

## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ ЭЛЕКТРОСЛАБЫЕ ПОПРАВКИ С УЧЕТОМ ЖЕСТКОГО ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОЛЯРИЗАЦИОННОМ БАБА-РАССЕЯНИИ

© 2020 г. А. Г. Алексеев<sup>1)</sup>, С. Г. Барканова<sup>1)</sup>, Ю. М. Быстрицкий<sup>2)</sup>, В. А. Зыкунов<sup>2),3)</sup>\*

Поступила в редакцию 11.12.2019 г.; после доработки 11.12.2019 г.; принята к публикации 11.12.2019 г.

Рассчитаны полные однопетлевые электрослабые радиационные поправки, включая вклад жесткого тормозного излучения, к наблюдаемым величинам поляризационного Баба-рассеяния. Произведен численный анализ наблюдаемых поляризационных и пространственных асимметрий с учетом электрослабых поправок для низкоэнергетических экспериментов типа Belle II и для будущего электрон-позитронного коллайдера ILC/CLIC.

**DOI:** 10.31857/S0044002720030034

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Процессы аннигиляции электрон-позитронной пары в пару фермионов играют фундаментальную роль в изучении природы микромира, начиная со становления КЭД и по настоящий момент, когда Стандартная модель электрослабых взаимодействий (СМ) обрела статус экспериментально подтвержденной теории. Среди особо значимых для электрослабой физики  $e^-e^+$ -машин нужно отметить две фабрики по производству массивных бозонов: SLC — Stanford Linear Collider — электрон-позитронный линейный коллайдер в лаборатории SLAC (Стэнфорд, США) с пучками с энергией в системе центра масс 90 ГэВ (его предшественник SPEAR обеспечил открытие  $\tau$ -лептона [1]) и LEP — Large Electron Positron (Ring) — кольцевой  $e^+e^-$ -коллайдер в CERN с первоначальной энергией 50 ГэВ. Коллайдеры SLC и LEP дали столь много точной информации, что основные аспекты электрослабой теории были прецизионно проверены и твердо установлены.

Процесс электрон-позитронной аннигиляции отнюдь не исчерпал свой потенциал и по настоящий день. Успешно продолжают свою работу установки VEPP (Новосибирск) и BEPC-II (Пекин, Китай), нацеленные на изучение мезонной физики. Интересна программа для производства  $B$ -мезонов Belle II (КЕК, Япония), одной из главных целей которой будет определение важнейшего параметра СМ — синуса угла Вайнберга  $\sin\theta_W$  в канале

$e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  при энергии ниже  $Z$ -резонанса [для Belle II в системе центра масс (с.ц.м.)  $e^-$  и  $e^+$  энергия реакции  $\sqrt{s} = m(\Upsilon_{4S}) = 10.577$  ГэВ]. Измерения Belle II прекрасно дополняют данные, которые были получены для  $\sin^2\theta_W$  из экспериментов E-158 (SLAC) и QWeak (JLab) и которые планируется существенно уточнить в эксперименте MOLLER (JLab).

С электрон-позитронными коллайдерами нового поколения: Международным линейным коллайдером (International Linear Collider, ILC) с планируемой энергией реакции 1 ТэВ (до 2 ТэВ после модернизации) и параллельно развивающимся с ним проектом — Компактный линейный коллайдер (Compact Linear Collider, CLIC) с суммарной энергией до 3 ТэВ, связаны серьезные перспективы в поиске новой физики (НФ): проявления дополнительных измерений, суперсимметрии, кандидатов на темную материю и, если НФ будет до этого обнаружена на LHC, ее интенсивное и прецизионное изучение, чему поможет относительная “чистота” лептонного типа реакций на ILC/CLIC. Новый проект “Будущий циклический коллайдер” (Future Circular Collider, FCC) с энергией пучков в лептонном режиме (FCC-ee) от 45 до 175 ГэВ направлен на точное изучение свойств нового скалярного (хиггсовского) бозона в продолжение открытия LHC [2] и физику топ-кварка. В работе ILC/CLIC/FCC возможна также электрон-электронная (меллеровская) мода, которая, как и при более низких энергиях в эксперименте E-158 (SLAC) и в планируемом эксперименте MOLLER в JLab, может быть чрезвычайно интересна как для прецизионных тестов и измерений СМ, так и для поисков НФ [3].

Процесс рассеяния электронов на позитронах с таким же конечным состоянием занимает уникаль-

<sup>1)</sup> Университет Мемориал, Корнер Брук, Канада.

<sup>2)</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.

<sup>3)</sup> Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Беларусь.

\*E-mail: zykunov@cern.ch

ное положение среди 4-фермионных процессов: тождественность масс создает особые возможности по постановке эксперимента, хотя и существенно усложняет расчет наблюдаемых величин, особенно в высших порядках теории возмущений. Впервые сечение рассеяния этого процесса в рамках КЭД на борновском уровне вычислил Х. Баба в [4] (в его честь дано название процесса — “Баба-рассеяние”). Очевидно, что для того чтобы получить надежную информацию из экспериментальных данных, необходимо точно учесть эффекты высших порядков в СМ — электрослабые радиационные поправки (ЭСП). Включение ЭСП на уровне одной или больше петель является неотъемлемой частью любого современного эксперимента. Одними из первых работ по расчету электромагнитных радиационных поправок к процессу Баба были работы Берендса с соавторами, например, [5]. Затем, на основе техники, описанной в работах [6–8], анализ ЭСП в рассеянии Баба был осуществлен в [9, 10]. Для нужд коллайдеров LEP и SLC потребовалось систематическое прецизионное включение ЭСП в точном соответствии с экспериментальными возможностями детекторов, соответствующее программное обеспечение в обсуждаемом канале описано, например, в [11].

В нашей предыдущей работе [12] целью ставилось получение двух наборов асимптотических формул, имеющих простой компактный вид, но тем не менее надежно работающих (это доказывается успешным сравнением с точными результатами, полученными методами компьютерной алгебры FeynArts/FormCalc [13]) при энергиях в стороне от  $Z$ -резонанса. В этой работе к полученным в [12] результатам для  $V$ -вклада добавим  $R$ -вклад, делая акцент на аккуратном учете жесткого тормозного излучения (ТИ), и проделаем полный численный анализ важных наблюдаемых величин. Изучаемые области (с точки зрения масштаба энергии) описываются следующими терминами:

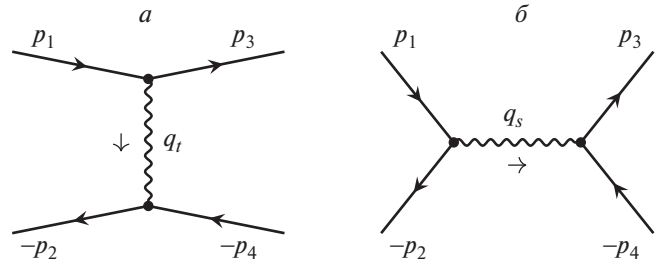
1. LE-режим (от “low energies”, низкие энергии):  $m_f \ll \sqrt{s} \ll m_W$ ,
2. HE-режим (от “high energies”, высокие энергии):  $\sqrt{s} \gg m_Z$ .

## 2. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА

Процесс рассеяния Баба в рамках СМ записывается следующей формулой:

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + e^+(p_4). \quad (1)$$

В ней обозначены частицы, участвующие в реакции: в начальном (конечном) состоянии электрон



**Рис. 1.** Фейнмановские диаграммы процесса  $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$  с безрадиационной кинематикой ( $a$  —  $t$ -канальная,  $b$  —  $s$ -канальная). Внутренней волнистой линией на этой и последующих диаграммах обозначены фотон или  $Z$ -бозон.

$e^-$  и позитрон  $e^+$ , в промежуточном состоянии фотон  $\gamma$  и  $Z$ -бозон. В скобках стоят 4-импульсы начальных и конечных частиц. Фейнмановские диаграммы, соответствующие процессу (1) в борновском приближении, изображены на рис. 1.

Четыре-импульсы начальных частиц ( $p_1$  и  $p_2$ ) и конечных частиц ( $p_3$  и  $p_4$ ) образуют стандартный набор лоренц-инвариантных переменных Мандельштама:

$$s = q_s^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad (2)$$

$$t = q_t^2 = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_2 - p_3)^2.$$

Далее, если особо не оговаривается, приводятся только результаты, соответствующие ультррелятивистскому приближению (УРП):

$$s, -t, -u \gg m^2, \quad (3)$$

где  $m$  — масса электрона. УРП в общем случае можно описать так: все лоренц-инварианты много больше (по абсолютной величине) всех фермионных масс.

## 3. ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА

Для записи амплитуды процесса используем следующие правила Фейнмана (следуем обзору [6]):

Входящему фермиону с 4-импульсом  $p$  соответствует биспинорная амплитуда  $u(p)$ , выходящему соответствует биспинорная амплитуда  $\bar{u}(p)$ .

Выходящему бозону с 4-импульсом  $p$  соответствует вектор поляризации  $e_\rho(p)$ .

Пропагатору бозона (в калибровке Фейнмана) соответствует выражение

$$-ig^{\alpha\beta} D_a(q), \quad (4)$$

где бозонный пропагатор  $D_a$  определяется формулой

$$D_a(q) = \frac{1}{q^2 - m_a^2 + im_a\Gamma_a}, \quad (5)$$

$$a = \gamma, Z,$$

$q$  — 4-импульс передачи в пропагаторе. Фотонная масса  $m_\gamma \equiv \lambda$  равна нулю везде, кроме специально отмеченных ниже случаев, где она используется как инфинитезимальный параметр, который регулирует инфракрасную расходимость. Масса  $Z$ -бозона обозначена как  $m_Z$ , его ширина —  $\Gamma_Z$  (используется схема с фиксированной шириной).

Фермионный (электронный) пропагатор выглядит так ( $p$  — 4-импульс передачи в пропагаторе):

$$iS(p) = i \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (6)$$

Вершине взаимодействия фермиона  $f$  с калибровочным бозоном  $a$  сопоставляется выражение

$$ie\gamma_\mu \Gamma_f^a, \quad \text{где } \Gamma_f^a = v_f^a - a_f^a \gamma_5. \quad (7)$$

Векторные и аксиально-векторные константы связи фермиона  $f$  с фотоном и  $Z$ -бозоном имеют вид:

$$v_f^\gamma = -Q_f, \quad a_f^\gamma = 0, \quad (8)$$

$$v_f^Z = \frac{I_f^3 - 2Q_f s_W^2}{2s_W c_W}, \quad a_f^Z = \frac{I_f^3}{2s_W c_W}.$$

В записи векторных и аксиальных констант в процессе Баба везде, кроме петлевых вставок в поляризации вакуума, индекс  $f = e$  и его будем опускать.

В работе используются следующие параметры СМ:  $Q_f$  — электрический заряд  $f$ -частицы в единицах протонного заряда, третья компонента слабого изоспина (тут конкретизируем тип фермиона):

$$I_\nu^3 = +\frac{1}{2}, \quad I_e^3 = -\frac{1}{2}, \quad (9)$$

$$I_u^3 = +\frac{1}{2}, \quad I_d^3 = -\frac{1}{2},$$

а  $s_W$  ( $c_W$ ) — синус (косинус) угла Вайнберга, которые связаны с массами  $Z$ - и  $W$ -бозона согласно правилам СМ:

$$c_W = \frac{m_W}{m_Z}, \quad s_W = \sqrt{1 - c_W^2}. \quad (10)$$

#### 4. СЕЧЕНИЯ С БЕЗРАДИАЦИОННОЙ КИНЕМАТИКОЙ

Применим вышеперечисленные правила Фейнмана, тогда амплитуды процесса Баба в приближении Борна, соответствующие рис. 1, выглядят так:

$$\mathcal{M}_t^a = e^2 Q_e^2 D_a(q_t) \cdot \bar{u}(p_3) \gamma_\mu \times \quad (11)$$

$$\times \Gamma^a u(p_1) \cdot \bar{u}(-p_2) \gamma_\mu \Gamma^a u(-p_4),$$

$$\mathcal{M}_s^a = -e^2 Q_e^2 D_a(q_s) \cdot \bar{u}(-p_2) \gamma_\mu \times \quad (12)$$

$$\times \Gamma^a u(p_1) \cdot \bar{u}(p_3) \gamma_\mu \Gamma^a u(-p_4).$$

Все детали построения сечений с безрадиационной кинематикой изложены в [12]. В этом разделе для полноты изложения приводятся основные полученные формулы. В вершинах фигурирует  $Q_e$  — заряд электрона в элементарных зарядах  $e$ , для ясности:  $Q_e = -1$ . Полную амплитуду процесса с обменом бозоном  $a$  получаем, суммируя

$$\mathcal{M}_0^a = \mathcal{M}_t^a + \mathcal{M}_s^a. \quad (13)$$

Сформируем сечение процесса, для этого нужно квадратировать амплитуду  $\mathcal{M}_0$  и упростить фазовый объем реакции. В результате получаем дифференциальное (по углу рассеяния) сечение процесса (1) в борновском приближении

$$\frac{d\sigma^0}{dc} = \frac{1}{2^5 \pi s} \sum_{a,b=\gamma,Z} \mathcal{M}_0^a \mathcal{M}_0^{b+}, \quad (14)$$

где  $c = \cos \theta$  — косинус угла между начальным электроном и конечным (детектируемым) электроном в с.ц.м. начальных частиц.

Запишем сечение реакции в симметричном виде, это существенно облегчит программирование и анализ физического содержания. Общая форма записи сечения будет такая:

$$\frac{d\sigma^0}{dc} = \frac{\pi \alpha^2}{2s} \sum_{k=1}^4 \sum_{a,b=\gamma,Z} \Pi_k^{ab} S_k^{aab}, \quad (15)$$

где  $k = \{rr'\} = \{tt, ts, st, ss\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Пропагаторы бозонов встречаются в комбинациях

$$\Pi_{rr'}^{ab} \equiv D_a(q_r) D_b^*(q_{r'}).$$

Вычисляя следы, получим выражения  $S_k$  в следующем виде (см. [12]):

$$\frac{1}{2} S_{tt}^{abc} = P_2^- f_+^{abc} u^2 + P_2^+ f_-^{abc} s^2 - \quad (16)$$

$$- P_1^- g_+^{abc} u^2 + P_1^+ g_-^{abc} s^2,$$

$$\frac{1}{2} S_{ts}^{abc} = \frac{1}{2} S_{st}^{abc} = P_2^- f_+^{abc} u^2 - P_1^- g_+^{abc} u^2,$$

$$\frac{1}{2} S_{ss}^{abc} = P_2^- (f_+^{abc} u^2 + f_-^{abc} t^2) -$$

$$- P_1^- (g_+^{abc} u^2 - g_-^{abc} t^2).$$

Присутствующие здесь новые величины  $f_\pm$  и  $g_\pm$  выражаются через комбинации констант связи  $g_{V,A}$ :

$$f_\pm^{abc} = g_V^{ac} g_V^{bc} \pm g_A^{ac} g_A^{bc}, \quad (17)$$

$$g_\pm^{abc} = g_V^{ac} g_A^{bc} \pm g_A^{ac} g_V^{bc},$$

$$g_V^{ab} = v^a v^b + a^a a^b, \quad g_A^{ab} = v^a a^b + a^a v^b, \quad (18)$$

и четыре комбинации степеней поляризации электрона  $\lambda_1$  и позитрона  $\lambda_2$ :

$$P_1^\pm = \lambda_1 \pm \lambda_2, \quad P_2^\pm = 1 \pm \lambda_1 \lambda_2. \quad (19)$$

Вклад дополнительных виртуальных частиц ( $V$ -вклад) представлен тремя классами диаграмм: бозонные собственные энергии (boson self energies, BSE), вершинные функции (vertices, Ver) и двухбозонный обмен (боксы, Box); они обозначаются индексами:  $C = V = \text{BSE, Ver, Box}$ . В схеме перенормировки на массовой поверхности нет однопетлевых вкладов от электронных собственных энергий. Диаграммы, соответствующие вкладам дополнительных виртуальных частиц, представлены и описаны в работе [12].

Сечение вклада бозонных собственных энергий получаем в борноподобном виде:

$$\frac{d\sigma^{\text{BSE}}}{dc} = \frac{\pi\alpha^2}{s} \sum_{k=1}^4 \sum_{a,b,c=\gamma,Z} \Pi_k^{abc} S_k^{abc}. \quad (20)$$

Сечение вершинных вкладов имеет вид

$$\frac{d\sigma^{\text{Ver}}}{dc} = \frac{\pi\alpha^2}{s} \sum_{k=1}^4 \sum_{a,b=\gamma,Z} \Pi_k^{ab} (S_k^{F_a,ab} + S_k^{aF_b}), \quad (21)$$

здесь расчет следует работе [6], где используются перенормированные вершинные формфакторы в качестве эффективных констант связи.

Сечение, соответствующее вкладу боксовых диаграмм в NLO, выглядит так (все детали их расчета находятся в [12]):

$$\frac{d\sigma^{\text{Box}}}{dc} = \frac{1}{2^4\pi s} \text{Re} \sum_{c=\gamma,Z} \mathcal{M}_{\text{Box}} \mathcal{M}_0^{c+}, \quad (22)$$

где амплитуда боксов имеет вид суммы от всех возможных вариантов (классов диаграмм):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{Box}} = & \mathcal{M}_t^{\gamma\gamma} + \mathcal{M}_t^{\gamma Z} + \\ & + \mathcal{M}_t^{Z\gamma} + \mathcal{M}_t^{ZZ} + \mathcal{M}_t^{WW} + (t \rightarrow s). \end{aligned} \quad (23)$$

Амплитуды, соответствующие диаграммам двухфотонного обмена, обозначаются в общем виде так:  $\mathcal{M}_{t(s),D(C)}^{ab}$ . Первые три типа содержат как прямой, так и перекрестный бокс:

$$\mathcal{M}_t^{ab} = \mathcal{M}_{t,D}^{ab} + \mathcal{M}_{t,C}^{ab} \quad (\text{здесь } a, b = \gamma, Z),$$

а  $WW$ -тип содержит только прямой бокс (как для  $t$ -, так и для  $s$ -канала):

$$\mathcal{M}_t^{WW} = \mathcal{M}_{t,D}^{WW},$$

так как перекрестный бокс запрещен законом сохранения заряда.

## 5. НАБЛЮДАЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Введем три наблюдаемые асимметрии, построенные на основе введенного дифференциального

сечения  $d\sigma^C/dc$ . Индекс  $C$  (от “Contribution”) означает рассматриваемый вклад в сечение и принимает значения  $C = 0, V, \text{soft, VS, hard, NLO}$ , где “0” означает борновский вклад (часто его обозначают также как “LO” — Leading Order), “NLO” означает сумму всех вкладов с точностью до однопетлевых (Next-to-Leading Order).

Первая наблюдаемая величина — поляризационная асимметрия (или single spin asymmetry, т.е. асимметрия с одиночной поляризацией):

$$A_{LR}^C = A_{LR}^C(\theta) = \frac{\frac{d\sigma_{L0}^C}{dc} - \frac{d\sigma_{R0}^C}{dc}}{\frac{d\sigma_{L0}^C}{dc} + \frac{d\sigma_{R0}^C}{dc}}, \quad (24)$$

скомбинированная из сечений:

$$d\sigma_{L0}^C = \frac{1}{2} (d\sigma_{LL}^C + d\sigma_{LR}^C), \quad (25)$$

$$d\sigma_{R0}^C = \frac{1}{2} (d\sigma_{RL}^C + d\sigma_{RR}^C),$$

которые соответствуют рассеянию левополяризованного (правополяризованного) электрона на неполяризованном позитроне. На борновском уровне имеется возможность получить компактные выражения для асимметрии в LE-режиме:

$$A_{LR}^0|_{\text{LE}} = \frac{8v^Z a^Z s t u^3}{m_Z^2 (s^4 + t^4 + u^4)} \quad (26)$$

и в HE-режиме:

$$A_{LR}^0|_{\text{HE}} = \frac{u^4 \sum g_+^{aab}}{u^4 \sum f_+^{aab} + (s^4 + t^4) \sum f_-^{aab}} \quad (27)$$

(суммирование идет по  $a$  и  $b$ :  $a, b = \gamma, Z$ ).

Вторая наблюдаемая величина — поляризационная интегральная асимметрия:

$$A_{LR\Sigma}^C = A_{LR\Sigma}^C(a) = \frac{\Sigma_L^C - \Sigma_R^C}{\Sigma_L^C + \Sigma_R^C}, \quad (28)$$

сформированная из аналогичных (25) сечений

$$\Sigma_L^C = \int_{-\cos a}^{\cos a} \frac{d\sigma_{L0}^C}{dc} \cdot dc, \quad \Sigma_R^C = \int_{-\cos a}^{\cos a} \frac{d\sigma_{R0}^C}{dc} \cdot dc.$$

На борновском уровне получаем выражения для асимметрии в LE-режиме:

$$\begin{aligned} A_{LR\Sigma}^0|_{\text{LE}} = & \frac{4v^Z a^Z s s_a^2}{m_Z^2} \times \\ & \times \frac{c_a(21 + c_a^2) + 12l_a}{c_a(c_a^4 + 26c_a^2 - 75) - 24s_a^2 l_a} \end{aligned} \quad (29)$$

и в HE-режиме:

$$A_{LR\Sigma}^0|_{HE} = \frac{[c_a(c_a^4 + 50c_a^2 - 99) - 48s_a^2 l_a] \sum g_+^{aab}}{[c_a(c_a^4 + 50c_a^2 - 99) - 48s_a^2 l_a] \sum f_+^{aab} + [c_a^4 - 2c_a^2 - 51] \sum f_-^{aab} c_a}, \quad (30)$$

где

$$c_a = \cos a, \quad s_a = \sin a, \quad l_a = \ln \frac{1 - c_a}{1 + c_a}.$$

Третья наблюдаемая величина — асимметрия перед-назад:

$$A_{FB}^C = A_{FB}^C(a) = \frac{\Sigma_F^C - \Sigma_B^C}{\Sigma_F^C + \Sigma_B^C}, \quad (31)$$

сформированная из сечений рассеяния в переднюю и заднюю полусферы с отступом на угол  $a$  от оси

пучка:

$$\Sigma_F^C = \int_0^{\cos a} \frac{d\sigma_{00}^C}{dc} \cdot dc, \quad \Sigma_B^C = \int_{-\cos a}^0 \frac{d\sigma_{00}^C}{dc} \cdot dc.$$

На борновском уровне получаем выражения для асимметрии в LE-режиме:

$$A_{FB}^0|_{LE} = 3 \frac{c_a^2(c_a^2 - 17) - 8s_a^2 \ln s_a^2}{c_a(c_a^4 + 26c_a^2 - 75) - 24s_a^2 l_a} \quad (32)$$

и в HE-режиме:

$$A_{FB}^0|_{HE} = \frac{1}{3} \frac{-c_a^2[(15 + c_a^2) \sum f_-^{aab} + (19 - 3c_a^2) \sum f_+^{aab}] - 16s_a^2 \ln s_a^2 \sum f_+^{aab}}{c_a[(c_a^4 + 2c_a^2 - 51) \sum f_-^{aab} + (c_a^4 + 50c_a^2 - 99) \sum f_+^{aab}] - 48s_a^2 l_a \sum f_+^{aab}}. \quad (33)$$

С помощью полученных формул для борновских асимметрий легко понять их характерные особенности (экстремумы, масштаб), они отображены на рис. 2–4.

## 6. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ: КИНЕМАТИКА, АМПЛИТУДЫ, СЕЧЕНИЕ

Тормозное излучение

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + e^+(p_4) + \gamma(p), \quad (34)$$

т.е. процесс, который “сопровождает” исследуемый процесс (1) и неотличим от него в инклюзивной постановке эксперимента (где тормозной фотон не детектируется). Кроме того, даже без предположений о постановке эксперимента неотличимость процессов совершенно очевидна при малых энергиях тормозного фотона; такой процесс будем называть мягким тормозным излучением. Кинематика мягкого ТИ, соответственно, неотличима от кинематики безрадиационного процесса (1). В сумме сечение процесса (1) и сечение мягкого ТИ представляют инфракрасно-конечную величину, однако эта сумма содержит дополнительный параметр — максимальную энергию (мягкого) тормозного фотона  $\omega$ .

Фейнмановские диаграммы процесса ТИ (34) приведены на рис. 5 ( $t$ -канальные) и рис. 6 ( $s$ -канальные). Диаграммы рис. 5а, 5в, 6а, 6б соответствуют излучению из начального состояния, остальные — излучению из конечного состояния.

Введем лоренц-инварианты, описывающие радиационный процесс. Используем четыре радиационных инварианта:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2p_1 p, & v_1 &= 2p_2 p, \\ z &= 2p_3 p, & v &= 2p_4 p, \end{aligned} \quad (35)$$

которые обращаются в нуль при  $p \rightarrow 0$  и не являются независимыми: так, благодаря законам сохранения, они и инварианты  $s, t, u$  связаны соотношениями

$$z_1 + v_1 = z + v, \quad s + t + u = v + 4m^2. \quad (36)$$

Далее вводятся три инварианта:

$$\begin{aligned} s_1 &= q_{s_1}^2 = (p_3 + p_4)^2, \\ t_1 &= q_{t_1}^2 = (p_2 - p_4)^2, & u_1 &= (p_1 - p_4)^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Следует сказать, что из шести инвариантов ( $s, t, u, s_1, t_1, u_1$ ) только инвариант  $s$  не зависит от  $c$  ( $s = 4E^2$ , где  $E$  — энергия электрона (позитрона) в с.ц.м.), остальные зависят от  $c$ , причем по-разному в безрадиационном и радиационном случаях. Определения всех инвариантов и их связь с входными параметрами (ими в этой ситуации являются  $E$  и  $c$ ) в ультрарелятивистской форме приведены в табл. 1.

Инвариант  $t$  в радиационном случае свяжем в с.ц.м. с углом рассеяния, приведем точный вид этой

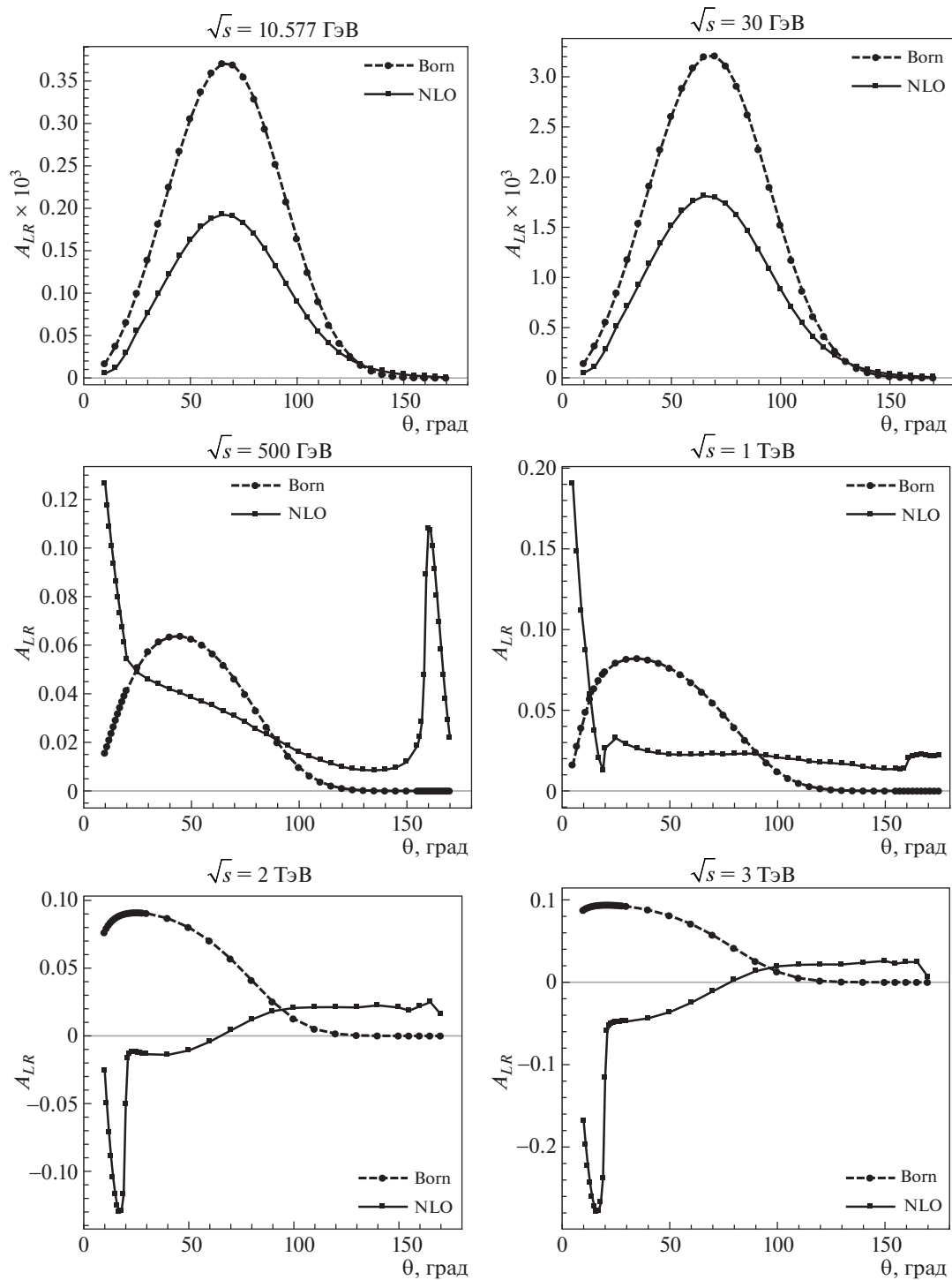


Рис. 2. Зависимость поляризационных асимметрий  $A_{LR}$  от  $\theta$ .

связи:

$$t = \frac{1}{2} \left( 4m^2 - s + v + \right. \quad (38)$$

$$\left. + c \cdot \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \sqrt{(s-v)^2 - 4m^2s} \right),$$

инвариант  $u$  определяется сходной формулой, но с другим знаком при  $s$ .

Применяя вышеупомянутые правила Фейнмана, выпишем амплитуды радиационных процессов. Удобно группировать их попарно, суммируя диаграммы с излучением из одной фермионной линии, итого получим четыре амплитуды  $R_j^a$ ,  $j = \overline{1, 4}$ . Ам-

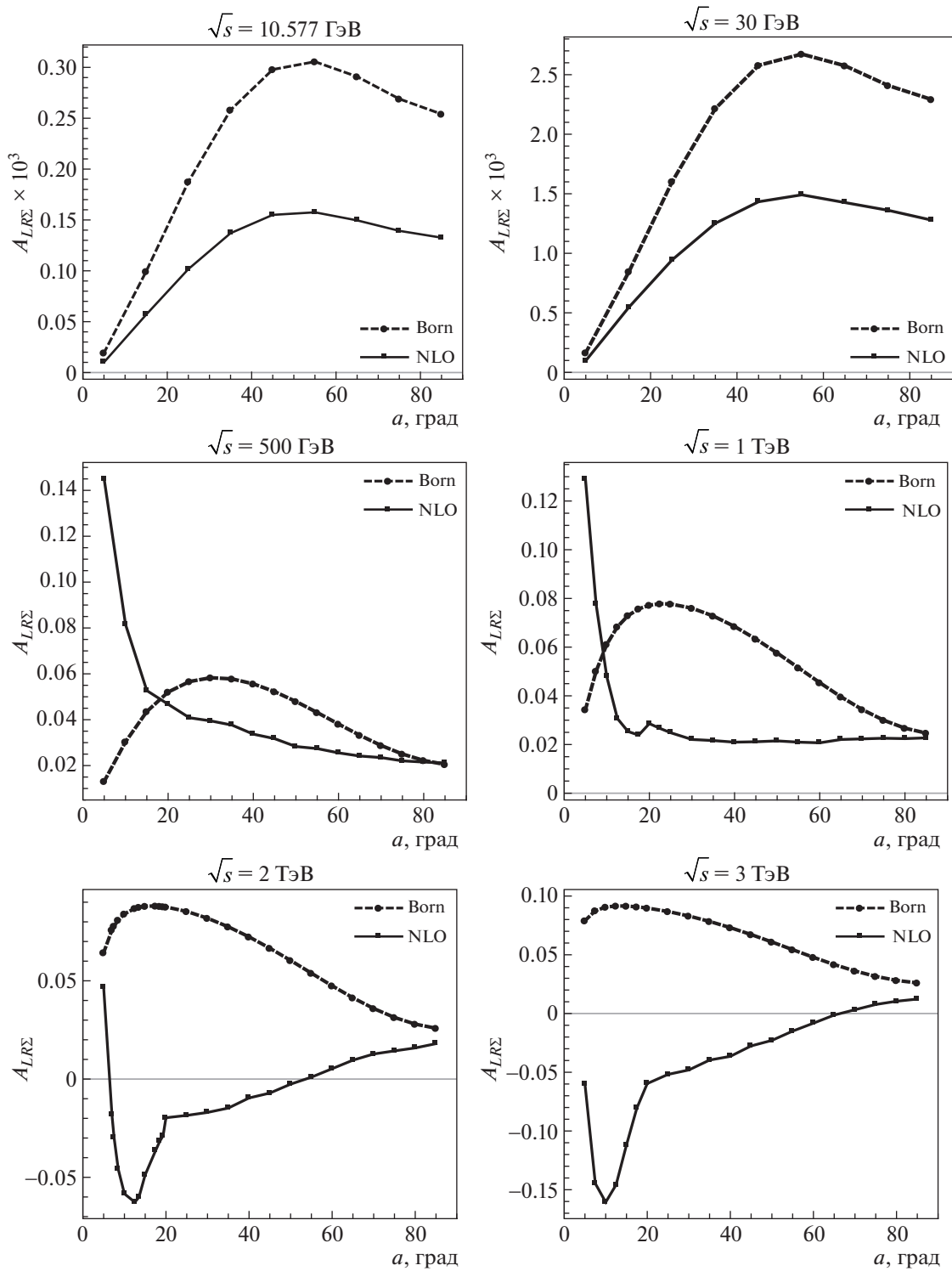


Рис. 3. Зависимость интегральных поляризационных асимметрий  $A_{LR\Sigma}$  от угла  $a$ .

плитуда, соответствующая диаграммам рис. 5а и где рис. 5б, такая:

$$R_1^a = ie_\rho(p)D_a(q_{t_1}) \cdot \bar{u}(p_3)(\Gamma_1^a)^{\mu\rho}u(p_1) \times \\ \times \bar{u}(-p_2)\gamma_\mu\Gamma^a u(-p_4),$$

$$(\Gamma_1^a)^{\mu\rho} = \gamma^\mu\Gamma^a\frac{\hat{p} - \hat{p}_1 - m}{z_1}\gamma^\rho + \\ + \gamma^\rho\frac{\hat{p} + \hat{p}_3 + m}{z}\gamma^\mu\Gamma^a,$$

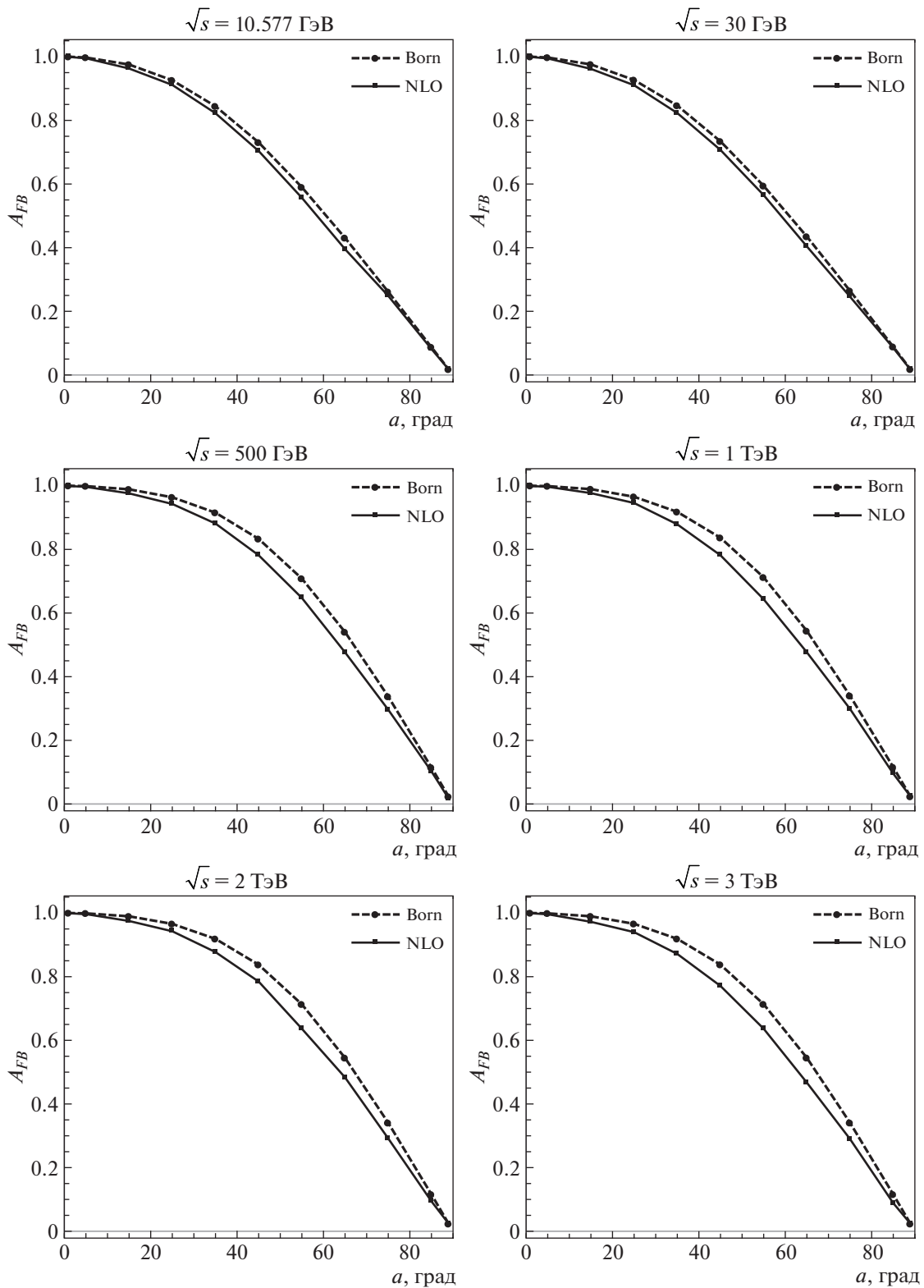


Рис. 4. Зависимость асимметрий вперед-назад  $A_{FB}$  от угла  $a$ .

а  $e_\rho(p)$  — вектор поляризации тормозного фотона с 4-импульсом  $p$ .

Поясним, как получились комбинации ферми-

онных пропагаторов в этой амплитуде. Стартуем с правил Фейнмана, затем возводим в квадрат и упрощаем с учетом  $p_1^2 = m^2$  (электрон лежит на



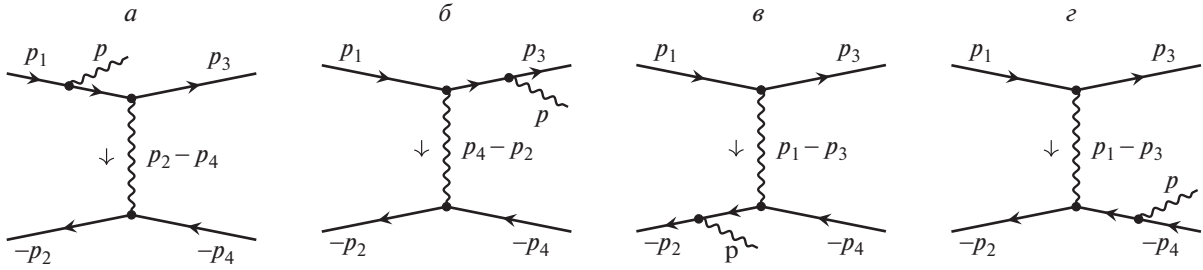


Рис. 5.  $t$ -канальные фейнмановские диаграммы процесса с излучением тормозного фотона  $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+\gamma$ .

массовой поверхности) и  $p^2 = 0$  (фотон реальный, с нулевой массой):

$$S(p_1 - p) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p} + m}{(p_1 - p)^2 - m^2} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p} + m}{p_1^2 - 2p_1p + p^2 - m^2} = \frac{\hat{p} - \hat{p}_1 - m}{z_1}.$$

Амплитуда, соответствующая диаграммам рис. 5в и рис. 5г, строится аналогично:

$$R_2^a = ie_\rho(p)D_a(q_t) \cdot \bar{u}(p_3)\gamma_\mu\Gamma^a u(p_1) \times \bar{u}(-p_2)(\Gamma_2^a)^{\mu\rho} u(-p_4),$$

где

$$(\Gamma_2^a)^{\mu\rho} = \gamma^\mu\Gamma^a \frac{-\hat{p} - \hat{p}_4 + m}{v} \gamma^\rho + \gamma^\rho \frac{-\hat{p} + \hat{p}_2 - m}{v_1} \gamma^\mu\Gamma^a.$$

Диаграммы рис. 6а и рис. 6б дают

$$R_3^a = -ie_\rho(p)D_a(q_{s_1}) \times \bar{u}(-p_2)(\Gamma_3^a)^{\mu\rho} u(p_1) \cdot \bar{u}(p_3)\gamma_\mu\Gamma^a u(-p_4),$$

Таблица 1. Инварианты для безрадиационного и радиационного случаев в УРП

Инвариант	Безрадиационный случай	Радиационный случай
$s = (p_1 + p_2)^2$	$4E^2$	$4E^2$
$t = (p_1 - p_3)^2$	$-s(1 - c)/2$	$(v - s)(1 - c)/2$
$u = (p_2 - p_3)^2$	$-s(1 + c)/2$	$(v - s)(1 + c)/2$
$z_1 = 2pp_1$	0	$z_1$
$v_1 = 2pp_2$	0	$v_1$
$z = 2pp_3$	0	$z_1 + v_1 - v$
$v = 2pp_4$	0	$v$
$s_1 = (p_3 + p_4)^2$	$s$	$s - z_1 - v_1$
$t_1 = (p_2 - p_4)^2$	$t$	$t - v + v_1$
$u_1 = (p_1 - p_4)^2$	$u$	$u - v + z_1$

$$(\Gamma_3^a)^{\mu\rho} = \gamma^\mu\Gamma^a \frac{\hat{p} - \hat{p}_1 - m}{z_1} \gamma^\rho + \gamma^\rho \frac{-\hat{p} + \hat{p}_2 - m}{v_1} \gamma^\mu\Gamma^a.$$

Наконец, диаграммы рис. 6в и рис. 6г формируют амплитуду

$$R_4^a = -ie_\rho(p)D_a(q_s) \cdot \bar{u}(-p_2)\gamma_\mu\Gamma^a u(p_1) \times \bar{u}(p_3)(\Gamma_4^a)^{\mu\rho} u(-p_4),$$

где

$$(\Gamma_4^a)^{\mu\rho} = \gamma^\mu\Gamma^a \frac{-\hat{p} - \hat{p}_4 + m}{v} \gamma^\rho + \gamma^\rho \frac{\hat{p} + \hat{p}_3 + m}{z} \gamma^\mu\Gamma^a.$$

Существует хорошая возможность упростить выражения  $\Gamma_j^a$ . Это осуществляется следующим образом: рассмотрим для примера комбинацию  $\bar{u}(p_3)(\Gamma_1^a)^{\mu\rho} u(p_1)$ , входящая в него конструкция упрощается с использованием коммутационных свойств матриц Дирака:

$$\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha = 2g^{\alpha\beta}$$

и уравнения Дирака так:

$$\begin{aligned} (-\hat{p}_1 - m)\gamma^\rho u(p_1) &= -(p_{1\alpha}\gamma^\alpha\gamma^\rho + m\gamma^\rho)u(p_1) = \\ &= -(p_{1\alpha}[2g^{\alpha\rho} - \gamma^\rho\gamma^\alpha] + m\gamma^\rho)u(p_1) = \\ &= -(2p_1^\rho - \gamma^\rho[\hat{p}_1 - m])u(p_1) = -2p_1^\rho u(p_1). \end{aligned}$$

Тогда, протаскивая матрицу  $\Gamma^a$  на правую или, при необходимости, на левую сторону выражения (это возможно через четное число гамма-матриц), получаем упрощенную форму записи:

$$(\Gamma_1^a)^{\mu\rho} = \left( \gamma^\mu \frac{\hat{p}\gamma^\rho - 2p_1^\rho}{z_1} + \gamma^\rho \frac{\hat{p} + 2p_3^\rho}{z} \gamma^\mu \right) \Gamma^a = \Gamma_1^{\mu\rho} \Gamma^a, \tag{39}$$

$$(\Gamma_2^a)^{\mu\rho} = \left( \gamma^\mu \frac{-\hat{p}\gamma^\rho - 2p_4^\rho}{v} + \gamma^\rho \frac{\hat{p} + \hat{p}_2 - m}{v_1} \gamma^\mu \right) \Gamma^a = \Gamma_2^{\mu\rho} \Gamma^a, \tag{40}$$

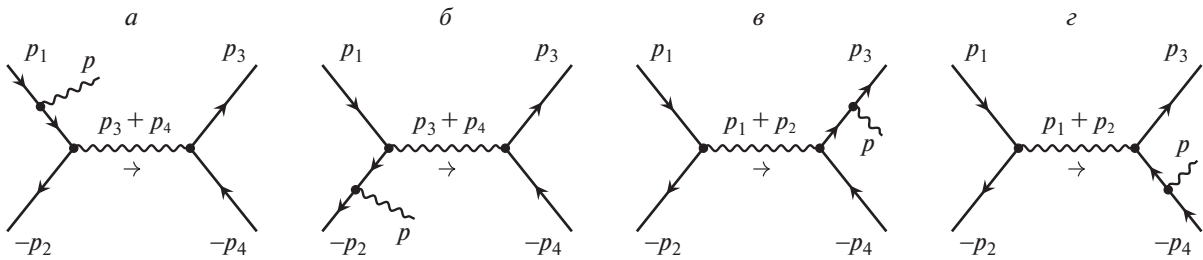


Рис. 6.  $s$ -канальные фейнмановские диаграммы процесса с излучением тормозного фотона  $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+\gamma$ .

$$+ \frac{-\gamma^\rho \hat{p} + 2p_2^\rho}{v_1} \gamma^\mu \Gamma^a = \Gamma_2^{\mu\rho} \Gamma^a, \quad (\Gamma_3^a)^{\mu\rho} = \left( \gamma^\mu \frac{\hat{p} \gamma^\rho - 2p_1^\rho}{z_1} + \right. \quad (41)$$

$$+ \frac{-\gamma^\rho \hat{p} + 2p_2^\rho}{v_1} \gamma^\mu \Gamma^a = \Gamma_3^{\mu\rho} \Gamma^a, \quad (\Gamma_4^a)^{\mu\rho} = \left( \gamma^\mu \frac{-\hat{p} \gamma^\rho - 2p_4^\rho}{v} + \right. \quad (42)$$

$$+ \frac{\gamma^\rho \hat{p} + 2p_3^\rho}{z} \gamma^\mu \Gamma^a = \Gamma_4^{\mu\rho} \Gamma^a.$$

Дифференциальное сечение процесса (34) имеет вид

$$d\sigma_R = \frac{\alpha^3}{\pi^2 s} \sum |R|^2 d\Phi_3, \quad (43)$$

где фазовый объем реакции записывается так:

$$d\Phi_3 = \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - p) \times \quad (44)$$

$$\times \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{2p_{30}} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{2p_{40}} \frac{d^3 \mathbf{p}}{2p_0}.$$

Теперь нам предстоит квадрировать амплитуду в (43), должным образом просуммировав и усреднив по поляризациям. Здесь можно опустить произведение зарядов, поскольку вполне очевидно, что  $Q_e^2 = (-1)^2 = 1$  во всех членах. Таким образом,

$$\sum |R|^2 = \sum_{a,b=\gamma,Z} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 R_j^a R_k^{b+}. \quad (45)$$

При квадрировании амплитуд используем свойство для вектора поляризации фотона:

$$e_\rho(p) e_{\rho'}(p) = -g_{\rho\rho'}. \quad (46)$$

Рассчитаем выражения для квадрированных амплитуд: всего будет 16 слагаемых, сначала запишем диагональные (следим за имеющейся симметрией записи):

$$R_1^a R_1^{b+} = -D_a(q_{t_1}) D_b^*(q_{t_1}) \times$$

$$\times \text{Tr}[\Gamma_1^{\mu\rho} U_1^{ab} \Gamma_1^{\nu\rho+} U_3] \text{Tr}[\gamma_\mu U_4^{ab} \gamma_\nu U_2],$$

$$R_2^a R_2^{b+} = -D_a(q_t) D_b^*(q_t) \times$$

$$\times \text{Tr}[\Gamma_2^{\mu\rho} U_4^{ab} \Gamma_2^{\nu\rho+} U_2] \text{Tr}[\gamma_\mu U_1^{ab} \gamma_\nu U_3],$$

$$R_3^a R_3^{b+} = -D_a(q_{s_1}) D_b^*(q_{s_1}) \times$$

$$\times \text{Tr}[\Gamma_3^{\mu\rho} U_1^{ab} \Gamma_3^{\nu\rho+} U_2] \text{Tr}[\gamma_\mu U_4^{ab} \gamma_\nu U_3],$$

$$R_4^a R_4^{b+} = -D_a(q_s) D_b^*(q_s) \times$$

$$\times \text{Tr}[\Gamma_4^{\mu\rho} U_4^{ab} \Gamma_4^{\nu\rho+} U_3] \text{Tr}[\gamma_\mu U_1^{ab} \gamma_\nu U_2].$$

Теперь приведем попарно недиагональные элементы:

$$R_1^a R_2^{b+} = -D_a(q_{t_1}) D_b^*(q_t) \times$$

$$\times \text{Tr}[\Gamma_1^{\mu\rho} U_1^{ab} \gamma_\nu U_3] \text{Tr}[\gamma_\mu U_4^{ab} \Gamma_2^{\nu\rho+} U_2],$$

$$R_2^a R_1^{b+} = -D_a(q_t) D_b^*(q_{t_1}) \times$$

$$\times \text{Tr}[\Gamma_2^{\mu\rho} U_4^{ab} \gamma_\nu U_2] \text{Tr}[\gamma_\mu U_1^{ab} \Gamma_1^{\nu\rho+} U_3],$$

$$R_1^a R_3^{b+} = +D_a(q_{t_1}) D_b^*(q_{s_1}) \times$$

$$\times \text{Tr}[\Gamma_1^{\mu\rho} U_1^{ab} \Gamma_3^{\nu\rho+} U_2 \gamma_\mu U_4^{ab} \gamma_\nu U_3],$$

$$R_3^a R_1^{b+} = +D_a(q_{s_1}) D_b^*(q_{t_1}) \times$$

$$\times \text{Tr}[\Gamma_3^{\mu\rho} U_1^{ab} \Gamma_1^{\nu\rho+} U_3 \gamma_\mu U_4^{ab} \gamma_\nu U_2],$$

$$R_1^a R_4^{b+} = +D_a(q_{t_1}) D_b^*(q_s) \times$$

$$\times \text{Tr}[\Gamma_1^{\mu\rho} U_1^{ab} \gamma_\nu U_2 \gamma_\mu U_4^{ab} \Gamma_4^{\nu\rho+} U_3],$$

$$R_4^a R_1^{b+} = +D_a(q_s) D_b^*(q_{t_1}) \times$$

$$\times \text{Tr}[\Gamma_4^{\mu\rho} U_4^{ab} \gamma_\nu U_2 \gamma_\mu U_1^{ab} \Gamma_1^{\nu\rho+} U_3],$$

$$R_2^a R_3^{b+} = +D_a(q_t) D_b^*(q_{s_1}) \times$$

$$\times \text{Tr}[\Gamma_2^{\mu\rho} U_4^{ab} \gamma_\nu U_3 \gamma_\mu U_1^{ab} \Gamma_3^{\nu\rho+} U_2],$$

$$R_3^a R_2^{b+} = +D_a(q_{s_1}) D_b^*(q_t) \times$$

$$\times \text{Tr}[\Gamma_3^{\mu\rho} U_1^{ab} \gamma_\nu U_3 \gamma_\mu U_4^{ab} \Gamma_2^{\nu\rho+} U_2],$$

$$R_2^a R_4^{b+} = +D_a(q_t) D_b^*(q_s) \times$$

$$\times \text{Tr}[\Gamma_2^{\mu\rho} U_4^{ab} \Gamma_4^{\nu\rho+} U_3 \gamma_\mu U_1^{ab} \gamma_\nu U_2],$$

$$R_4^a R_2^{b+} = +D_a(q_s) D_b^*(q_t) \times$$

$$\times \text{Tr}[\Gamma_4^{\mu\rho} U_4^{ab} \Gamma_2^{\nu\rho+} U_2 \gamma_\mu U_1^{ab} \gamma_\nu U_3],$$

$$\begin{aligned}
R_3^a R_4^{b+} &= -D_a(q_{s_1}) D_b^*(q_s) \times \\
&\times \text{Tr}[\Gamma_3^{\mu\rho} U_1^{ab} \gamma_\nu U_2] \text{Tr}[\gamma_\mu U_4^{ab} \Gamma_4^{\nu\rho+} U_3], \\
R_4^a R_3^{b+} &= -D_a(q_s) D_b^*(q_{s_1}) \times \\
&\times \text{Tr}[\Gamma_4^{\mu\rho} U_4^{ab} \gamma_\nu U_3] \text{Tr}[\gamma_\mu U_1^{ab} \Gamma_3^{\nu\rho+} U_2].
\end{aligned}$$

Прямое численное интегрирование (43) возможно с использованием, например, техники Монте-Карло, однако на этом пути возникает ряд проблем. Как основные выделим медленную сходимость и трудность контроля точности, в то время как (это уже отмечалось во введении) современные эксперименты предъявляют высочайшие требования к теоретической оценке наблюдаемых величин (в рамках СМ) в реакциях типа (1). Покажем, как построить “удовлетворительно” точную программу численного интегрирования.

## 7. МЯГКИЕ ФОТОНЫ

Рассчитаем сечение процесса с излучением мягкого фотона с энергией в с.ц.м. начальных частиц:

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2, \quad p_{10} = p_{20} = E = \sqrt{s}/2, \quad (47)$$

меньшей фиксированного значения  $\omega$ , такого, что  $\omega \ll E$ .

Прежде всего, сделаем приближение  $p \rightarrow 0$  везде, кроме части фазового объема  $\frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0}$  и знаменателей с  $p$ . Тогда амплитуды мягкого ТИ становятся пропорциональны борновским, что приводит к следующей факторизации:

$$\begin{aligned}
&(R_1^a + R_2^a + R_3^a + R_4^a)|_{p \rightarrow 0} \sim \\
&\sim e_\rho(p) \left( \frac{p_1^\rho}{pp_1} - \frac{p_2^\rho}{pp_2} - \frac{p_3^\rho}{pp_3} + \frac{p_4^\rho}{pp_4} \right) \mathcal{M}_0^a.
\end{aligned} \quad (48)$$

После квадрирования получим факторизацию также и перед борновским сечением:

$$\frac{d\sigma^{\text{soft}}}{dc} = \delta_{\text{soft}} \frac{d\sigma_0}{dc}, \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{soft}} &= -\frac{\alpha}{4\pi^2} \times \\
&\times \int_{|\mathbf{p}| < \omega} \frac{d^3\mathbf{p}}{p_0} \left( \frac{p_1^\rho}{pp_1} - \frac{p_2^\rho}{pp_2} - \frac{p_3^\rho}{pp_3} + \frac{p_4^\rho}{pp_4} \right)^2.
\end{aligned} \quad (50)$$

Для того чтобы вычислить поправку  $\delta_{\text{soft}}$ , требуется уметь рассчитывать интегралы вида

$$L_{ij} = \int_{|\mathbf{p}| < \omega} \frac{d^3\mathbf{p}}{p_0} \frac{1}{pp_i} \frac{1}{pp_j}, \quad (i, j) = \overline{1, 4}. \quad (51)$$

Соответствующая техника описана в работе [14]. Финальный ответ в УРП таков:

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{soft}} &= \frac{2\alpha}{\pi} \left[ 2 \ln \frac{2\omega}{\lambda} \left( \ln \frac{st}{m^2 u} - 1 \right) + \right. \\
&\left. + L_s - \frac{L_s^2}{2} - \frac{\pi^2}{3} + \text{Li}_2 \frac{-t}{u} - \text{Li}_2 \frac{-u}{t} \right].
\end{aligned} \quad (52)$$

Сумма виртуальных вкладов ( $C = V$ ) и мягкого тормозного излучения ( $C = S$ ) не зависит от  $\lambda$ . Установить это можно как численно, так и аналитически. Подобная процедура является стандартной для расчетов такого рода и является реализацией известной концепции Блоха–Нордсика [15].

## 8. ФАЗОВЫЙ ОБЪЕМ

Поработаем с фазовым объемом реакции  $2 \rightarrow 3$  из (44). Простой и математически ясный способ — это приведение его к форме с зависимостью от четырех (радиационных) инвариантов в духе учебника [16]:

$$d\Phi_3 = \frac{\pi}{16s\sqrt{-\Delta_4}} dt dz_1 dv_1 dv, \quad (53)$$

где  $\Delta_4 = \Delta_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$  — определитель Грама. Так было сделано, например, в работе [17], где рассчитан вклад жесткого ТИ в условиях эксперимента MOLLER. Следует признать, что, несмотря на внешнюю простоту и легкость интерпретации для компьютерного кода, вид фазового объема (53) представляет значительную трудность при интегрировании. Чтобы добиться необходимой скорости сходимости интеграла в таком подходе (назовем его  $M$ -методом), например, в работе [17] были предприняты значительные усилия в преобразовании (факторизации) подынтегрального выражения, комбинировании результата в виде относительных поправок  $\delta_\pm$ , предварительном разбиении результата по типам вкладов, удобных для программирования интегрирования и пр. Необходимая точность результата достигается, но также остро выявляется несоответствие объема затраченных усилий и полученной довольно слабой сходимости результата интегрирования.

Решение может быть получено на пути подходящего преобразования фазового объема (44) в с.ц.м. начальных частиц (47). Изобразим в ней векторы конечных частиц, см. рис. 7, используя вспомогательный вектор  $\mathbf{p}_5 = -\mathbf{p}$ . Прежде всего снимем интеграл по  $d^3\mathbf{p}_4$ , тогда

$$\begin{aligned}
d\Phi_3 &= \delta(\sqrt{s} - p_{30} - p_{40} - p_0) \times \\
&\times \frac{1}{2p_{40}} \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2p_{30}} \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0}.
\end{aligned} \quad (54)$$

Перейдем в сферическую систему координат (будем пользоваться двумя обозначениями для угла рассеяния:  $\theta_3 \equiv \theta$ ):

$$d^3 \mathbf{p}_3 = |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3| d \cos \theta_3 d\varphi_3$$

и применим соотношение  $|\mathbf{p}_3| d|\mathbf{p}_3| = p_{30} dp_{30}$ .

Теперь нужно снять интеграл по  $p_{30}$  с помощью оставшейся  $\delta$ -функции, используя свойство

$$\delta[f(x)] = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0), \quad (55)$$

где  $x_0$  — корень уравнения  $f(x_0) = 0$ . Функция  $f(x)$  в данном случае — это закон сохранения энергии, заданный в неявном виде:

$$f(x) = p_{30} + p_{40} + p_0 - \sqrt{s}, \quad (56)$$

где  $\sqrt{s}$  — полная энергия реакции, а  $x \equiv p_{30}$ . Несложно найти производную  $f'(x)$ :

$$f'(x) = 1 + \frac{x(1 - |\mathbf{p}|A(x^2 - m^2)^{-1/2})}{\sqrt{x^2 - 2|\mathbf{p}|A\sqrt{x^2 - m^2} + |\mathbf{p}|^2}}. \quad (57)$$

Возможные энергии конечного электрона найдем, решая закон сохранения энергии  $f(x_0^\pm) = 0$ :

$$x_0^\pm = \frac{BC \pm \sqrt{C^2 + m^2(1 - B^2)}}{1 - B^2}, \quad (58)$$

где коэффициенты

$$B = \frac{\sqrt{s} - p_0}{A|\mathbf{p}|}, \quad C = \frac{|\mathbf{p}|^2 - (\sqrt{s} - p_0)^2}{2A|\mathbf{p}|} \quad (59)$$

выражаются через фактор

$$\begin{aligned} A &= \cos(\widehat{\mathbf{p}_5, \mathbf{p}_3}) = \\ &= \sin \theta \sin \theta_5 \cos \varphi_5 + \cos \theta \cos \theta_5 = \\ &= -\sin \theta \sin \theta_p \cos \varphi_p - \cos \theta \cos \theta_p, \end{aligned} \quad (60)$$

который определяет, какой знак в (58) соответствует физическому значению энергии, а именно: при положительном значении  $A$  (в этой ситуации вектор вылетевшего фотона образует с вектором  $\mathbf{p}_3$  тупой угол, т.е. вылетает в противоположную полусферу) выбираем  $x_0^-$  и наоборот, т.е.

$$x_0 = \begin{cases} x_0^-, & \text{если } A > 0, \\ x_0^+, & \text{если } A < 0. \end{cases}$$

Эти соотношения могут быть представлены в следующем виде:

$$p_{30} = \frac{\sqrt{s^3} + 2p_0^2\sqrt{s} - 3p_0s + p_0As_q}{2s - 4p_0\sqrt{s} + 2p_0^2(1 - A^2)}, \quad (61)$$

где

$$s_q = \sqrt{s(\sqrt{s} - 2p_0)^2 + 4m^2 [p_0^2(A^2 - 1) + 2p_0\sqrt{s} - s]}.$$

В УРП выражение для энергии приобретает компактный вид:

$$p_{30} = \frac{\sqrt{s}}{2} \frac{\sqrt{s} - 2p_0}{\sqrt{s} - p_0(1 + A)}.$$

Итак, с учетом вышесказанного получим фазовый объем в виде

$$d\Phi_3 = \frac{|\mathbf{p}_3|}{4p_{40}|f'(x_0)|} d \cos \theta_3 d\varphi_3 \frac{d^3 \mathbf{p}}{2p_0}. \quad (62)$$

Здесь  $d \cos \theta_3 \equiv dc$ , а интегрирование по азимутальному углу  $\varphi_3$  дает  $2\pi$  из-за симметрии относительно поворота всей реакции вокруг оси пучка.

Далее переходим к интегрированию по  $\mathbf{p}$ :

$$\begin{aligned} d^3 \mathbf{p} &= |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| d \cos \theta_p d\varphi_p, \\ \theta_p &= \pi - \theta_5, \quad \varphi_p = \pi + \varphi_5. \end{aligned}$$

С использованием  $\mathbf{p}_5$  векторы конечных частиц в с.ц.м. выглядят просто:

$$\mathbf{p}_3 = (|\mathbf{p}_3| \sin \theta, 0, |\mathbf{p}_3| \cos \theta), \quad (63)$$

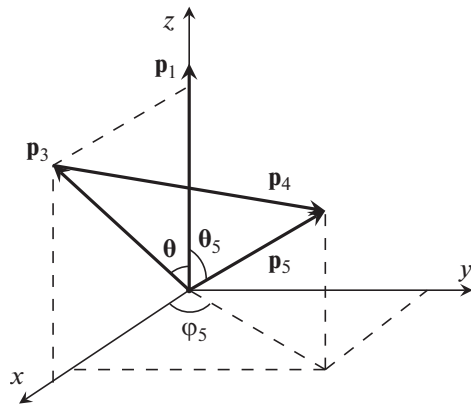


Рис. 7. Конфигурация 3-импульсов при интегрировании по фазовому пространству тормозного фотона в с.ц.м. начальных частиц.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_5 &= (|\mathbf{p}| \sin \theta_5 \cos \varphi_5, \\ &|\mathbf{p}| \sin \theta_5 \sin \varphi_5, |\mathbf{p}| \cos \theta_5), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_5 - \mathbf{p}_3. \end{aligned}$$

Ясно, что  $p_{40} = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}_4|^2}$  и легко вычисляется из (63).

Теперь выразим через энергию, азимутальный и полярный углы фотона радиационные инварианты [17]:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2p_0 p_{10} + 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}_1| \cos \theta_5, \\ v_1 &= 2p_0 p_{20} - 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}_2| \cos \theta_5, \\ z &= 2p_0 p_{30} + 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}_3| A, \\ v &= 2p_0(\sqrt{s} - p_{30}) - 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}_3| A. \end{aligned} \quad (64)$$

Следует заметить, что во всех вышеприведенных формулах различаются  $p_0$  и  $|\mathbf{p}|$ , формально в них удерживается масса фотона  $\lambda$  (т.е.  $p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 = \lambda^2 \rightarrow 0$ ), которая в дальнейшем будет использована как инфинитезимальный параметр для регуляризации инфракрасной расходимости. По причине малости ее удержание оказывается важным только в нижнем пределе интегрирования (65) (см. ниже).

## 9. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ФАЗОВОМУ ОБЪЕМУ

Теперь все готово для интегрирования по фазовому объему тормозного фотона. Используя полученные выражения для фазового объема, снимем интеграл по азимутальному углу детектируемого электрона  $\varphi_3$ , тогда сечение  $R$ -вклада принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^R}{dc} &= -\frac{\alpha^3}{4\pi s} \int_0^{|\mathbf{p}|_{\max}} \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0} d|\mathbf{p}| \int_{-1}^1 d \cos \theta_p \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi_p \frac{|\mathbf{p}_3|}{p_{40}|f'(x_0)|} \sum_{i,j=\gamma,Z} |R|^2. \end{aligned} \quad (65)$$

Уже в таком виде численное интегрирование (будем использовать Монте-Карло-интегратор VEGAS [18]) осуществляется без проблем, если позаботиться о сгущении точек в области малых  $|\mathbf{p}|$ . Однако имеется возможность представить результат в более изящном виде. Сначала перейдем к интегралу по фотонной энергии, используя равенство  $|\mathbf{p}|d|\mathbf{p}| = p_0 dp_0$ , тогда

$$\int_0^{|\mathbf{p}|_{\max}} \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0} d|\mathbf{p}| \dots = \int_{\lambda}^{\Omega} |\mathbf{p}| dp_0 \dots, \quad (66)$$

где  $\Omega$  — максимальная энергия тормозного фотона. Заметим, что такое преобразование дает возможность представить сечение мягкого ТИ в виде (произведем также некоторые очевидные упрощения)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{\text{soft}}}{dc} &= -\frac{\alpha^3}{4\pi s} \int_{\lambda}^{\omega} |\mathbf{p}| dp_0 \int_{-1}^1 d \cos \theta_p \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi_p \frac{1}{2} \sum_{i,j=\gamma,Z} |R|^2. \end{aligned} \quad (67)$$

Видно, что использование преобразования (66) дает дополнительные степени свободы для расчета:

мягкое ТИ теперь можно считать двумя способами: либо по предварительно упрощенной формуле (49), либо по формуле (67) с помощью техники Монте-Карло-интегрирования, а затем свериться;

имеется возможность вовсе не разделять ТИ на мягкое и жесткое, а пользоваться формулой (65), в которой по смыслу содержится полностью все тормозное излучение; использование этого нового и, как показывает практический опыт, полезного свойства назовем  $W$ -методом (от “whole” — полный, цельный, без разделения).

$W$ -метод весьма удобен для вычислений РП подобного рода, поскольку по построению не содержит нефизических параметров, кроме фиктивной массы фотона  $\lambda$ , которая естественным образом регуляризирует ИКР. С методической точки зрения он хорош тем, что вообще не оперирует такими терминами, как “мягкий фотон”, “жесткий фотон”, “параметр, разделяющий мягкую и жесткую области”, не требуется также отвлекающая в какой-то мере от сути дела проверка на независимость от этого параметра. Не стоит забывать также о том, что расчет по области мягких фотонов в традиционном подходе — это приближенное вычисление, и оно *принципиально* содержит ошибку расчета, которую, к слову сказать, довольно сложно контролировать, расчет в рамках  $W$ -метода такой ошибки не содержит.

Наконец, применив замену переменной (похожая замена использовалась, например, в [19] для выделения зависимости сечения от минимальной энергии фотона)

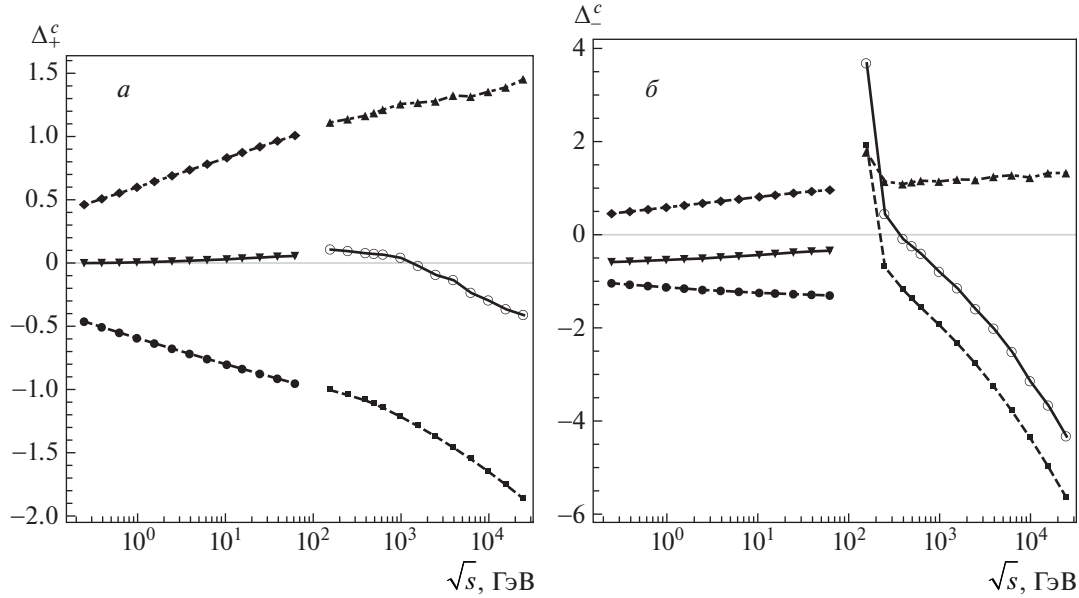
$$p_0 = \lambda^{1-x} \Omega^x, \quad (68)$$

что дает

$$\frac{dp_0}{p_0} = \ln \frac{\Omega}{\lambda} dx,$$

получим сечение в виде

$$\frac{d\sigma^R}{dc} = -\frac{\alpha^3}{4\pi s} \ln \frac{\Omega}{\lambda} \int_0^1 dx |\mathbf{p}| p_0 \int_{-1}^1 d \cos \theta_p \times \quad (69)$$



**Рис. 8.** Зависимость от  $\sqrt{s}$  поправок  $\Delta_+$  (а) и поправок  $\Delta_-$  (б). Виртуальный и мягкий вклад ( $C = VS$ ) описывается нижними линиями, жесткий ( $C = \text{hard}$ ) — верхними, их сумма ( $C = \text{NLO} = VS + \text{hard}$ ) — средними.

$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi_p \frac{|\mathbf{p}_3|}{p_{40}|f'(x_0)|} \sum_{i,j=\gamma,Z} \sum |R|^2.$$

### 10. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Значения электрослабых параметров и масс элементарных частиц берем из Particle Data Group (PDG) Report [20]:

$$\alpha^{-1} = 137.035\,999, \quad m_W = 80.4628 \text{ ГэВ}, \quad (70)$$

$$m_Z = 91.1876 \text{ ГэВ}, \quad m_H = 125 \text{ ГэВ}.$$

Электронная, мюонная и  $\tau$ -лептонная массы имеют значения:

$$m_e = 0.510\,998\,910 \text{ МэВ}, \quad (71)$$

$$m_\mu = 0.105\,658\,367 \text{ ГэВ}, \quad m_\tau = 1.776\,84 \text{ ГэВ}.$$

Остальные параметры, например, применяемые эффективные кварковые массы, необходимые для расчета, описаны в [12].

Теперь все готово для демонстрации результатов работы компьютерной программы и доказательства независимости от вспомогательных параметров. Мы пользовались как  $W$ -методом, так и стандартным методом с использованием  $\omega$ , получая численно стабильные одинаковые результаты. Во втором случае независимость полного результата от параметра  $\omega$  (очевидная по построению) тем не менее должна проверяться численно, так как такая проверка традиционно служит хорошим тестом правильности численных расчетов.

Введем две *относительные поправки* от рассматриваемого вклада  $C$  к комбинациям дифференциального сечения (эти поправки аддитивны):

$$\delta_{\pm}^C = \frac{d\sigma_{L0}^C \pm d\sigma_{R0}^C}{d\sigma_{L0}^0 \pm d\sigma_{R0}^0} \quad (72)$$

(соответствующие поправки для полного сечения обозначаем большой буквой:  $\Delta_{\pm}^C$ , их анализ приведен на рис. 8). Исследуем относительные поправки  $\delta_{\pm}$  к дифференциальным сечениям при различных значениях угла рассеяния электрона (кроме области, близкой к рассеянию назад) в интервале  $|\cos \theta_3| \leq 0.9$ , так что  $25.8^\circ \leq \theta_3 \leq 154.1^\circ$  (также используется соответствующее ограничение на угол рассеяния позитрона  $|\cos \theta_4| \leq 0.9$ ). Максимальная энергия фотона ограничена значением  $\Omega = 0.45\sqrt{s}$ . Тогда, выбирая для LE-режима энергию планируемого эксперимента Belle II ( $\sqrt{s} = 10.577$  ГэВ), а для HE-режима типичную энергию ILC  $\sqrt{s} = 500$  ГэВ, получим и сведем в табл. 2, 3 численные оценки относительных поправок  $\delta_{\pm}^C$ .

Теперь проведем численный анализ полных (проинтегрированных по углу рассеяния) наблюдаемых. Сначала сверим расчет сечения жесткого ТИ с результатами других групп: в табл. 4 для энергии реакции  $\sqrt{s} = 500$  ГэВ получено неплохое согласие с результатами групп SANC и WHIZARD, которые приведены в работе [21]. Для данных в этой таблице интегрируем по энергии фотона так: нижний предел выбираем 1 ГэВ, в качестве верхнего выбирается его максимальное значение, допустимое кинема-

**Таблица 2.** Относительные поправки  $\delta_{\pm}$  к дифференциальным наблюдаемым в LE-режиме (при  $\sqrt{s} = 10.577$  ГэВ) при разных  $\theta$  (масса фотона  $\lambda = 10^{-7}$  ГэВ)

$\omega/\sqrt{s}$	$\delta_+^V$	$\delta_+^S$	$\delta_+^H$	$\delta_+^{\text{NLO}}$	$\delta_-^V$	$\delta_-^S$	$\delta_-^H$	$\delta_-^{\text{NLO}}$
$\theta = 30^\circ$								
$10^{-5}$	-1.8111	0.3380	1.4678	-0.0052	-2.2484	0.3380	1.4502	-0.4601
$10^{-4}$	-1.8111	0.6855	1.1206	-0.0050	-2.2484	0.6855	1.1029	-0.4599
$10^{-3}$	-1.8111	1.0330	0.7732	-0.0050	-2.2484	1.0330	0.7557	-0.4597
$\theta = 60^\circ$								
$10^{-5}$	-2.0398	0.4317	1.7254	0.1173	-2.4783	0.4317	1.6388	-0.4077
$10^{-4}$	-2.0398	0.8121	1.3451	0.1173	-2.4783	0.8121	1.2585	-0.4077
$10^{-3}$	-2.0398	1.1924	0.9653	0.1179	-2.4783	1.1924	0.8784	-0.4075
$\theta = 90^\circ$								
$10^{-5}$	-2.2065	0.5023	1.9006	0.1964	-2.6579	0.5023	1.7931	-0.3625
$10^{-4}$	-2.2065	0.9061	1.4970	0.1966	-2.6579	0.9061	1.3895	-0.3623
$10^{-3}$	-2.2065	1.3100	1.0936	0.1970	-2.6579	1.3100	0.9861	-0.3618
$\theta = 120^\circ$								
$10^{-5}$	-2.3782	0.5729	2.0403	0.2350	-2.8585	0.5729	2.1509	-0.1347
$10^{-4}$	-2.3782	1.0002	1.6126	0.2346	-2.8585	1.0002	1.7228	-0.1354
$10^{-3}$	-2.3782	1.4276	1.1854	0.2347	-2.8585	1.4276	1.2956	-0.1354

тикой:

$$\Omega = \frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{2m^2}{\sqrt{s}}. \quad (73)$$

Используется 15 итераций и два выбора для количества случайных точек ( $10^6$  и  $10^8$ ) программы VEGAS [18] (третья и четвертая строки табл. 4 соответственно).

Наконец, на рис. 8 приведем зависимости от  $\sqrt{s}$  относительных поправок  $\Delta_{\pm}$  от однопетлевого вклада с учетом мягких фотонов с энергией, меньшей  $\omega$ , с учетом жестких фотонов с энергией, большей  $\omega$  (верхние линии), и их суммарный вклад (средние линии). В качестве параметра — разделителя энергий мягкой и жесткой области — выбирался  $\omega = 10^{-3}\sqrt{s}$ . При таком значении, во-первых, “мягкие” формулы неплохо работают (имеют физический смысл в плане положительности сечения) и, во-вторых, “жесткий” вклад интегрируется достаточно точно и быстро. Смещение  $\omega$  к меньшим значениям делает мягкий вклад более точно описывающим процесс, но существенно усложняет интегрирование жесткой

части. Наоборот, при смещении  $\omega$  к большим значениям “мягкие” формулы начинают работать неточно, хотя интегрирование жесткой части проще. Естественно, что для обеспечения более высокой заданной точности требуется уменьшение  $\omega$  (вплоть до  $\lambda$ , как объясняется выше в рамках  $W$ -метода) и, как следствие, большее время для интегрирования жесткой части.

Следующий шаг — проведение полного анализа наблюдаемых величин для определенной экспериментальной ситуации. В последующем анализе трех наблюдаемых асимметрий будет использован простой выбор: ограничение на энергию фотона не делается [т.е. используется (73)], также накладывается простое симметричное ограничение на угол рассеяния позитрона:  $|\cos\theta_4| \leq \cos 20^\circ$  (хорошо видно изменение характера асимметрий с учетом ЭСП именно в окрестности точки, соответствующей  $20^\circ$ ). Анализ электрослабых радиационных эффектов представлен тремя рисунками: рис. 2 для асимметрии  $A_{LR}$ , рис. 3 для асимметрии  $A_{LR\Sigma}$ , рис. 4 для асимметрии  $A_{FB}$ . Он показывает, что эффекты довольно значительны, особенно этот

**Таблица 3.** Относительные поправки  $\delta_{\pm}$  к дифференциальным наблюдаемым в HE-режиме (при  $\sqrt{s} = 500$  ГэВ) при разных  $\theta$  (масса фотона  $\lambda = 10^{-7}$  ГэВ)

$\omega/\sqrt{s}$	$\delta_+^V$	$\delta_+^S$	$\delta_+^H$	$\delta_+^{\text{NLO}}$	$\delta_-^V$	$\delta_-^S$	$\delta_-^H$	$\delta_-^{\text{NLO}}$
$\theta = 30^\circ$								
$10^{-5}$	-3.0478	0.9305	2.1614	0.0441	-3.2444	0.9305	2.1447	-0.1692
$10^{-4}$	-3.0478	1.4429	1.6486	0.0437	-3.2444	1.4429	1.6328	-0.1687
$10^{-3}$	-3.0478	1.9554	1.1369	0.0444	-3.2444	1.9554	1.1213	-0.1677
$\theta = 60^\circ$								
$10^{-5}$	-3.3436	1.0792	2.4824	0.2180	-3.7905	1.0792	2.4466	-0.2647
$10^{-4}$	-3.3436	1.6245	1.9391	0.2199	-3.7905	1.6245	1.9021	-0.2639
$10^{-3}$	-3.3436	2.1698	1.3942	0.2203	-3.7905	2.1698	1.3590	-0.2617
$\theta = 90^\circ$								
$10^{-5}$	-3.5301	1.1891	2.7642	0.4232	-3.8617	1.1891	2.9623	0.2898
$10^{-4}$	-3.5301	1.7579	2.1970	0.4248	-3.8617	1.7579	2.3944	0.2907
$10^{-3}$	-3.5301	2.3267	1.6283	0.4249	-3.8617	2.3267	1.8262	0.2913
$\theta = 120^\circ$								
$10^{-5}$	-3.7318	1.2991	2.9332	0.5005	-3.1921	1.2991	6.4915	4.5985
$10^{-4}$	-3.7318	1.8914	2.3407	0.5003	-3.1921	1.8914	5.8935	4.5928
$10^{-3}$	-3.7318	2.4837	1.7486	0.5005	-3.1921	2.4837	5.2947	4.5863

**Таблица 4.** Сечение (в пбн) жесткого тормозного излучения в процессе Баба

Группа	00	LL	RR	LR	RL
SANC	15.137(2)	11.454(3)	11.455(3)	20.489(5)	17.149(4)
WHIZARD	15.138(2)	11.461(2)	11.457(2)	20.488(3)	17.147(3)
наш расчет, $10^6$	$15.10 \pm 0.03$	$11.49 \pm 0.03$	$11.42 \pm 0.03$	$20.46 \pm 0.04$	$17.09 \pm 0.03$
наш расчет, $10^8$	$15.16 \pm 0.02$	$11.44 \pm 0.02$	$11.44 \pm 0.02$	$20.47 \pm 0.03$	$17.06 \pm 0.02$

факт проявляется для поляризационных асимметрий  $A_{LR}$  и  $A_{LR\Sigma}$ .

### 11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Значительность полученных эффектов доказывает необходимость учета электрослабых радиационных поправок в предстоящих экспериментальных программах как для низкоэнергетических экспериментов типа Belle II, так и для будущего электрон-позитронного коллайдера ILC/CLIC/FCC. Установка точного набора ограничений, соответствующих определенным условиям детектирования (так называемые *fiducial cuts*), для конкретной экспериментальной программы и анализ радиационных эффектов в такой ситуации

является предстоящей, совместной с экспериментаторами, работой.

Авторы признательны А.Б. Арбузову, М. Рупи (M. Roney) за обсуждение. Мы благодарны Е.В. Дыдышко, Л.В. Калиновской и Р.Р. Садыкову за помощь в сравнении наших результатов с результатами группы SANC. В.А.З. благодарит Государственную программу научных исследований Республики Беларусь “Конвергенция-2020” за поддержку.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. L. Perl, G. S. Abrams, A. Boyarski, M. Breidenbach, D. Briggs, F. Bulos, W. Chinowsky, J. T. Dakin, G. J. Feldman, C. E. Friedberg, D. Fryberger, G. Goldhaber, G. Hanson, F. B. Heile,



- B. Jean-Marie, J. A. Kadyk, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **35**, 1489 (1975).
2. G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott, J. Abdallah, S. A. Khalek, A. A. Abdelalim, O. Abdinov, R. Aben, B. Abi, M. Abolins, O. AbouZeid, H. Abramowicz, H. Abreu, B. S. Acharya, L. Adameczyk, D. Adams, *et al.* (ATLAS Collab.), Phys. Lett. B **716**, 1 (2012); arXiv: 1207.7214 [hep-ex]; S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A. M. Sirunyan, A. Tumasyan, W. Adam, E. Aguilo, T. Bergauer, M. Dragicevic, J. Ero, C. Fabjan, M. Friedl, R. Fruehwirth, V. M. Ghete, J. Hammer, M. Hoch, N. Horman, *et al.* (CMS Collab.), Phys. Lett. B **716**, 30 (2012); arXiv: 1207.7235 [hep-ex].
  3. C. A. Heusch, Int. J. Mod. Phys A **20**, 7289 (2005).
  4. H. J. Bhabha, Proc. R. Soc. Lond. A **154**, 195 (1935).
  5. F. A. Berends, K. J. F. Gaemers, and R. Gastmans, Nucl. Phys. B **68**, 541 (1974).
  6. M. Böhm, H. Spiesberger, and W. Hollik, Fortschr. Phys. **34**, 687 (1986).
  7. W. Hollik, Fortschr. Phys. **38**, 165 (1990).
  8. M. Böhm and W. Hollik, Nucl. Phys. B **204**, 45 (1982).
  9. M. Bohm, A. Denner, and W. Hollik, Nucl. Phys. B **304**, 687 (1988).
  10. F. A. Berends, R. Kleiss, and W. Hollik, Nucl. Phys. B **304**, 712 (1988).
  11. G. Balossini, C. Bignamini, C. M. Carloni Calame, G. Montagna, O. Nicrosini, and F. Piccinini, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **183**, 168 (2008); arXiv: 0806.4909 [hep-ph].
  12. А. Г. Алексеев, С. Г. Барканова, Ю. М. Быстрицкий, В. А. Зыкунов, ЯФ **83**, 159 (2020) [Phys. At. Nucl. **83** (2) (2020)].
  13. T. Hahn and M. Perez-Victoria, Comput. Phys. Commun. **118**, 153 (1999) [hep-ph/9807565].
  14. G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. B **153**, 365 (1979).
  15. F. Bloch and A. Nordsieck, Phys. Rev. **52**, 54 (1937).
  16. Е. Бюклинг, К. Каянти, *Кинематика элементарных частиц* (Мир, Москва, 1975).
  17. В. А. Зыкунов, ЯФ **78**, 489 (2015) [Phys. At. Nucl. **78**, 453 (2015)].
  18. P. G. Lepage, J. Comput. Phys. **27**, 192 (1978).
  19. T. Ishikawa *et al.* [MINAMI-TATEYA Group Collab.], KEK-92-19.
  20. Particle Data Group (C. Amsler *et al.*), Phys. Lett. B **667**, 1 (2008).
  21. D. Bardin, Ya. Dydyshka, L. Kalinovskaya, L. Romyantsev, A. Arbuzov, R. Sadykov, and S. Bondarenko, Phys. Rev. D **98**, 013001 (2018); arXiv: 1801.00125 [hep-ph].

## ELECTROWEAK CORRECTIONS WITH HARD BREMSSTRAHLUNG TO POLARIZED BHABHA SCATTERING

A. G. Aleksejevs<sup>1)</sup>, S. G. Barkanova<sup>1)</sup>, Yu. M. Bystritskiy<sup>2)</sup>, V. A. Zykunov<sup>2),3)</sup>

<sup>1)</sup>Memorial University, Corner Brook, Canada

<sup>2)</sup>JINR, Dubna, Moscow region, Russia

<sup>3)</sup>Francisk Skorina Gomel State University, Belarus

One-loop electroweak radiative corrections to polarized Bhabha scattering are calculated including hard real photon emission. The numerical analysis of polarized and spatial asymmetries includes electroweak corrections for low energy experiments like Belle II and for future electron–positron collider ILC/CLIC.