действительно, вакуумная энергия квантовополевой системы в $D=3+1$ равна расходящейся сумме энергий нулевых колебаний,

$$E_0=\int d^3x\langle 0|T_{00}|0\rangle=\frac{\hbar}{2}\sum_k\omega_k. \tag{12}$$

Определения (1) и (12) дают одинаковый результат для изменения вакуумной энергии, обусловленного изменением внешних условий, например, для разности вакуумных энергий, соответствующих разным положениям границ, или разным значениям внешнего поля.

Вакуумную энергию (12) также можно регуляризовать, используя спектральную дзета-функцию оператора $-\Delta$,

$$E_0(s)=\frac{\hbar}{2}\mu^{2s}\,\zeta\left(s-\frac{1}{2}\right),\quad \zeta(s)=\sum_{\{k\}}\omega_k^{-2s}. \tag{13}$$

Параметр μ в (13) имеет размерность массы и введен, чтобы сохранить размерность регуляризованной энергии. Раскладывая (13) в $s=0$ и используя связь дзета-функции с тепловым ядром, полагаем,

$$E_0\equiv\frac{\hbar}{2}\,\zeta\left(-\frac{1}{2}\right). \tag{14}$$

Перенормировка вакуумной энергии методом дзета-функции состоит в вычитании расходящейся части E_0^{div}, которая в $D=3+1$ для безмассового поля пропорциональна коэффициенту теплового ядра B_2, оператора $-\Delta$,

$$E_0^{div}=-\frac{B_2}{32\pi^2}\frac{\hbar}{s}. \tag{15}$$

Конечный произвол в вычислении вакуумной энергии также пропорционален коэффициенту B_2 и связан с конформной аномалией [9].

Зная дзета функцию $\zeta(s)$ пространственной части оператора (10), можно получить высокотемпературные асимптотики термодинамических функций, например, свободной энергии $\mathcal{F}$.

Развитие функциональных методов и адаптация подхода теории рассеяния к задачам вычислении вакуумной энергии привели к тому, что в начале 2000-х гг. стало возможным по крайней мере численное исследование силы Казимира между телами произвольной формы [10]. Для граничных условий, заданных на несвязных поверхностях раздельных материальных тел, которые моделируются потенциалами, определенными в неперекрывающихся областях (с неперекрывающимися носителями) или пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости [9], удалось показать, что часть вакуумной энергии, которая зависит от расстояния между телами (поверхностями), свободна от расходимостей. Также была сформулирована общая теорема о знаке силы Казимира между телами произвольной формы, которые являются зеркальным отражением друг друга [11] ("противоположности притягиваются").

Представление вакуумной энергии через континуальный интеграл дает возможность задать граничные условия на гладких поверхностях произвольной геометрии с помощью функциональных дельта-функций [12]. Для статических граничных поверхностей бесконечный вклад в функциональный интеграл от пустого пространства, не зависящий от геометрии границ выделяется в виде бесконечного множителя [2], который можно опустить, так как он не влияет на физические эффекты. Метод учета граничных условий в функциональном интеграле для задач теории эффекта Казимира был предложен в статье [12] и использован для вычисления электромагнитной силы Казимира между плоскими параллельными поверхностями.

Классическим примером вычисления свободной энергии электромагнитного поля между двумя плоскими параллельными пластинами с учетом их материальных свойств является формула Лифшица [13], в которую материальные свойства пластин входят через их коэффициенты отражения. С точки зрения экспериментов и приложений важна теоретическая оценка силы Казимира не только между параллельными пластинами [14, 2].

Благодаря применению функциональных методов совместно с подходом теории рассеяния, удалось получить аналоги формулы Лифшица для скалярного и электромагнитного полей с граничными условиями на непересекающихся (компактных) поверхностях произвольной формы. Для вакуумной энергии взаимодействия тел A и B с не зависящими от времени границами было найдено так называемое TGTG-представление [15],

$$E_0 = \frac{\hbar c}{2\pi} \int_0^\infty d\xi \, \mathrm{Tr} \, \ln(1 - \mathcal{M}), \quad \mathcal{M} = \mathcal{T}_A \, \mathcal{G}_\xi \, \mathcal{T}_B \, \mathcal{G}_\xi. \tag{16}$$

Здесь ядро $\mathcal{M}$ - это свертка ядер T-операторов рассеяния на телах A и B со свободными функциями Грина, $\mathcal{G}_\xi$ – Фурье-образ по времени свободной функции Грина. В этой формуле уже вычислен след по временной переменной, от него осталось интегрирование по мнимой частоте $\xi = -i\omega$.

Нахождение T-операторов представляет собой отдельную задачу. Они известны, например, для сферы [16], цилиндра [17], гофрированных поверхностей [18, 19] с некоторыми граничными условиями. Более сложная форма взаимодействующих тел или учет их материальных свойств усложняет вычисления и часто требует численного анализа.

Актуальность работы.

За последние десятилетия эффект Казимира из теоретического предсказания превратился в надежно проверенное экспериментом проявление вакуумной энергии КЭД. Для экспериментов и возможного применения эффекта Казимира в нанотехнологиях актуально развитие его теории в таких направлениях, как учет геометрии границ и учет свойств материалов.

Эффект Казимира играет важную роль в экспериментальном поиске поправок к ньютоновскому закону тяготения (или ограничений на их параметры) [20], которые предсказываются, например, в моделях теории поля с дополнительными измерениями [21]. Ограничения на степенные и юкавкские поправки к закону тяготения получаются в экспериментах с крутильными весами [22], в которых при расстояниях между пробными телами менее 0,1 мм сила Казимира становятся фоновой силой, доминирующей над гравитацией. Отличие данных измерений от теоретически предсказанного значения силы Казимира может свидетельствовать о поправках к ньютоновскому закону тяготения, что позволяет получить достаточно строгие ограничения на их параметры.

С развитием технологий оказалось, что дисперсионные силы, к которым относится и сила Казимира, играют определяющую роль на микро (нано)- масштабах. С одной стороны, сила Казимира может препятствовать работе микро(нано) - механических машин, приводя к слипанию их подвижных частей, с другой стороны, вследствие нелинейной зависимости силы Казимира от расстояния между телами, эта сила может использоваться в сенсорах и активаторах [23]. Крутильный момент, обусловленный вакуумными флуктуациями, также представляет потенциальный практический интерес. Над полезным применением эффекта Казимира работают многие экспериментальные группы [24]. Отметим также большой интерес к изучению силы Казимира между новыми материалами, такими как графен, жидкие кристаллы, топологические диэлектрики, метаматериалы.

Цели и задачи исследования

- развитие методов спектральной геометрии, используемых в теории эффекта Казимира, в частности, для вычисления вакуумной энергии скалярного и электромагнитного полей при нулевой и конечной температуре с разными граничными условиями;

- развитие функциональных методов теории эффекта Казимира и адаптация подхода теории рассеяния для полей с граничными условиями, заданными на поверхностях неперекрывающихся тел, материал которых описывается в рамках макроскопической электродинамики сплошных сред, либо моделируются потенциалами, заданными в неперекрывающихся областях, либо взаимодействием с другими полями, ограниченными внутри рассматриваемых областей.

В диссертации были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. построено разложение теплового ядра оператора Лапласа для фона, свойства которого меняются скачком на произвольной гладкой границе, найдены коэффициенты теплового ядра и функциональный определитель для электромагнитного поля на фоне диэлектрического цилиндра;

2. исследован вклад особенностей (изломов) границы в коэффициенты теплового ядра;

3. исследовано влияние граничных условий на вакуумную энергию электромагнитного поля в пространстве с конической сингулярностью, окруженной цилиндрической оболочкой;

4. исследовано совместное влияние геометрии границ, материальных свойств и температуры на силу Казимира между сферой и плоскостью, получено ограничение на казимировское отталкивание между сферой и плоскостью;

5. исследована энергия Казимира на сингулярном фоне решеток δ-потенциалов и скрещенных космических струн;

6. вычислена энергия Казимира в случае, когда поля материи рассматриваются в (3+1)-мерных полупространствах с границей.

Научная новизна

Научные результаты, представленные в диссертации, являются оригинальными и были получены впервые.

Впервые вычислены коэффициенты теплового ядра электромагнитного поля на фоне диэлектрического цилиндра [A3] и вакуумная энергия в присутствии бесконечного цилиндра, на границе которого выполняются условия изорефракции [A1,A2], получены высокотемпературные асимптотики термодинамических потенциалов для диэлектрического цилиндра [A4]. Разработан метод вычисления коэффициентов теплового ядра для оператора Лапласа, главный символ которого меняется скачком на произвольной гладкой границе [A7,A8], что происходит, например, в электродинамике составных сред.

Выявлены закономерности, которым подчиняются индивидуальные вклады в коэффициенты теплового ядра, порождаемые изломами границы. Получены формулы для вычисления всех коэффициентов теплового ядра для оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле и Неймана, заданными на многоугольнике или его трехмерном обобщении [A5,A6].

Построено приближение близкой силы (Дерягина) для свободной энергии электромагнитного поля в присутствии сферы над плоскостью при конечной температуре и найдена область его применимости [A9]. Получены новые представления для функционального определителя, через который выражается свободная энергия электромагнитного поля в присутствии сферы над плоскостью. Найдены асимптотики свободной энергии и энтропии для больших и малых расстояний, низких и высоких температур [A10, A11]. Впервые получено ограничение на казимировское отталкивание между сферой и плоскостью [A12].

Найдено представление в виде обобщенной формулы Лифшица для вакуумной энергии скалярного поля на фоне двух параллельных двумерных или одномерных решеток дельта-потенциалов [A13, A14]. Впервые вычислена вакуумная энергия скалярного поля на фоне скрещенных космических струн [A15].

Разработан подход к вычислению энергии Казимира в случае, когда поля материи рассматриваются в (3+1)-мерных полупространствах с границей [A16], и коэффициенты отражения полупространств выражаются через квантовополевой поляризационный оператор.

Теоретическая и практическая значимость

Методы спектральной дзета-функции и ядра уравнения теплопроводности, которые развиваются в диссертации, широко применяются для вычисления эффективного действия в различных полевых моделях, в задачах квантовой гравитации, термодинамики черных дыр, квантовой теории поля с границами, квантовой теории поля при конечной температуре на стационарных многообразиях общего вида.

Практическая значимость исследования состоит в том, что корректное описание эффекта Казимира с учетом геометрии границ, свойств материалов и конечной температуры необходимо для как для современных прецизионных экспериментов, так и для развития микро- и нанотехнологий.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Впервые получены коэффициенты теплового ядра и вычислен функциональный определитель для электромагнитного поля на фоне диэлектрического цилиндра. С использованием этих результатов впервые получены высокотемпературные асимптотики свободной и внутренней энергии, а также энтропии. Вычислена вакуумная энергия электромагнитного поля в среде с цилиндрической границей, на которой выполняется условие изорефракции, $c_1 = c_2$. Показано, что вакуумная энергия отрицательна и при малых значениях параметра $\xi = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ ведет себя как ξ^4. Сила Казимира стремится сжать цилиндр.

2. Выделены индивидуальные вклады в коэффициенты теплового ядра, порождаемые изломами границы, а также закономерности, которым подчиняются эти вклады. Получены формулы для вычисления всех коэффициентов теплового ядра для оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле и Неймана, заданными на многоугольнике или его трехмерном обобщении.

3. Показано, что окружив коническую сингулярность цилиндрической поверхностью и задав на этой поверхности граничные условия для квантованных полей, методом дзета-функции можно получить конечное значение вакуумной энергии.

4. С использованием тепловых потенциалов простого и двойного слоя впервые получена система интегральных уравнений, определяющих ядро уравнения теплопроводности для скалярного поля в составной среде с произвольной гладкой границей раздела, на которой заданы условия согласования диэлектрического типа. Итеративное решение системы приводит к обобщению известного разложения многократного отражения. Коэффициенты теплового ядра выражены через геометрические инварианты границы раздела.

5. Получены новые представления для функционального определителя, через который выражается свободная энергия электромагнитного поля в присутствии сферы над плоскостью. Найдены асимптотики свободной энергии для малых расстояний, низких и высоких температур. Для малых расстояний определена область применимости приближения близкой силы (PFA). Вычислена энтропия электромагнитного поля для сферы над плоскостью для модели проводимости Друде и модели с dc-проводимостью.

6. Впервые получены ограничения на казимировское отталкивание между сферой и плоскостью. Максимально возможное отталкивание достигается между идеально проводящей плоскостью и идеально магнитной сферой. Отношение максимального возможной энергии отталкивания к энергии притяжения зависит от расстояния. Оно равно -1, если тела находятся далеко друг от друга, и стремится к $-7/8$ на малом расстоянии между телами. На больших расстояниях, $\rho \to 0$, энергия определяется асимптотическим рядом по степеням $\rho = R/L$, ведущий член которого $\sim \rho^3$.

7. В подходе теории рассеяния исследовано дисперсионное (казимировское) взаимодействие двумерных и одномерных решеток (цепочек) δ-потенциалов. T-операторы для двумерной и одномерной решеток получены как суммы по узлам решетки. Энергия взаимодействия записана в виде $TGTG$-

формулы, ядро которой определяется найденными T-операторами. Полученное представление для энергии взаимодействия можно рассматривать как обобщенную формулу Лифшица, которая приводит к конечному результату для вакуумной энергии.

8. Для ортогональных космических струн в ведущем порядке по натяжению вычислена зависящая от расстояния между струнами часть вакуумной энергии скалярного поля. Для двух струн, наклоненных под малым углом друг к другу, используемое приближение воспроизводит результат для параллельных струн, поскольку зависимость от угла входит в следующий за ведущим порядок.

9. Вычислена энергия Казимира скалярного поля в щели между двумя полупространствами. Скалярное поле ϕ в этой модели играет роль электромагнитного поля, а второе скалярное поле ψ, запертое в двух полупространствах с граничными условиями Дирихле, имитирует материал полубесконечных пластин. Коэффициент отражения полупространства для поля ϕ получен через однопетлевой поляризационный оператор Π поля ψ.

Апробация диссертации

Результаты диссертации неоднократно докладывались на автором на семинарах в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, а также на международных конференциях: "Quantum Field Theory under External Conditions", Leipzig (2001, 2007), Norman (2003, 2009), Barcelona (2005), Benasque (2011), 11th Int. Marcel Grossmann Meeting, Berlin (2006), "Quantum Field Theory and Gravity", Tomsk (2014), "Casimir physics", Les Houshes (2014), IAS Focused Program on Casimir and van der Waals Physics: Progress and Prospects, Hong Kong (2016), Symmetry methods in Physics, Yerevan (2017), 6th International Workshop on New Challenges in Quantum Mechanics: Integrability and Supersymmetry, Valladolid

(2017), “Casimir Effect: Theory and Applications”, Trondheim (2018), Alexander Friedmann International Seminar on Gravitation and Cosmology, St. Petersburg (2015, 2019), VI International conference “Models in quantum field theory”, Peterhof (2018), 2nd International Conference on Symmetry, Benasque (2019), International workshop “Quantum Vacuum: Renormalization Group and Anomalies in Cosmology”, Mainz (2019), VI-th Workshop on Cosmology and the Quantum Vacuum, Barcelona (2020), 10-th International workshop “Waves in inhomogeneous media and integrable systems”, Kaliningrad (2020), “Quantum and Thermal Electrodynamic Fluctuations in the Presence of Matter: Progress and Challenges”, Santa Barbara (2022).

Публикации

В диссертацию включены материалы, опубликованные в 16 печатных работах, 15 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК и входящих в список журналов Web of Science, 1 — в сборнике трудов конференции: Phys. Rev. D - **7**, Class. and Quant. Gravity - **2**, J. Math. Phys. - **2** , J. Phys. A. - **1**, Mod. Phys. Lett. - **1**, Symmetry - **1**, Universe - **1**, Сборник “Космология, квантовый вакуум и дзета-функции” - **1**.

Все результаты, изложенные в диссертации, получены лично автором или при ее непосредственном участии. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами или лично.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, 5 приложений и списка литературы. Объем диссертации - 213 страниц, включая 21 рисунок, 6 таблиц и список литературы из 270 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность работы и сформулированы ее задачи, определены основные понятия и объекты исследования, представлены используемые методы, описана структура диссертации ее цели и задачи.

В первой главе в рамках единого подхода получены интегральные представления для спектральных дзета-функций скалярного и электромагнитного полей с разными граничными условиями в задачах с цилиндрической симметрией, а также связанных с ними задачах с геометрией клина или конуса.

Интегральное представление дзета-функции для электромагнитного поля на фоне диэлектрического цилиндра имеет вид

$$\zeta(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_0^\infty \frac{dk_z}{\pi} \int\limits_{k_z}^\infty dk\, (k^2 - k_z^2)^{-s} \frac{\partial}{\partial k} \ln \Delta_n(k, k_z). \tag{17}$$

Здесь $\Delta_n(k, k_z)$ - функции Йоста, записанные на мнимой оси, для рассеяния электромагнитных волн на цилиндре радиуса R,

$$\Delta_n(k, k_z) = \frac{1}{\Delta_n^\infty} \left\{ \Delta_n^{TM} \Delta_n^{TE} + \frac{n^2}{c_2^2} (k^2 - k_z^2)\, k_z^2\, (1-\alpha^2)^2 \left[I_n(qR) K_n(kR) \right]^2 \right\}, \tag{18}$$

I_n и K_n - модифицированные функции Бесселя. Использованы обозначения $q = \sqrt{\alpha^2\, k^2 + k_z^2\,(1-\alpha^2)}$, $\alpha \equiv c_2/c_1$, $c_i = 1/\sqrt{\epsilon_i \mu_i}$, ϵ_1, ϵ_2 и μ_1, μ_2 - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды внутри и вне цилиндра, и

$$\begin{aligned}
\Delta_n^{TM}(k, k_z) &= \mu_1\, k\, I_n'(qR)\, K_n(kR) - \mu_2\, q\, I_n(qR)\, K_n'(kR), \\
\Delta_n^{TE}(k, k_z) &= \epsilon_1\, k\, I_n'(qR)\, K_n(kR) - \epsilon_2\, q\, I_n(qR)\, K_n'(kR), \\
\Delta_n^{\infty}(k, k_z) &= \frac{1}{4} e^{2\,(q-k)}\, qk\, (\epsilon_1 k + \epsilon_2 q)\, (\mu_1 k + \mu_2 q).
\end{aligned} \tag{19}$$

Интегральное представление (17) одновременно учитывает поверхностные моды и моды рассеяния для обеих поляризаций электромагнитного поля.

С использованием представления (17) и формулы (6) впервые получены коэффициенты теплового ядра электромагнитного поля на фоне диэлектрического цилиндра. Если разница между скоростями света внутри и снаружи цилиндра мала (разреженный цилиндр), то можно разложить дзета-функцию и коэффициенты теплового ядра по степеням $c_1 - c_2$. Разложение дзета-функции и коэффициента B_2 начинается с третьего порядка,

$$\underset{s\to-1/2}{res}\,\zeta_{cyl}(s) = -\frac{9}{1408}\frac{1}{\sqrt{\pi}R^2c_2^2}(c_1-c_2)^3+\ldots, \quad B_2 = -\frac{9}{88}\frac{\pi}{R^2c_2^2}(c_1-c_2)^3+\ldots. \tag{20}$$

Таким образом, коэффициент B_2 теплового ядра равен нулю в приближении разреженного цилиндра. Это означает, что при перенормировке вакуумной энергии электромагнитного поля в этой задаче конечный произвол отсутствует и указывает на равенство нулю вакуумной энергии разреженного цилиндра. С использованием этих результатов впервые получены высокотемпературные асимптотики свободной и внутренней энергии, а также энтропии.

Вычислена вакуумная энергия электромагнитного поля в среде с цилиндрической границей, на которой выполняется условие изорефракции, то есть скорости света внутри и снаружи совпадают, $c_1 = c_2$. Показано, что при малых значениях параметра $\xi = (\varepsilon_1-\varepsilon_2)/(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ вакуумная энергия ведет себя как ξ^4,

$$E(\xi^2) = -\frac{c\xi^4}{4\pi R^2}\,0.0955275. \tag{21}$$

В отличие от энергии Казимира компактного шара с теми же свойствами, энергия Казимира цилиндра отрицательна, и сила Казимира стремится сжать цилиндр.

Во второй главе рассмотрены спектральные ζ-функции, разложения теплового ядра и вакуумная энергия в задачах с негладкими границами и конической сингулярностью. Изложение следует работам [А5], [А6].

Выделены индивидуальные вклады в коэффициенты теплового ядра, порождаемые особенностями границы, а также закономерности, которым подчиняются эти вклады. Дополнительным результатом стали формулы для вычисления всех коэффициентов теплового ядра для оператора Лапласа, определенного на произвольном многоугольнике с углами α_i или на его цилиндрическом обобщении. Коэффициенты $B_0 = |\Omega|$ и $B_{1/2} = \mp\sqrt{\pi}L/2$ определяются площадью многоугольника $|\Omega|$ и его периметром L, знаки $-/+$ в коэффициенте $B_{1/2}$

соответствует граничным условиям Дирихле/ Неймана. Коэффициент B_1 равен сумме вкладов углов α_i,

$$B_1 = \sum_i c(\alpha_i)\,. \tag{22}$$

Остальные коэффициенты $B_n,\ n > 1$ равны нулю.

Эти результаты согласуются с традиционным представлением о том, что коэффициенты теплового ядра определяются локальными свойствами границы. Частные результаты, полученные в работе, могут быть использованы для проверки асимптотических разложений теплового ядра для многообразий общего вида с негладким границами.

Показано, что окружив коническую сингулярность цилиндрической поверхностью и задав на этой поверхности граничные условия для квантованных полей, можно найти конечное значение вакуумной энергии, по крайней мере, методом дзета-функции. Например, для электромагнитного поля с граничными условиями изорефракции с параметром ξ^2 методом дзета-функции в линейном по ξ^2 приближении получен следующий результат для вакуумной энергии:

$$E_{iso} = \frac{\hbar}{2}\,\zeta_{\rm cyl}^{\rm lin}\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq \frac{c\hbar\xi^2}{4\pi R^2}\left(-0.490878 + \frac{1}{4}\ln\frac{2\pi}{p} + \frac{\pi^2}{288p^2} - \frac{\pi^4}{90}\frac{7}{1920}\frac{1}{p^4}\right). \tag{23}$$

Здесь параметр p связан с дефицитом угла Φ конического пространства соотношением $p^{-1} = 1 - \Phi/(2\pi)$.

В главе также получены высокотемпературные асимптотики для термодинамических потенциалов в пространстве с конической сингулярностью и разными граничными условиями для скалярного и электромагнитного полей на окружающей коническую сингулярность цилиндрической поверхности.

В третьей главе с помощью тепловых потенциалов получены интегральные уравнения, которые определяют тепловое ядро для составных сред с произвольной гладкой границей раздела. Итерационное решение этих уравнений позволяет построить асимптотическое разложение по степеням собственного времени и выразить коэффициенты этого разложения через геометрические инварианты границы раздела [A7].

В задачах вычисления вакуумной энергии электромагнитного поля в составной среде скорость света меняется скачкообразно на границе между двумя средами с различными характеристиками (например, на границе между диэлектриком и вакуумом), $\varepsilon(x) = \varepsilon_1 \Theta_\Sigma(x - x_0) + \varepsilon_2 \Theta_\Sigma(x_0 - x)$, то есть главный символ обобщенного оператора Лапласа терпит разрыв при пересечении поверхности раздела сред Σ. В каждой среде уравнения Максвелла хорошо определены, а на границе раздела должны выполняться условия сшивки (или граничные условия). Разложения теплового ядра в составных средах с произвольной границей раздела были исследованы недостаточно, так как стандартные методы исследования здесь не работают [3].

Рассматривается уравнение теплопроводности в составной среде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0\,, \tag{24}$$

где Δ – оператор Лапласа в d-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}_d$, которое разделено гладкой замкнутой поверхностью S на компактную внутреннюю область D_+ и внешнюю область D_-. Пусть $a = a_+$ в D_+ и $a = a_-$ в D_-. В любой точке x поверхности S существует единичная внешняя нормаль n_x или $n(x)$.

Свободное тепловое ядро в неограниченном пространстве

$$K_0(x, t; x', t') = \left(4a^2\pi(t - t')\right)^{-d/2} \exp\left[-\frac{(x - x')^2}{4a^2(t - t')}\right], \tag{25}$$

удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности (24) и неоднородному начальному условию $K_0(x, t; x', t) \to \delta^{(d)}(x - x')$.

В составной среде решения уравнения теплопроводности $u_\pm(x, t)$, $x \in D_\pm$ сшиваются на поверхности раздела S. При пересечении поверхности S должны быть непрерывными температура и поток тепла

$$u_+(x, t) = u_-(x, t), \quad \lambda_+ \frac{\partial u_+(x, t)}{\partial n_+(x)} + \lambda_- \frac{\partial u_-(x, t)}{\partial n_-(x)} = 0, \quad x \in S\,. \tag{26}$$

Здесь $n_+(x)$ и $n_-(x)$ - внешние нормали к поверхности S в точке x для областей

D_+ и D_-, соответственно. Эти условия сшивки подразумевают, что на поверхности S нет источников тепла. Параметры $a_\pm$, $\lambda_\pm$ задают свойства среды.

В каждой области аргументов x и x' определим ядро уравнения теплопроводности $K(x,t;x',t')$ (24):

$$
\begin{aligned}
&K_{++}(x,t;x',t'), \quad x,x'\in D_+\,; \qquad K_{-+}(x,t;x',t'), \quad x\in D_-, x'\in D_+\,;\\
&K_{+-}(x,t;x',t'), \quad x\in D_+,\, x'\in D_-\,; \;\; K_{--}(x,t;x',t'), \quad x,x'\in D_-\,.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

При $t\to t'$ компоненты (27) удовлетворяют начальным условиям:

$$
K_{++}(x,t;x',t) \;=\; \delta(x,x'), \quad K_{--}(x,t;x',t)=\delta(x,x'), \tag{28}
$$

$$
K_{+-}(x,t;x',t) \;=\; K_{-+}(x,t;x',t)=0. \tag{29}
$$

Условия сшивки на поверхности S, которым удовлетворяет $K(x,t;x',t')$ по отношению к первой паре своих аргументов имеют вид

$$
K_{++}(x,t;x',t') \;=\; K_{-+}(x,t;x',t')\,, \quad x\in S\,, \tag{30}
$$

$$
\lambda_+\frac{\partial K_{++}}{\partial n_+(x)}(x,t;x',t') \;+\; \lambda_-\frac{\partial K_{-+}}{\partial n_-(x)}(x,t;x',t')=0\,, \tag{31}
$$

$$
K_{+-}(x,t;x',t') \;=\; K_{--}(x,t;x',t')\,, \tag{32}
$$

$$
\lambda_+\frac{\partial K_{+-}}{\partial n_+(x)}(x,t;x',t') \;+\; \lambda_-\frac{\partial K_{--}}{\partial n_-(x)}(x,t;x',t')=0\,. \tag{33}
$$

Компоненты ядра уравнения теплопроводности (27) представим в форме тепловых потенциалов простого слоя и двойного слоя [25] по отношению к первой паре их аргументов. K_{++} и K_{+-} выражены через тепловой потенциал простого слоя с поверхностными плотностями ν_{++} и ν_{+-} , K_{--} и K_{-+} – через тепловой потенциал двойного слоя с поверхностными плотностями ν_{--} и ν_{-+}. Чтобы учесть неоднородные начальные условия (28), для компонент K_{++} и K_{--} к выбранному тепловому потенциалу добавлен свободный пропагатор $K_0^{(+)}$ или $K_0^{(-)}$ (25).

$$
K_{++}(x,t;x',t')=K_0^{(+)}(x,t;x',t')+a_+^2\int_{t'}^{t}d\theta\int_S dS_y\,K_0^{(+)}(x,t;y,\theta)\,\nu_{++}(y,\theta;x',t'), \tag{34}
$$

$$K_{--}(x,t;x',t') = K_0^{(-)}(x,t;x',t') + a_-^2\int_{t'}^t d\theta \int_S dS_y \frac{\partial K_0^{(-)}(x,t;y,\theta)}{\partial n_-(y)}\,\nu_{--}(y,\theta;x',t'), \tag{35}$$

$$K_{+-}(x,t;x',t') = a_+^2\int_{t'}^t d\theta \int_S dS_y\, K_0^{(+)}(x,t;y,\theta)\,\nu_{+-}(y,\theta;x',t')\,, \tag{36}$$

$$K_{-+}(x,t;x',t') = a_-^2\int_{t'}^t d\theta \int_S dS_y\, \frac{\partial K_0^{(-)}(x,t;y,\theta)}{\partial n_-(y)}\,\nu_{-+}(y,\theta;x',t')\,. \tag{37}$$

Используя условия сшивки (30), (31) и (32) и (33), и учитывая то, что тепловой потенциал двойного слоя и нормальная производная теплового потенциала простого слоя претерпевают разрыв на границе S [25], получаем систему 4 интегральных уравнений второго рода, которые полностью определяют тепловое ядро в составной среде. Решение этой системы по теории возмущений, соответствует разложению многократного рассеяния для теплового ядра [26].

Функции K_{-+} и K_{+-} не вносят вклада в след теплового ядра, поэтому рассмотрим только K_{++} и K_{--}. При вычислении следа ядра уравнения теплопроводности вклад в коэффициенты при степенях t дает только слой вблизи границы S, поэтому в интегралах заменим $(x-z)^2$ его разложением по степеням геодезического расстояния σ на поверхности S.

Первые три члена пертурбативного ряда для $t \to +0$ $(d=3)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
K^{(0)}(t) &= K_{++}^{(0)}(t) + K_{--}^{(0)}(t) = \frac{t^{-3/2}}{(4\pi a_+^2)^{3/2}}\,D_+ + \frac{t^{-3/2}}{(4\pi a_-^2)^{3/2}}\,D_-,\\
K_{++}^{(1)}(t) &= \frac{t^{-1}\,S}{8\pi a_+^2} + \frac{t^{-1/2}}{8\pi^{3/2}a_+}\int_S dS\,L_a^a + \frac{t^0}{2^8\,\pi}\int_S dS\left[5\,(L_a^a)^2 + L_a^b L_b^a - \frac{2}{3}R_a^a\right] + ...,\\
K_{++}^{(2)}(t) &= -\frac{t^{-1}}{8\pi}\,\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\,\frac{S}{a_+^2} - \frac{1}{8\pi^{3/2}}\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\frac{t^{-1/2}}{a_+}\int_S dS\,L_a^a + \ldots
\end{aligned}$$

Здсь L_{ab} – вторая квадратичная форма поверхности S, R_{ab} - тензор Риччи, S – площадь поверхности, $D_\pm$ – объемы областей пространства, имеющих общую границу S. $K_{--}^{(1)}(t)$ и $K_{--}^{(2)}(t)$ получаются заменой $a_+ \leftrightarrow a_-$, $\lambda_+ \leftrightarrow \lambda_-$, $L_a^b \to -L_a^b$. Асимптотика последующих членов ряда возмущений может быть найдена аналогичным образом. Сложив все факторы при одинаковых степенях t, получим коэффициенты теплового ядра. Последние выражаются через интегралы от геометрических инвариантов поверхности раздела сред [A7].

Предложенный метод может также применяться в задачах, где однородная среда разделена на внутреннюю и внешнюю области гладкой компактной поверхностью, на которой заданы какие-либо граничные условия [A8] .

В четвертой главе исследовалось взаимодействие между шаром и плоскостью для скалярного и электромагнитного полей при конечной температуре. Сначала для этой геометрии было построено приближение Дерягина или близкой силы (PFA) при конечной температуре. Затем был использован метод, основанный на вычислении функционального определителя, который также называют подходом теории рассеяния или 'TGTG'-формулой (16).

Свободная энергия представляется в виде суммы по частотам Мацубары ξ_n,

$$\mathcal{F} = \frac{T}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr} \ln \left(1 - \mathbf{M}(\xi_n)\right), \quad \xi_n = 2\pi n T, \tag{38}$$

где $\mathbf{M}$ в (38)– это матрица по орбитальным моментам, $M_{l,l'}$, $1 < l, l' < \infty$, диагональная матрица по магнитному квантовому числу m, а для электромагнитного поля еще (2×2) матрица по электромагнитным поляризациям, которые соответствуют TE и TM модам в сферической геометрии. Явный вид матрицы $\mathbf{M}$ зависит от граничных условий и определяется через T-матрицу задачи рассеяния на сфере с использованием трансляционных формул, которые связывают волны плоском и сферическом базисах.

Сумма по мацубаровским частотам в (38) преобразуется в интеграл с помощью формулы Абеля-Плана, при этом в свободной энергии выделяется вакуумная энергия E_0 (16) и температурные поправки, $\mathcal{F} = E_0 + \mathcal{F}_T$,

$$\mathcal{F}_T = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi}\, n_T(\xi)\, \mathrm{Tr} \left[\ln(1 - \mathbf{M}(i\xi)) - \ln(1 - \mathbf{M}(-i\xi))\right], \tag{39}$$

где $n_T(\xi) = 1/(\exp(\xi/T) - 1)$ - больцмановский фактор.

Представляющие интерес области температур определяются по отношению к радиусу сферы и расстоянию между сферой и плоскостью. На малых расстояниях, $d \ll R$, низкая температура удовлетворяет неравенству $dT \ll RT \ll 1$, средней считаем температуру $dT \ll 1 \ll RT$, при высокой температуре $1 \ll$

$dT \ll RT$. На близких расстояниях, асимптотика свободной энергии определяется малым параметром $\varepsilon = d/R$.

Показано, что приближение близкой силы (PFA) точно воспроизводится для средних и высоких температур. Для низкой температуры ведущий член свободной энергии - это вакуумная энергия для которой, конечно, справедливо PFA, а часть, зависящая от температуры, представляет собой малую добавку, для которой FPA не работает [A9].

В пределе высоких температур происходит размерная редукция, и ведущий вклад в свободную энергию определяется нулевой мацубаровской частотой. Асимптотику на малых расстояниях можно вычислить теми же методами, что и при нулевой температуре, результат совпадает с полученным в PFA.

При низких температурах поведение температурных вкладов в выражении для свободной энергии зависит от граничных условий и вида поля. Мы вычислили разложение $\mathcal{F}_T$ при низкой температуре, используя представление (39), включающее фактор Больцмана. Разложение общего вида начинается с члена, квадратичного по температуре,

$$\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_2 T^2 + \mathcal{F}_4 T^4 + \dots \,. \tag{40}$$

Коэффициент при T^2 не равен нулю для скалярного поля с граничными условиями Дирихле на сфере, и для электромагнитного поля, если материал шара описывается моделью Друде или моделью с dc-проводимостью при фиксированных параметрах. В остальных рассмотренных случаях $\mathcal{F}_2 = 0$, следовательно, свободная энергия пропорциональна четвертой степени температуры.

Мы также рассмотрели взаимодействие идеально проводящей плоскости и шара, описываемого моделью Друде с параметром релаксации, являющимся функцией температуры, $\gamma \sim T^\alpha$, $\alpha > 0$ и продемонстрировали, что при стремлении к нулю температуры, энтропия не исчезает. Таким образом, показано, что использование модели Друде как в формуле Лифшица [13] , так и в ее обобщении (16) приводит поведению, неприемлемому с точки зрения термодинамики, и вступает в противоречие с экспериментом [2].

Получены ограничения на отталкивание между сферой и плоскостью. Максимально возможное отталкивание достигается между идеально проводящей плоскостью и идеально магнитной сферой. Мы заключаем, что отношение максимального возможной энергии отталкивания к энергии притяжения определяется расстоянием между сферой и плоскостью: оно равно -1 на больших расстояниях, и стремится к -7/8 на малых.

Изучено влияние конечной проводимости и конечной температуры на отталкивание для данной геометрии. Вне зависимости от использованной модели диэлектрической и магнитной проницаемости, вакуумная энергия никогда не превышает предельных значений, отвечающих граничным условиям идеального проводника или идеального магнетика на сфере. Притяжение может смениться отталкиванием при изменении параметров моделей диэлектрической проницаемости ϵ и магнитной восприимчивости μ.

Низкотемпературные поправки к предельным значениям притяжения и отталкивания пропорциональны T^4 и ослабляют как притяжение [27], так и отталкивание. При высокой температуре отношение между максимально возможным отталкиванием и максимально возможным притяжением зависит от расстояния между сферой и плоскостью, изменяясь от -3/4 на малых расстояниях до -1 – на больших.

В пятой главе исследуется вакуумная энергия скалярного поля на фоне решеток δ-потенциалов и в пространстве скрещенных космических струн. Это два примера, когда квантовое поле рассматривается на сингулярном фоне, у которого можно выделить неперекрывающиеся части и рассматривать их казимировское (дисперсионное) взаимодействие.

В разделе 5.1 рассмотрено рассеяние скалярного поля на двумерной решетке δ-потенциалов (решетка Дирака), а также на одномерной решетке δ-потенциалов (цепочка Дирака). Если две таких решетки расположены параллельно на некотором расстоянии b друг от друга, то энергию их взаимодействия можно записать в виде $TGTG$-формулы (16). Трансляционная инвариантность решетки позволяет найти импульсное представление T-операторов, входящих в ядро $TGTG$-формулы, в виде суммы по узлам решетки.

Для энергии взаимодействия двух двумерных квадратных решеток получено следующее свободное от расходимостей выражение,

$$E_0 = \frac{a^2}{2}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\pi}\int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2}\ln\left(1-|h(i\xi,\mathbf{q})|^2\right), \tag{41}$$

где a - это шаг решетки. Расстояние между решетками b и относительный сдвиг решеток $\mathbf{c}$ входят в функцию $h(i\xi,\mathbf{q})$, которая суммирует вклады всех ячеек квадратной решетки

$$h(i\xi,\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{N}} r_{\mathbf{N}}(i\xi,k)e^{i\frac{2\pi}{a}\mathbf{N}\mathbf{c}}e^{-b\sqrt{\xi^2+\mathbf{k}^2}},\quad \mathbf{k}=\mathbf{q}+\frac{2\pi}{a}\mathbf{N}. \tag{42}$$

Функция $r_{\mathbf{N}}(i\xi,k)$ имеет смысл коэффициента отражения на одну ячейку решетки, вычисленного при частоте $\omega = i\xi$,

$$r_{\mathbf{N}}(i\xi,k) = -\frac{1}{2a^2}\frac{\tilde{\phi}^{-1}(\mathbf{k})}{\sqrt{\xi^2+\mathbf{k}^2}},\quad \tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{g}-\frac{1}{4\pi a}\sum_{\mathbf{n}\neq 0}\frac{1}{|\mathbf{n}|}e^{-a\xi|\mathbf{n}|+ia\mathbf{k}\mathbf{n}}\,. \tag{43}$$

Коэффициент отражения (43) определяется перенормированной константой связи g, а (41) может рассматриваться как обобщенная формула Лифшица.

Продемонстрировано, что результаты для решеток на больших расстояниях переходят в формулы для листов, несущих δ-потенциал, а на малых - в формулы для взаимодействия Казимира-Полдера между узлами решетки.

В разделе 5.2 рассматривается безмассовое скалярное поле в пространстве скрещенных космических струн. Вакуумная энергия выражена через функциональный определитель,

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{i}{2T}\ln\det(\mathcal{K}+\delta\mathcal{K}),\quad T=\int dt. \tag{44}$$

где $\mathcal{K}\equiv\partial_t^2-\partial_x^2-\partial_y^2-\partial_z^2$ - это оператор Даламбера в плоском пространстве, $\delta\mathcal{K}$ - это возмущение, связанное с космическими струнами. Чтобы найти это возмущение, построены метрики пространств перпендикулярных прямых космических струн и почти параллельных космических струн.

Для перпендикулярных непересекающихся струн метрика имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - e^{-4(V_1(x,y)+\tilde{V}_2(x,z))}dx^2 - e^{-4V_1(x,y)}dy^2 - e^{-4\tilde{V}_2(x,z)}dz^2, \tag{45}$$

где $V_1 = 2\lambda_1 \ln r_1$, и $\tilde{V}_2 = 2\lambda_2 \ln \tilde{r}_2$, $g = -e^{-8(V_1+\tilde{V}_2)}$. Первая струна с натяжением λ_1 нормальна плоскости (x, y) и пересекает ее в точке (x_1, y_1), вторая струна с натяжением λ_2 нормальна плоскости (z, x) и пересекает ее в точке (z_2, x_2). Длины $r_1(x, y)$ и $\tilde{r}_2(z, x)$

$$r_1 = [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]^{1/2}, \quad \tilde{r}_2 = [(z-z_2)^2 + (x-x_2)^2]^{1/2}, \quad x_1 \neq x_2, \tag{46}$$

относятся к ортогональным сечениям (x, y) и (z, x) . Метрика (45) имеет две конические сингулярности с дефицитом угла в плоскостях (x, y) и (x, z).

Расстояние между скрещенными струнами - это расстояние между мысленными параллельными плоскостями, проведенными через струны. Для перпендикулярных космических струн часть вакуумной энергии, зависящая от расстояния между ними, в ведущем порядке по параметру натяжения струны λ_i, $i = 1, 2$, имеет вид

$$\mathcal{E}_\perp = \frac{i}{2T}\mathrm{tr}\left(\partial^{-2}\delta\mathcal{K}_1\partial^{-2}\delta\mathcal{K}_2\right), \tag{47}$$

где $\delta\mathcal{K}_1 = -4V_1(x,y)(\partial_x^2 + \partial_y^2)$, $\delta\mathcal{K}_2 = -4\tilde{V}_2(x,z)(\partial_x^2 + \partial_z^2)$. Перейдя в импульсное представление и используя размерную регуляризацию при интегрировании по 4-импульсам, в ведущем порядке по λ_1 и λ_2 находим перенормированную вакуумную энергию перпендикулярных космических струн как функцию расстояния между струнами a,

$$\mathcal{E}_\perp^{ren} = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{E}_\perp^\varepsilon = -\frac{83}{240\pi^2}\frac{\lambda_1\lambda_2}{2a}. \tag{48}$$

Для двух струн, наклоненных под малым углом друг к другу, используемое приближение воспроизводит результат для параллельных струн, поскольку зависимость от угла входит в следующий за ведущим порядок.

В шестой главе рассмотрена модель, в которой два скалярных поля взаимодействуют в полупространствах, разделенных щелью ширины L,

$$S_{int}(x) = \lambda \int d^3x_\alpha \Big(\int\limits_{-\infty}^{0} dz\, \phi(x)\psi^2(x) + \int\limits_{L}^{\infty} dz\, \phi(x)\psi^2(x) \Big), \quad \alpha = 0,1,2. \qquad (49)$$

Здесь λ - константа связи с размерностью обратной длины. Скалярное поле $\phi(x)$ определено во всем пространстве, а скалярное поле $\psi(x)$ заперто в полупространствах $z < 0$ и $z > L$, с граничными условиями Дирихле при $z = 0$ и $z = L$.

В низшем порядке теории возмущений уравнение движения для поля $\phi(x)$ имеет вид

$$\int d^4x' \Big(-\partial_x^2 \delta(x - x') + \Pi(x, x') \Big) \phi(x') = 0, \qquad (50)$$

где $\Pi(x, x')$ - однопетлевой поляризационный оператор, обусловленный взаимодействием с полем $\psi(x)$ в полупространствах $z < 0$ и $z > L$.

Поляризационный оператор $\Pi(x, x')$ в уравнении (50) играет роль потенциала $V(x, x')$, что позволяет получить представление вакуумной энергии поля ϕ в присутствии полупространств в виде

$$E(L) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k_\alpha}{(2\pi)^2} \mathrm{Tr} \ln(1 - \mathcal{N}^2 e^{2i\Gamma L}), \quad \Gamma = \sqrt{k_\alpha k^\alpha + i0}. \qquad (51)$$

Для ϕ функция $\mathcal{N}$ имеет смысл коэффициента отражения полупространства,

$$\mathcal{N}\big(\sqrt{\omega^2 - k_{||}^2}; \lambda, m\big) = \int\limits_0^\infty dz \int\limits_0^\infty dz' \, \frac{e^{i\Gamma(z+z')}}{-2i\Gamma} \, \Pi_\Gamma(z, z'), \qquad (52)$$

где Π_Γ - это преобразование Фурье поляризационного оператора в трансляционно инвариантных направлениях, $\Pi_\Gamma(z, z') = i \int d^3x_\alpha e^{ik_\alpha x_\alpha} \Pi(x_\alpha; z, z')$.

В поляризационном операторе выделены трансляционно инвариантная часть, $\Pi^{(t)}$, которая имеет ультрафиолетовую расходимость, и конечная трансляционно неинвариантная часть, $\Pi^{(nt)}$. При вычислении $\Pi^{(t)}$ использована размерная регуляризация и условие $\Pi^{(t)}_{ren}(q^2 = 0) = 0$, что соответствует перенормировке константы связи λ.

Были вычислены коэффициенты отражения полупространств $\mathcal{N}$ и найдены их асимптотики для больших и малых импульсов. Наконец, была получена энергия Казимира скалярного поля в щели между двумя полупространствами. Таким образом удалось учесть взаимодействие полей внутри полупространств, не сводя его к эффективным граничным условиям.

В заключении перечисляются полученные результаты.

В приложении А приводятся формулы равномерных асимптотических разложений функций Бесселя, их производных и комбинаций, встречающихся в диссертации.

Приложение Б содержит детали аналитического продолжения ζ-функции для сектора с граничными условиями Неймана, результаты вычислений дзета-определителей, коэффициентов теплового ядра и высокотемпературных асимптотик термодинамических функций для конического пространства с граничными условиями изорефракции и δ-потенциалом,

В **приложении В** демонстрируется самосопряженность краевых задач для составных сред.

В **приложении Г** выводятся основные формулы для описания казимировского взаимодействия двух сфер с дельта-потенциалом на поверхности («полупрозрачные» сферы) и двух цилиндрических поверхностей, несущих δ-потенциал.

В **приложении Д** обсуждаются пространства с параллельными и скрещенными космическими струнами.

Публикации автора по теме диссертации

A1. Nesterenko V. V., Pirozhenko I. G. Casimir energy of a compact cylinder under the condition $\varepsilon\mu = c^{-2}$ // Phys. Rev. D. – 1999. – Vol. 60. – P. 125007.

A2. Nesterenko V. V., Pirozhenko I. G. Spectral zeta functions for a cylinder and a circle // J. Math. Phys. –2000. – Vol. 41. – P. 4521-4531.

A3. Bordag M., Pirozhenko I. G. The Heat kernel coefficients for the dielectric cylinder // Phys. Rev. D. – 2001. – Vol. 64. – P. 025019.

A4. Bordag M., Nesterenko V. V., Pirozhenko I. G. High temperature asymptotics of thermodynamic functions of an electromagnetic field subjected to boundary conditions on a sphere and cylinder // Phys. Rev. D. – 2002. – Vol. 65. – P. 045011.

A5. Nesterenko V. V., Pirozhenko I. G. and Dittrich J., Nonsmoothness of the boundary and the relevant heat kernel coefficients // Class. Quant. Grav. – 2003. – Vol. 20. – P. 431-456.

A6. Nesterenko V. V., Pirozhenko I. G., Vacuum energy in conical space with additional boundary conditions // Class. Quant. Grav. – 2011. – Vol. 28. – P. 175020.

A7. Pirozhenko I. G., Nesterenko V. V., Bordag M. Integral equations for heat kernel in compound media // J. Math. Phys. – 2005. – Vol. 46. – P. 042305.

A8. Bordag M., Pirozhenko I. G., Nesterenko V. V. Spectral analysis of a flat plasma sheet model // J. Phys. A – 2005. – Vol. 38. – P. 11027.

A9. Bordag M., Pirozhenko I. Vacuum energy between a sphere and a plane at finite temperature // Phys. Rev. D. – 2010. – Vol. 81. – P. 085023.

A10. Bordag M., Pirozhenko I. G. The Low temperature corrections to the Casimir force between a sphere and a plane //Springer Proc. Phys. – 2011. – Vol. 137.– P. 45–56.

A11. Bordag M., Pirozhenko I. G. On the Casimir entropy for a ball in front of a plane //Phys. Rev. D. – 2010. – Vol. 82. – P. 125016.

A12. Pirozhenko I. G., Bordag M. Casimir repulsion in sphere-plate geometry // Phys. Rev. D. – 2013. – Vol. 87. – P. 085031.

A13. Bordag M., Pirozhenko I. Casimir Effect for Dirac Lattices // Phys. Rev. D – 2017.– – Vol. 95. – P. 056017.

A14. Pirozhenko I. On finite temperature Casimir effect for Dirac lattices // Mod. Phys. Lett. A. – 2020. – Vol. 35. – no. 03. – P. 2040019.

A15. Pirozhenko I. G. Vacuum Interaction of Crossed Cosmic Strings // Universe. – 2021. – Vol. 7, no. 7. – P. 217.

A16. Bordag M., Pirozhenko I. G. Dispersion forces between fields confined to half spaces // Symmetry. – 2018. – Vol. 10, no. 3. – P. 74.

Цитируемая литература

[1] Casimir H. B. G. On the attraction between two perfectly conducting plates // Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc. — 1948. — Vol. 51. — P. 793–795.

[2] Bordag M., Klimchitskaya G. L., Mohideen U., and Mostepanenko V. M. Advances in the Casimir Effect. — Oxford : Oxford University Press, 2009.

[3] Vassilevich D. Heat kernel expansion: User's manual // Phys. Rept. — 2003. — Vol. 388. — P. 279–360.

[4] Elizalde E., Odintsov S. D., Romeo A., Bytsenko A. A. and Zerbini S. Zeta regularization technique with applications . — Singapore : World Scientific, 1994.

[5] Fock V. Proper time in classical and quantum mechanics // Phys. Z. Sowjetunion. — 1937. — Vol. 12. — P. 404–425.

[6] Schwinger J. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization // Phys. Rev. — 1951. — Vol. 82. — P. 664–679.

[7] ДеВитт Б. Динамическая теория групп и полей. — Москва : Наука, 1987.

[8] Kirsten K. Spectral functions in mathematics and physics. — Boca Raton, FL : Chapman and Hall, CRC, 2001.

[9] Bordag M., Kirsten K., Vassilevich D. On the ground state energy for a penetrable sphere and for a dielectric ball // Phys. Rev. D. — 1999. — Vol. 59. — P. 085011.

[10] Emig T., Graham N., Jaffe R. L. and Kardar M. Casimir forces between arbitrary compact objects // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 99. — P. 170403.

[11] Kenneth O., Klich I. Opposites Attract - A Theorem About The Casimir Force // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 97. — P. 160401.

[12] Bordag M., Robaschik D., Wieczorek E. Quantum Field Theoretic Treatment of the Casimir Effect // Ann. Phys. — 1985. — Vol. 165. — P. 192.

[13] Lifshitz E. M. The Theory of Molecular Attractive Forces Between Solids // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1956. — Vol. 29. — P. 94. — [Sov. Phys. JETP. **2**, 73 (1956)].

[14] Lamoreaux S. Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6 micrometers range // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78. — P. 5–7.

[15] Kenneth O., Klich I. Casimir forces in a T-operator approach // Phys. Rev. B. — 2008. — Vol. 78. — P. 014103.

[16] Bulgac A., Magierski P., Wirzba A. Scalar Casimir effect between Dirichlet spheres or a plate and a sphere // Phys. Rev. D. — 2006. — Vol. 73. — P. 025007.

[17] Bordag M. The Casimir effect for a sphere and a cylinder in front of plane and corrections to the proximity force theorem // Phys. Rev. D. — 2006. — Vol. 73. — P. 125018.

[18] Emig T. Casimir forces: An Exact approach for periodically deformed objects // Europhys. Lett. — 2003. — Vol. 62. — P. 466–472.

[19] Lambrecht A., Marachevsky V. N. Casimir Interaction of Dielectric Gratings // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101. — P. 160403.

[20] Klimchitskaya G. L., Mostepanenko V. M. Testing Gravity and Predictions Beyond the Standard Model at Short Distances: The Casimir Effect // Lect. Notes Phys. — 2023. — Vol. 1017. — P. 403–445.

[21] Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G. R. Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with submillimeter dimensions and TeV scale quantum gravity // Phys. Rev. D. — 1999. — Vol. 59. — P. 086004.

[22] Kuzmin V. A., Tkachev I. I., Shaposhnikov M. E. Restrictions Imposed on Light Scalar Particles by Measurements of Van Der Waals Forces // JETP Lett. — 1982. — Vol. 36. — P. 59–62.

[23] Decca R., Aksyuk V., Lopez D. Casimir force in micro and nano electro mechanical systems // Lect. Notes Phys. — 2011. — Vol. 834. — P. 287–309.

[24] Capasso F., Munday J. N., Chan H. B. Attractive and repulsive Casimir-Lifshitz forces, QED torques, and applications to nanomachines // Lect. Notes Phys. — 2011. — Vol. 834. — P. 249–286.

[25] Тихонов А. Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных // Бюлл. МГУ, секция А. – 1938. – Т. 1. – С. 1–49.

[26] Multiple reflection expansion and heat kernel coefficients / Bordag M., Vassilevich D., Falomir H., and Santangelo E. M. // Phys. Rev. D. — 2001. — Vol. 64. — P. 045017.

[27] Thermal Casimir effect for Drude metals in the plane-sphere geometry / Canaguier-Durand A., Neto P. A. M., Lambrecht A., and Reynaud S. // Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 82. — P. 012511.