

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОСЛАБЫХ ПОПРАВК В ПОЛЯРИЗАЦИОННОМ БАБА-РАССЕЯНИИ

© 2020 г. А. Г. Алексеев¹⁾, С. Г. Барканова¹⁾, Ю. М. Быстрицкий²⁾, В. А. Зыкунов^{2),3)}*

Поступила в редакцию 02.10.2019 г.; после доработки 02.10.2019 г.; принята к публикации 02.10.2019 г.

В рамках схемы перенормировки на массовой поверхности получены асимптотические формулы для однопетлевых электрослабых радиационных поправок к наблюдаемым величинам поляризованного Баба-рассеяния. Произведен численный анализ относительных однопетлевых электрослабых поправок к сечению и поляризаационной асимметрии при энергиях ниже и выше Z -резонанса. Сделано успешное сравнение с точными результатами, полученными с помощью систем компьютерной алгебры.

DOI: 10.31857/S0044002720020026

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение процессов аннигиляции электрон-позитронной пары в пару фермионов сыграло фундаментальную роль в формировании современных представлений о природе микромира. Среди особо значимых для электрослабой физики e^-e^+ -машин нужно отметить две фабрики по производству массивных бозонов: SLC — Stanford Linear Collider — электрон-позитронный линейный коллайдер в лаборатории SLAC (Стэнфорд, США) с пучками энергии в системе центра масс 90 ГэВ (его предшественник SPEAR обеспечил открытие τ -лептона [1]) и LEP — Large Electron Positron (Ring) — кольцевой e^+e^- -коллайдер в CERN с первоначальной энергией 50 ГэВ. Коллайдеры SLC и LEP дали столько точной информации, что основные аспекты электрослабой теории были прецизионно проверены, а некоторые (например, существование трех поколений фермионов) твердо установлены. Таким образом, Стандартная модель (СМ) электрослабого взаимодействия получила статус экспериментально подтвержденной теории.

Процесс электрон-позитронной аннигиляции отнюдь не исчерпал свой потенциал и по настоящий день. Успешно продолжают свою работу установки, нацеленные на изучение мезонной физики VEPP (Новосибирск), BEPC-II (Пекин, Китай), DAΦNE (Фраскати, Италия). Интересны программы для производства B -мезонов SuperB (Италия) и Belle II (КЕК, Япония). Одной из главных целей

Belle II будет определение важнейшего параметра СМ — синуса угла Вайнберга $\sin\theta_W$ в канале $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ при энергии ниже Z -резонанса [для Belle II в системе центра масс (с. ц. м.) e^- и e^+ энергия электрона $E = m(\Upsilon_{4S}) = 10.577$ ГэВ]. Измерения Belle II прекрасно дополняют данные, которые были получены для $\sin^2\theta_W$ из экспериментов E-158 (SLAC) и QWeak (JLab), и которые планируется существенно уточнить в эксперименте MOLLER (JLab).

С электрон-позитронными коллайдерами нового поколения:

- Международным линейным коллайдером (International Linear Collider, ILC), который, как планируется, будет состоять из двух линейных ускорителей с энергией 500 ГэВ на пучок электронов и позитронов общей длиной в 31 км (возможно дополнение новыми секциями, вследствие чего длина установки возрастет до 50 км, а энергия — до 1 ТэВ),
- конкурирующим и долгое время параллельно развивающимся с ним проектом — Компактный линейный коллайдер (Compact Linear Collider, CLIC) с суммарной энергией до 3 ТэВ,
- и новыми проектами “Будущий циклический коллайдер” (Future Circular Collider, FCC) — проектами по созданию коллайдера на базе CERN после окончания программы LHC с энергией в лептонном режиме (FCC-ee) от 45 до 175 ГэВ (запуск планируется в 2039 г.) и в адронном режиме (FCC-hh) до 100 ТэВ (запуск планируется в 2043 г.),

¹⁾ Университет Мемориал, Корнер Брук, Канада.

²⁾ Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.

³⁾ Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Беларусь.

*E-mail: zykunov@cern.ch

связаны не только возможности точного изучения свойств нового скалярного (хиггсовского) бозона в продолжение открытия ЛНС [2], но и серьезные перспективы в поиске новой физики (НФ): проявления дополнительных измерений, суперсимметрии, кандидатов на темную материю и, если НФ будет до этого обнаружена на ЛНС, ее интенсивное и прецизионное изучение, чему поможет относительная “чистота” лептонного типа реакций на ILC/CLIC/FCC. В работе ILC/CLIC/FCC возможна также электрон-электронная (меллеровская) мода, которая как и при более низких энергиях в эксперименте E-158 (SLAC) и в планируемом эксперименте MOLLER в JLab может быть чрезвычайно интересна как для прецизионных тестов и измерений СМ, так и для поисков НФ [3].

Процесс рассеяния электронов на позитронах с таким же конечным состоянием занимает особое положение среди прочих 4-фермионных процессов: тождественность масс создает уникальные возможности по постановке эксперимента, хотя и существенно усложняет расчет наблюдаемых, особенно в высших порядках теории возмущений. Впервые сечение рассеяния этого процесса в рамках квантовой электродинамики вычислил Хоми Баба в своей работе 1935 г. [4] (в его честь и название “Баба-рассеяние”).

Очевидно, что для того чтобы получить надежную информацию из экспериментальных данных, необходимо как можно полнее учесть эффекты высших порядков в СМ — электрослабые радиационные поправки (ЭСР). Включение ЭСР на уровне одной или больше петель является неотъемлемой частью любого современного эксперимента и необходимо как при низких энергиях (ниже Z -резонанса), так и при высоких энергиях планируемых экспериментов на ILC/CLIC/FCC.

Одними из первых работ по расчету электромагнитных радиационных поправок к процессу Баба были работы Берендса с соавторами, например, [5].

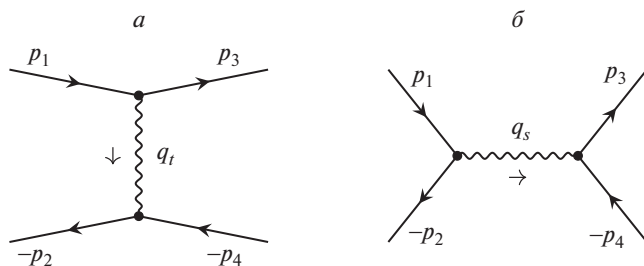


Рис. 1. Фейнмановские диаграммы процесса $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ с безрадиационной кинематикой (a — t -канальная, b — s -канальная). Внутренней волнистой линией на этой и последующих диаграммах обозначены фотон или Z -бозон.

Затем на основе техники, описанной в работах [6–8], анализ электрослабых радиационных поправок к рассеянию Баба был осуществлен в [9, 10]. Для нужд коллайдеров LEP и SLC потребовалось систематическое включение слабой части поправок и точное соответствие экспериментальным возможностям детекторов. Решение этой задачи потребовало разработки соответствующего программного обеспечения, обзор имеющихся в наличии кодов в обсуждаемом канале сделан в [11].

Существует множество продвинутых расчетов для радиационных поправок в Баба-рассеянии для определенных кинематических областей — в частности, для малых углов рассеяния, например, [12], где можно получить существенное упрощение (иногда это дает возможность рассчитать поправки и более высокого порядка). В нашей работе, напротив, изучается область больших углов (large angles), а целью ставится получение двух наборов асимптотических формул, имеющих упрощенный вид, но тем не менее превосходно работающих (это доказывается успешным сравнением с точными результатами, полученными методами компьютерной алгебры FeynArts/FormCalc [13]) при энергиях в стороне от Z -резонанса.

2. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА

Процесс рассеяния Баба в рамках СМ записывается следующей формулой:

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow \rightarrow e^-(p_3) + e^+(p_4). \quad (1)$$

В ней обозначены частицы, участвующие в реакции: в начальном (конечном) состоянии электрон e^- и позитрон e^+ , в промежуточном состоянии фотон γ и Z -бозон. В скобках стоят 4-импульсы начальных и конечных частиц. Фейнмановские диаграммы, соответствующие процессу (1) в борновском приближении, изображены на рис. 1.

Четыре-импульсы начальных частиц (p_1 и p_2) и конечных частиц (p_3 и p_4) образуют стандартный набор лоренц-инвариантных переменных Мандельштама:

$$s = q_s^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad (2)$$

$$t = q_t^2 = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_2 - p_3)^2.$$

Далее, если особо не оговаривается, приводятся только результаты, соответствующие ультрарелятивистскому приближению (УРП):

$$s, -t, -u \gg m^2, \quad (3)$$

где m — масса электрона. УРП, в общем случае, можно описать так: лоренц-инварианты много больше (по абсолютной величине) всех фермионных масс в квадрате.

Чтобы записать амплитуду процесса, изображенного на рис. 1, используем правила Фейнмана, изложенные в Приложении А. В записи векторных и аксиальных констант в процессе Баба везде, кроме петлевых вставок в поляризации вакуума, индекс $f = e$ и его будем опускать.

2.1. Сечение в борновском приближении

Применим правила Фейнмана (см. Приложение А), тогда амплитуды процесса Баба в приближении Борна, соответствующие рис. 1, выглядят так:

$$\mathcal{M}_t^a = e^2 Q_e^2 D_a(q_t) \cdot \bar{u}(p_3) \gamma_\mu \Gamma^a u(p_1) \times \quad (4)$$

$$\times \bar{u}(-p_2) \gamma_\mu \Gamma^a u(-p_4),$$

$$\mathcal{M}_s^a = -e^2 Q_e^2 D_a(q_s) \cdot \bar{u}(-p_2) \gamma_\mu \Gamma^a u(p_1) \times \quad (5)$$

$$\times \bar{u}(p_3) \gamma_\mu \Gamma^a u(-p_4).$$

Знак “минус” в s -канальной амплитуде учитывает тот факт, что электроны удовлетворяют статистике Ферми (антисимметризация). Бозонный пропагатор D_a определяется формулой

$$D_a(q) = \frac{1}{q^2 - m_a^2 + i m_a \Gamma_a}, \quad a = \gamma, Z. \quad (6)$$

В вершинах фигурирует Q_e — заряд электрона в элементарных зарядах e , для ясности: $Q_e = -1$. Полную амплитуду процесса с обменом бозоном a получаем, суммируя

$$\mathcal{M}_0^a = \mathcal{M}_t^a + \mathcal{M}_s^a. \quad (7)$$

Сформируем сечение процесса, для этого нужно применить формулу (П.7): квадрировать амплитуду \mathcal{M}_0 и упростить фазовый объем (П.8). В результате получаем дифференциальное (по углу рассеяния) сечение процесса (1) в борновском приближении

$$\frac{d\sigma^0}{dc} = \frac{1}{2^5 \pi s} \sum_{a,b=\gamma,Z} \mathcal{M}_0^a \mathcal{M}_0^{b+}, \quad (8)$$

где $c = \cos \theta$ — косинус угла между начальным электроном и конечным (детектируемым) электроном в с.ц.м. начальных частиц.

Сформируем квадрат амплитуды — произведение амплитуды на эрмитово-сопряженную (эту же амплитуду

$$\mathcal{M}_0^a \mathcal{M}_0^{b+} = (\mathcal{M}_t^a + \mathcal{M}_s^a)(\mathcal{M}_t^b + \mathcal{M}_s^b)^+. \quad (9)$$

Используются следующие правила:

- по поляризациям начальных частиц не суммируем, а берем заданные поляризации, так формируется матрица плотности, для электрона и позитрона матрицы плотности определяются выражениями:

$$\rho(p_1) = u(p_1) \bar{u}(p_1) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \hat{\xi}_1) (\hat{p}_1 + m), \quad (10)$$

$$\rho(-p_2) = u(-p_2) \bar{u}(-p_2) = \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \hat{\xi}_2) (\hat{p}_2 - m),$$

где вводятся векторы поляризации частиц, для ультрарелятивистских продольно поляризованных частиц они пропорциональны своим 4-векторам:

$$\xi_1 = \frac{\lambda_1}{m} p_1, \quad \xi_2 = \frac{\lambda_2}{m} p_2; \quad (12)$$

- по поляризациям конечных частиц суммируем, так формируется проекционный оператор.

Заметим, что в случае неполяризованных начальных частиц усреднение в матрице плотности получается естественным образом, если занулить их степени поляризации: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$.

В итоге произведения биспинорных амплитуд (матрицы плотности для начальных частиц и проекционные операторы для конечных) удобно переписать единообразно через следующие выражения (приведем также их вид в УРП):

$$U_1 = \rho(p_1) \approx \frac{1}{2} (1 + \lambda_1 \gamma_5) \hat{p}_1, \quad (13)$$

$$U_2 = \rho(-p_2) \approx \frac{1}{2} (1 - \lambda_2 \gamma_5) \hat{p}_2,$$

$$U_3 = \sum u(p_3) \bar{u}(p_3) = \hat{p}_3 + m,$$

$$U_4 = \sum u(-p_4) \bar{u}(-p_4) = \hat{p}_4 - m.$$

Квадрируя все слагаемые в (9), получим следующее выражение:

$$\mathcal{M}_r^a \mathcal{M}_{r'}^{b+} = e^4 D_a(q_r) D_b^*(q_{r'}) S_{rr'}^{ab}, \quad (14)$$

где используем общее обозначение $r = s, t, u$ для канала реакции, а

$$S_{tt}^{abc} = \text{Sp} \left[\gamma_\mu \Gamma^a U_1 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right] \times \quad (15)$$

$$\times \text{Sp} \left[\gamma_\mu \Gamma^b U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_2 \right],$$

$$S_{ts}^{abc} = -\text{Sp} \left[\gamma_\mu \Gamma^a U_1 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_2 \gamma_\mu \Gamma^b U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right],$$

$$S_{st}^{abc} = -\text{Sp} \left[\gamma_\mu \Gamma^a U_1 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \gamma_\mu \Gamma^b U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_2 \right],$$

$$S_{ss}^{abc} = \text{Sp} \left[\gamma_\mu \Gamma^a U_1 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_2 \right] \text{Sp} \left[\gamma_\mu \Gamma^b U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right].$$

Можно заметить, что в формулах (15) встречаются две определенные комбинации, которые могут быть представлены в УРП следующим образом:

$$U_1^{ab} = \Gamma^a U_1 \Gamma^{b+} = \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [g_V^{ab} - \lambda_1 g_A^{ab} - (g_A^{ab} - \lambda_1 g_V^{ab}) \gamma_5] \hat{p}_1 = \\
&= \frac{1}{2} [g_V^{ab} (1 + \lambda_1 \gamma_5) - g_A^{ab} (\lambda_1 + \gamma_5)] \hat{p}_1, \\
U_4^{ab} &= \Gamma^a U_4 \Gamma^{b+} = [g_V^{ab} - g_A^{ab} \gamma_5] \hat{p}_4, \quad (17)
\end{aligned}$$

где

$$g_V^{ab} = v^a v^b + a^a a^b, \quad g_A^{ab} = v^a a^b + a^a v^b. \quad (18)$$

Запишем сечение реакции в симметричном виде, это существенно облегчит программирование и анализ физического содержания. Общая форма записи сечения будет такая:

$$\frac{d\sigma^0}{dc} = \frac{\pi\alpha^2}{2s} \sum_{k=1}^4 \sum_{a,b=\gamma,Z} \Pi_k^{ab} S_k^{aab}, \quad (19)$$

где $k = \{rr'\} = \{tt, ts, st, ss\}$. Пропагаторы бозонов встречаются в комбинациях

$$\Pi_{rr'}^{ab} \equiv D_a(q_r) D_b^*(q_{r'}).$$

Выражения S_k после вычисления следов имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} S_{tt}^{abc} &= P_2^- f_+^{abc} u^2 + P_2^+ f_-^{abc} s^2 - \\
&\quad - P_1^- g_+^{abc} u^2 + P_1^+ g_-^{abc} s^2, \\
\frac{1}{2} S_{ts}^{abc} &= \frac{1}{2} S_{st}^{abc} = P_2^- f_+^{abc} u^2 - P_1^- g_+^{abc} u^2, \\
\frac{1}{2} S_{ss}^{abc} &= P_2^- (f_+^{abc} u^2 + f_-^{abc} t^2) - \\
&\quad - P_1^- (g_+^{abc} u^2 - g_-^{abc} t^2).
\end{aligned}$$

Они выражаются через комбинации констант связи $g_{V,A}$:

$$\begin{aligned}
f_{\pm}^{abc} &= g_V^{ac} g_V^{bc} \pm g_A^{ac} g_A^{bc}, \quad (20) \\
g_{\pm}^{abc} &= g_V^{ac} g_A^{bc} \pm g_A^{ac} g_V^{bc}
\end{aligned}$$

и четыре комбинации степеней поляризации:

$$P_1^{\pm} = \lambda_1 \pm \lambda_2, \quad P_2^{\pm} = 1 \pm \lambda_1 \lambda_2. \quad (21)$$

2.2. Наблюдаемые величины и относительные поправки

Прежде чем приступить к расчету следующего порядка теории возмущений (однопетлевых поправок), введем поляризационные наблюдаемые величины, построенные на основе уже введенного дифференциального сечения $d\sigma^C/dc$. Индекс C (от "Contribution") означает рассматриваемый вклад в сечение и принимает значения $C = 0, V, \text{soft}, \text{VS}, \text{hard}, \text{NLO}$, где "0" означает борновский вклад (часто его обозначают также как "LO" — Leading Order), "NLO" означает сумму всех однопетлевых вкладов (Next-to-Leading

Order). Все остальные вклады будут объяснены ниже.

Итак, важная наблюдаемая величина — поляризационная асимметрия

$$A_{LR}^C = \frac{d\sigma_{L0}^C - d\sigma_{R0}^C}{d\sigma_{L0}^C + d\sigma_{R0}^C}, \quad (22)$$

скомбинированная из сечения

$$d\sigma_{L0}^C = \frac{1}{2} (d\sigma_{LL}^C + d\sigma_{LR}^C),$$

которое соответствует рассеянию лево-поляризованного электрона на неполяризованном позитроне и аналогичного для право-поляризованного электрона

$$d\sigma_{R0}^C = \frac{1}{2} (d\sigma_{RL}^C + d\sigma_{RR}^C).$$

Другое название A_{LR} — single spin asymmetry, т.е. асимметрия с одиночной поляризацией.

Введем две относительные поправки от рассматриваемого вклада C к комбинациям дифференциального сечения:

$$\delta_{\pm}^C = \frac{d\sigma_{L0}^C \pm d\sigma_{R0}^C}{d\sigma_{L0}^0 \pm d\sigma_{R0}^0}, \quad (23)$$

которые обладают свойством аддитивности:

$$\delta_{\pm}^{C_1+C_2} = \delta_{\pm}^{C_1} + \delta_{\pm}^{C_2}, \quad (24)$$

и, следовательно, крайне удобны для анализа влияния радиационных поправок на наблюдаемые величины: δ_{\pm}^C дает неполяризованное сечение

$$\sigma_{00}^C = \delta_{\pm}^C \cdot \sigma_{00}^0, \quad (25)$$

а вместе они формируют поправку к поляризационной асимметрии:

$$\delta_A^C = \frac{A_{LR}^C - A_{LR}^0}{A_{LR}^0} = \frac{\delta_-^C - \delta_+^C}{1 + \delta_+^C}. \quad (26)$$

Эту формулу легко проверить непосредственной подстановкой. Пользуясь ей, получаем поправленную асимметрию (с учтенной однопетлевой поправкой):

$$A_{LR}^{\text{NLO}} = (1 + \delta_A^{\text{NLO}}) A_{LR}^0 = \frac{1 + \delta_-^{\text{NLO}}}{1 + \delta_+^{\text{NLO}}} A_{LR}^0. \quad (27)$$

3. ВКЛАД ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ВИРТУАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Перейдем к расчету радиационных вкладов, начнем с вклада дополнительных виртуальных частиц (V -вклад), который представлен тремя классами диаграмм: бозонные собственные энергии (boson self energies, BSE), вершинные функции (vertices, Ver) и двухбозонный обмен

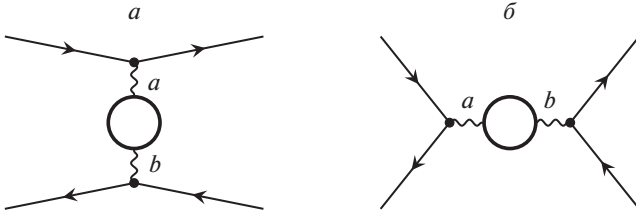


Рис. 2. Фейнмановские диаграммы вкладов BSE в процесс $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$.

(боксы, Box); они обозначаются индексами: $C = V = \text{BSE}$, Ver , Box . В схеме перенормировки на массовой поверхности нет однопетлевых вкладов от электронных собственных энергий.

3.1. Бозонные собственные энергии

Диаграммы, соответствующие вкладам бозонных собственных энергий, представлены на рис. 2. Кружком на них обозначены все возможные в рамках СМ вклады. Обозначения 4-импульсов те же, что на борновских диаграммах рис. 1.

Сечение вклада бозонных собственных энергий получаем в борноподобном виде:

$$\frac{d\sigma^{\text{BSE}}}{dc} = \frac{\pi\alpha^2}{s} \sum_{k=1}^4 \sum_{a,b,c=\gamma,Z} \Pi_k^{abc} S_k^{abc}, \quad (28)$$

где

$$\Pi_{rr'}^{abc} \equiv -D_a(q_r) \hat{\Sigma}_T^{ab}(r) D_b(q_r) D_c^*(q_{r'}),$$

а $\hat{\Sigma}_T^{ab}(r)$ — перенормированная поперечная часть вклада диаграмм собственных энергий фотона, Z -бозона и γZ -смешивания, она соответствует части диаграмм рис. 2, обозначенной кружком (в нее не входят пропагаторные структуры и множитель $i^2 = -1$) и часто называется “обрезанной” собственной энергией (truncated self energy). По правилам Фейнмана она формально соответствует интегралу по двум замкнутым линиям в фермионной (или W -бозонной) петле. Для случая чисто фотонной поперечной части BSE имеем известное выражение вида

$$\hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}(k^2) \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right), \quad (29)$$

где k — 4-импульс входящего в фермионную петлю фотона. Для случая петли только с одним электроном получим

$$\text{Re} \frac{\hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma,e}(s)}{s} = -\frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{s}{m_e^2} - \frac{5}{9} \right) = -0.0141.$$

Расчет всех $\hat{\Sigma}_T^{ab}(r)$ проведем по схеме перенормировки на массовой поверхности. Наиболее

популярным в рамках данной схемы является применение ренормализационных условий Холлика (РУХ) [6, 7], либо ренормализационных условий Деннера (РУД) [14]. Будем использовать схему с применением РУХ, приведенную в [6]. Для контроля приведем здесь численные значения для действительных и мнимых частей “обрезанных” перенормированных поперечных собственных энергий $\hat{\Sigma}_T^{ab}$ для энергии эксперимента Belle II $\sqrt{s} = 10.577$ ГэВ:

$$\begin{aligned} \text{Re} \frac{\hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}(s)}{s} &= -0.0361, & \text{Re} \frac{\hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(s)}{s} &= -0.0301, \\ \text{Re} \hat{\Sigma}_T^{ZZ}(s) D_Z(q_s) &= -0.0317, \\ \text{Im} \frac{\hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}(s)}{s} &= 0.0159, & \text{Im} \frac{\hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(s)}{s} &= -0.0056, \\ \text{Im} \hat{\Sigma}_T^{ZZ}(s) D_Z(q_s) &= -0.0003. \end{aligned}$$

Значения электрослабых параметров и масс элементарных частиц берем из Particle Data Group (PDG) Report [15]:

$$\alpha^{-1} = 137.035999, \quad m_W = 80.4628 \text{ ГэВ}, \quad (30)$$

$$m_Z = 91.1876 \text{ ГэВ}, \quad m_H = 125 \text{ ГэВ}.$$

Заметим, что получаемые численные результаты для ЭСП весьма слабо зависят от вариаций значения массы хиггсовского бозона в довольно широком диапазоне: установлено, что, например, относительная ошибка от вкладов бозонных собственных энергий при изменении m_H от 115 ГэВ (значения, часто использовавшегося для оценок в предшествующих открытию нового скалярного бозона работах) до современного 125.18 ГэВ составляет не более 0.3%. Электронная, мюонная и τ -лептонная массы имеют значения:

$$m_e = 0.510998910 \text{ МэВ}, \quad (31)$$

$$m_\mu = 0.105658367 \text{ ГэВ}, \quad m_\tau = 1.77684 \text{ ГэВ}.$$

Кварковые массы, необходимые для расчета:

$$m_u = 0.06983 \text{ ГэВ}, \quad m_c = 1.2 \text{ ГэВ}, \quad (32)$$

$$m_t = 174 \text{ ГэВ}, \quad m_d = 0.06984 \text{ ГэВ},$$

$$m_s = 0.15 \text{ ГэВ}, \quad m_b = 4.6 \text{ ГэВ}.$$

Приведенные “эффе́ктивные значения” кварковых масс обеспечивают сдвиг постоянной тонкой структуры, обусловленный поляризацией вакуума адронами: $\Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}(m_Z^2) = 0.02757$ [16], где

$$\Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}(s) = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_{q=u,d,s,c,b} Q_q^2 \left(\ln \frac{s}{m_q^2} - \frac{5}{3} \right). \quad (33)$$

Использование фиксированных кварковых масс как параметров является одним из возможных вариантов описания вкладов в ЭСП, обусловленных

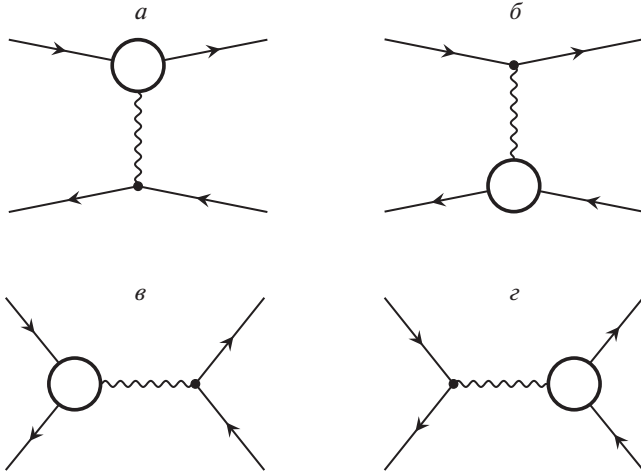


Рис. 3. Фейнмановские диаграммы вершинных вкладов в процесс $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$.

поляризацией вакуума адронами. Альтернативно можно, например, применить аппарат дисперсионных соотношений [17] и непосредственную экспериментальную информацию о сечении реакции $e^+e^- \rightarrow$ адроны [18].

3.2. Вклад вершинных диаграмм

Диаграммы, соответствующие вершинным вкладам (vertex diagrams), представлены на рис. 3. Снова кружком на них обозначены все вклады, возможные в рамках СМ, и обозначения 4-импульсов те же, что на борновских диаграммах рис. 1.

Сечение вершинных вкладов имеет вид

$$\frac{d\sigma^{\text{Ver}}}{dc} = \frac{\pi\alpha^2}{s} \sum_{k=1}^4 \sum_{a,b=\gamma,Z} \Pi_k^{ab} (S_k^{F_a ab} + S_k^{a F_a b}), \quad (34)$$

здесь расчет следует работе [6], где получены перенормированные вершинные формфакторы в качестве эффективных констант связи:

$$v_e^{\gamma(Z)} \rightarrow v_e^{F_{\gamma(Z)}}, \quad a_e^{\gamma(Z)} \rightarrow a_e^{F_{\gamma(Z)}}, \quad (35)$$

для фотона:

$$v_e^{F_{\gamma}} = \frac{\alpha}{4\pi} \left[v_e^{\gamma} \Lambda_{1,e}^{\gamma} + \right. \quad (36)$$

$$\left. + ((v_e^Z)^2 + (a_e^Z)^2) \Lambda_2^Z + \frac{3}{4s_W^2} \Lambda_3^W \right],$$

$$a_e^{F_{\gamma}} = \frac{\alpha}{4\pi} \left[a_e^{\gamma} \Lambda_{1,e}^{\gamma} + 2v_e^Z a_e^Z \Lambda_2^Z + \frac{3}{4s_W^2} \Lambda_3^W \right],$$

для Z -бозона:

$$v_e^{F_Z} = \frac{\alpha}{4\pi} \left[v_e^{\gamma} \Lambda_{1,e}^{\gamma} + \right. \quad (37)$$

$$\left. + v_e^Z ((v_e^Z)^2 + 3(a_e^Z)^2) \Lambda_2^Z + \frac{1}{8s_W^3 c_W} \Lambda_2^W - \frac{3c_W}{4s_W^3} \Lambda_3^W \right],$$

$$a_e^{F_Z} = \frac{\alpha}{4\pi} \left[a_e^{\gamma} \Lambda_{1,e}^{\gamma} + \right. \\ \left. + a_e^Z (3(v_e^Z)^2 + (a_e^Z)^2) \Lambda_2^Z + \frac{1}{8s_W^3 c_W} \Lambda_2^W - \frac{3c_W}{4s_W^3} \Lambda_3^W \right].$$

Функция $\Lambda_{1,e}^{\gamma}$ описывает вклад треугольной вершинной диаграммы с дополнительным фотонным обменом. Функция Λ_2 описывает вершинный вклад с обменом массивным бозоном — Z или W , а Λ_3 — с трехбозонной вершиной — $WW\gamma$ или WWZ , они рассчитываются аналогично. Вершинные функции комплексны, но нас будет интересовать только действительная часть, поскольку мнимая не дает вклад в наблюдаемые величины в первой петле, хотя и важна при расчете двухпетлевых (и более высокого порядка) поправок. Выражения для вершинных функций хорошо известны и приводятся в литературе, можно рекомендовать, например, обзор [7].

Действительная часть первой функции содержит коллинеарный логарифм, в УРП в t -канале она имеет вид

$$\text{Re} \Lambda_{1,e}^{\gamma} = -2 \ln \frac{-t}{\lambda^2} \left(\ln \frac{-t}{m_e^2} - 1 \right) + \quad (38) \\ + \ln \frac{-t}{m_e^2} + \ln^2 \frac{-t}{m_e^2} + \frac{1}{3} \pi^2 - 4.$$

В s -канале в УРП эта функция выглядит несколько иначе:

$$\text{Re} \Lambda_{1,e}^{\gamma} = -2 \ln \frac{s}{\lambda^2} \left(\ln \frac{s}{m_e^2} - 1 \right) + \quad (39) \\ + \ln \frac{s}{m_e^2} + \ln^2 \frac{s}{m_e^2} + \frac{4}{3} \pi^2 - 4.$$

Далее в тексте будем пользоваться такими терминами:

1. LE-режим (от “low energies”, низкие энергии): $m_f \ll \sqrt{s} \ll m_W$,
2. HE-режим (от “high energies”, высокие энергии): $\sqrt{s} \gg m_Z$.

В УРП для других вершинных функций в s -канале получаем следующие выражения: в LE-режиме (получены в [19]):

$$\Lambda_2^{Z,W} = \Lambda_2(s, m_{Z,W}) = \quad (40) \\ = \left(\frac{2}{3} \ln \frac{m_{Z,W}^2}{s} + \frac{11}{9} \right) \frac{s}{m_{Z,W}^2},$$

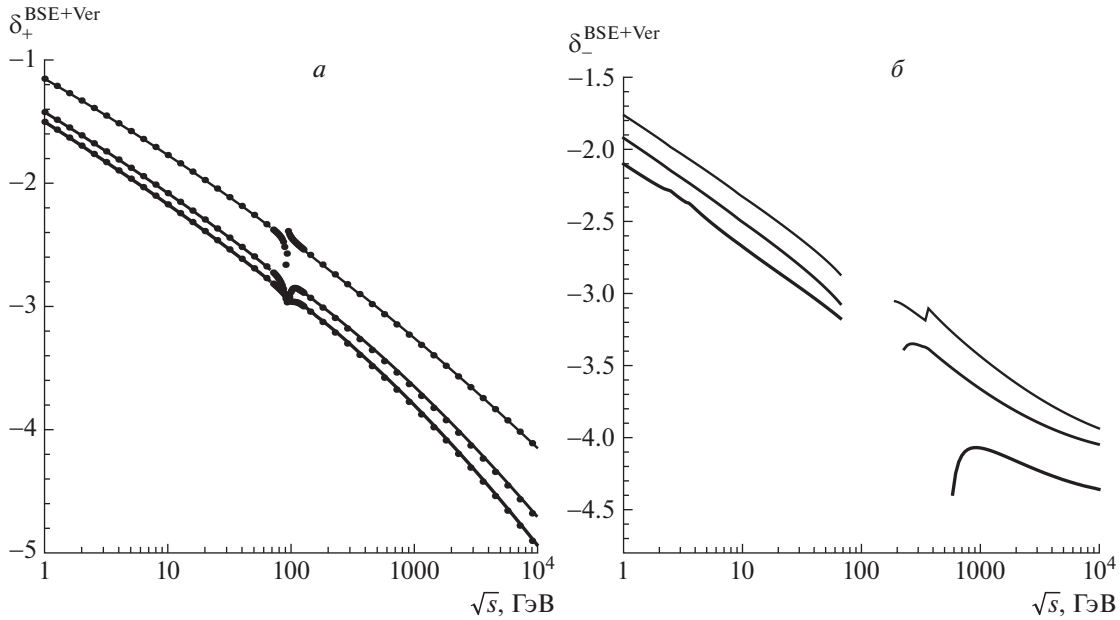


Рис. 4. Зависимость от \sqrt{s} относительных поправок $\delta_+^{\text{BSE+Ver}}$ (а) и $\delta_-^{\text{BSE+Ver}}$ (б) к дифференциальному сечению Баба-рассеяния при различных углах рассеяния: $\theta = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$ для тонкой, средней и толстой линий соответственно. Точки — относительные поправки $\delta_+^{\text{BSE+Ver}}$, полученные с помощью системы FeynArts/FormCalc.

$$\Lambda_3^W = \Lambda_3(s, m_W) = -\frac{5}{27} \frac{s}{m_W^2}, \quad (41)$$

в HE-режиме:

$$\Lambda_2^{Z,W} = -\ln^2 \frac{m_{Z,W}^2}{s} - 3 \ln \frac{m_{Z,W}^2}{s} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{7}{2}, \quad (42)$$

$$\Lambda_3^W = -\frac{1}{3} \ln \frac{m_W^2}{s} + \frac{5}{6}. \quad (43)$$

Выражения, соответствующие t -каналу, получаем заменой $s \rightarrow -t$. Заметим, что старшие степени судаковских логарифмов содержатся только в Λ_2 в HE-режиме.

На рис. 4 приведены зависимости от \sqrt{s} относительных поправок δ_\pm от суммарного вклада BSE и Ver (каждый из них по отдельности не имеет физического смысла, поскольку только в сумме образуется калибровочно-инвариантный набор). Во всех численных оценках статьи масса фотона будет фиксирована: $\lambda = 10^{-7}$ ГэВ. Точками на всех рисунках работы обозначены относительные поправки $\delta_+^{\text{BSE+Ver}}$, полученные с помощью системы FeynArts/FormCalc [13]. Видно превосходное согласие двух расчетов.

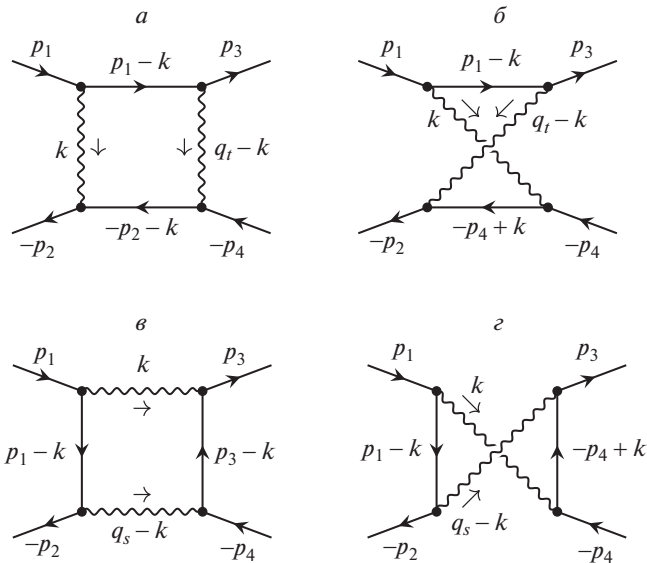


Рис. 5. Диаграммы двухбозонных вкладов. Волнистой линией обозначены фотон, или Z -бозон, или W -бозон.

3.3. Боксы: выражения для амплитуд и сечения

Сечение, соответствующее вкладу боксовых диаграмм в NLO, выглядит так:

$$\frac{d\sigma^{\text{Box}}}{dc} = \frac{1}{2^4 \pi s} \text{Re} \sum_{c=\gamma, Z} \mathcal{M}_{\text{Box}} \mathcal{M}_0^{c+}, \quad (44)$$

где амплитуда боксов имеет вид суммы от всех возможных вариантов (классов диаграмм):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{Box}} = & \mathcal{M}_t^{\gamma\gamma} + \mathcal{M}_t^{\gamma Z} + \mathcal{M}_t^{Z\gamma} + \\ & + \mathcal{M}_t^{ZZ} + \mathcal{M}_t^{WW} + (t \rightarrow s). \end{aligned} \quad (45)$$

Диаграммы двухфотонного обмена изображены на рис. 5 (a — прямой бокс, b — перекрестный). Соответствующие им амплитуды обозначаются в общем виде так: $\mathcal{M}_{t(s),D(C)}^{ab}$.

Заметим, что первые три типа содержат как прямой (D), так и перекрестный (C) бокс:

$$\mathcal{M}_t^{ab} = \mathcal{M}_{t,D}^{ab} + \mathcal{M}_{t,C}^{ab} \quad (\text{здесь } a, b = \gamma, Z),$$

а WW -тип содержит только прямой бокс (как для t -, так и для s -канала):

$$\mathcal{M}_t^{WW} = \mathcal{M}_{t,D}^{WW},$$

так как перекрестный бокс запрещен законом сохранения заряда.

После квадрирования, используя обозначения для 4-векторов передач в случае t - и s -каналов [$q_t = p_1 - p_3$, $q_s = p_1 + p_2$, см. формулы (2)], получим (в общем случае $a, b = \gamma, Z, W$) для прямых t -канальных боксов (диаграмма на рис. 5а, далее обозначается как случай 1):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{t,D}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} &= \quad (46) \\ &= 4\pi\alpha^3 \int \frac{d^4k}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_t - k) D_c^*(q_t) \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right] \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\mu \Gamma^a S(-p_2 - k) \gamma_\beta \Gamma^b U_4 \gamma_\nu U_2^c \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{t,D}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} &= \quad (47) \\ &= -4\pi\alpha^3 \int \frac{d^4k}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_t - k) D_c^*(q_s) \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \gamma_\nu U_2^c \gamma_\mu \times \right. \\ &\left. \times \Gamma^a S(-p_2 - k) \gamma_\beta \Gamma^b U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right], \end{aligned}$$

для перекрестных t -канальных боксов (диаграмма 2 на рис. 5б, далее обозначается как случай 2):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{t,C}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} &= \quad (48) \\ &= 4\pi\alpha^3 \int \frac{d^4k}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_t - k) D_c^*(q_t) \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right] \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(-p_4 + k) \gamma_\mu \Gamma^a U_4 \gamma_\nu U_2^c \right], \\ \mathcal{M}_{t,C}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} &= \quad (49) \\ &= -4\pi\alpha^3 \int \frac{d^4k}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_t - k) D_c^*(q_s) \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \gamma_\nu U_2^c \gamma_\beta \times \right. \\ &\left. \times \Gamma^b S(-p_4 + k) \gamma_\mu \Gamma^a U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right], \end{aligned}$$

для прямых s -канальных боксов (диаграмма 3 на рис. 5в, далее обозначается как случай 3):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,D}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} &= \quad (50) \\ &= -4\pi\alpha^3 \int \frac{d^4k}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_s - k) D_c^*(q_t) \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\mu \Gamma^a S(p_3 - k) \gamma_\beta \Gamma^b U_4 \gamma_\nu U_2^c \gamma_\beta \times \right. \\ &\left. \times \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,D}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} &= \quad (51) \\ &= 4\pi\alpha^3 \int \frac{d^4k}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_s - k) D_c^*(q_s) \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \gamma_\nu U_2^c \right] \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\mu \Gamma^a S(p_3 - k) \gamma_\beta \Gamma^b U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right], \end{aligned}$$

для перекрестных s -канальных боксов (диаграмма 4 на рис. 5г, далее обозначается как случай 4):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,C}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} &= \quad (52) \\ &= -4\pi\alpha^3 \int \frac{d^4k}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_s - k) D_c^*(q_t) \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(-p_4 + k) \gamma_\mu \Gamma^a U_4 \gamma_\nu U_2^c \gamma_\beta \times \right. \\ &\left. \times \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right], \\ \mathcal{M}_{s,C}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} &= \quad (53) \\ &= 4\pi\alpha^3 \int \frac{d^4k}{i\pi^2} D_a(k) D_b(q_s - k) D_c^*(q_s) \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(p_1 - k) \gamma_\mu U_1^a \gamma_\nu U_2^c \right] \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\beta \Gamma^b S(-p_4 + k) \gamma_\mu \Gamma^a U_4 \Gamma^{c+} \gamma_\nu U_3 \right]. \end{aligned}$$

Попробуем упростить запись результата для дальнейшего удобства. Для этого, во-первых, используем коммутационные свойства матриц Γ :

$$\Gamma^a \Gamma^b = \Gamma^b \Gamma^a, \quad \Gamma^a \gamma^\mu = \gamma^\mu \Gamma^{a+}. \quad (54)$$

Во-вторых, вынесем за знак интеграла величины, не зависящие от k , и введем обозначение

$$C_r \equiv 4\pi\alpha^3 D_c^*(q_r).$$

Наконец, выпишем фермионные пропагаторы S в явном виде в УРП, например:

$$S(p_1 - k) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + m}{(p_1 - k)^2 - m^2} \approx \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}}{k^2 - 2p_1 k}.$$

В результате получим упрощенные выражения, в которых явно видна структура 4-точечных функций. Для прямых t -канальных боксов (случай 1)

получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{t,D}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} = & -C_t \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \times \quad (55) \\ & \times D_a(k) D_b(q_t - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(k^2 + 2p_2 k)} \times \\ & \times \text{Sp} \left[\gamma_\beta (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu U_3 \right] \times \\ & \times \text{Sp} \left[\gamma_\mu (\hat{p}_2 + \hat{k}) \gamma_\beta U_4^{abc} \gamma_\nu U_2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{t,D}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} = & +C_s \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \times \quad (56) \\ & \times D_a(k) D_b(q_t - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(k^2 + 2p_2 k)} \times \\ & \times \text{Sp} \left[\gamma_\beta (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu \times \right. \\ & \left. \times U_2 \gamma_\mu (\hat{p}_2 + \hat{k}) \gamma_\beta U_4^{abc} \gamma_\nu U_3 \right], \end{aligned}$$

для перекрестных t -канальных боксов (случай 2):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{t,C}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} = & -C_t \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \times \quad (57) \\ & \times D_a(k) D_b(q_t - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2p_4 k)} \times \\ & \times \text{Sp} \left[\gamma_\beta (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu U_3 \right] \times \\ & \times \text{Sp} \left[\gamma_\beta (\hat{p}_4 - \hat{k}) \gamma_\mu U_4^{abc} \gamma_\nu U_2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{t,C}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} = & +C_s \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \times \quad (58) \\ & \times D_a(k) D_b(q_t - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2p_4 k)} \times \\ & \times \text{Sp} \left[\gamma_\beta (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu \times \right. \\ & \left. \times U_2 \gamma_\beta (\hat{p}_4 - \hat{k}) \gamma_\mu U_4^{abc} \gamma_\nu U_3 \right], \end{aligned}$$

для прямых s -канальных боксов (случай 3):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,D}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} = & -C_t \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \times \quad (59) \\ & \times D_a(k) D_b(q_s - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2p_3 k)} \times \\ & \times \text{Sp} \left[\gamma_\mu (\hat{p}_3 - \hat{k}) \gamma_\beta U_4^{abc} \gamma_\nu \times \right. \\ & \left. \times U_2 \gamma_\beta (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu U_3 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,D}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} = & +C_s \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \times \quad (60) \\ & \times D_a(k) D_b(q_s - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2p_3 k)} \times \\ & \times \text{Sp} \left[\gamma_\beta (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu U_2 \right] \times \end{aligned}$$

$$\times \text{Sp} \left[\gamma_\mu (\hat{p}_3 - \hat{k}) \gamma_\beta U_4^{abc} \gamma_\nu U_3 \right],$$

для перекрестных s -канальных боксов (случай 4):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,C}^{ab} \mathcal{M}_t^{c+} = & +C_t \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \times \quad (61) \\ & \times D_a(k) D_b(q_s - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2p_4 k)} \times \\ & \times \text{Sp} \left[\gamma_\beta (\hat{p}_4 - \hat{k}) \gamma_\mu U_4^{abc} \gamma_\nu \times \right. \\ & \left. \times U_2 \gamma_\beta (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu U_3 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,C}^{ab} \mathcal{M}_s^{c+} = & -C_s \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \times \quad (62) \\ & \times D_a(k) D_b(q_s - k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2p_4 k)} \times \\ & \times \text{Sp} \left[\gamma_\beta (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu U_1^{abc} \gamma_\nu U_2 \right] \times \\ & \times \text{Sp} \left[\gamma_\beta (\hat{p}_4 - \hat{k}) \gamma_\mu U_4^{abc} \gamma_\nu U_3 \right]. \end{aligned}$$

В вышеприведенных выражениях использована новая форма записи комбинаций констант связи и степеней поляризации. Она возможна только в УРП, так как в этом случае выполняется следующее свойство: каждый сомножитель состоит из суммы произведений либо четного, либо нечетного количества гамма-матриц. Обсуждаемое свойство вместе со свойствами (54) позволяет комбинациям Γ^i коммутировать с любыми матрицами в шпуре. В результате новые сокращения приобретают вид

$$U_{1,4}^{abc} = \Gamma^a \Gamma^b \Gamma^c U_{1,4} = (v_0^{abc} - a_0^{abc} \gamma_5) U_{1,4}, \quad (63)$$

где

$$v_0^{abc} = v^a v^b v^c + v^a a^b a^c + a^a v^b a^c + a^a a^b v^c, \quad (64)$$

$$a_0^{abc} = a^a a^b a^c + a^a v^b v^c + v^a a^b v^c + v^a v^b a^c.$$

Упрощая в УРП, получим

$$U_1^{abc} = \frac{1}{2} (v_1^{abc} - a_1^{abc} \gamma_5) \hat{p}_1, \quad (65)$$

$$U_4^{abc} = (v_0^{abc} - a_0^{abc} \gamma_5) \hat{p}_4,$$

где

$$v_1^{abc} = v_0^{abc} - \lambda_1 a_0^{abc}, \quad a_1^{abc} = a_0^{abc} - \lambda_1 v_0^{abc}. \quad (66)$$

Новая форма записи позволяет собрать константы связи в сечениях боксов в симметричные и весьма удобные для программирования комбинации:

$$C_1^{abc} = v_1^{abc} (v_0^{abc} + \lambda_2 a_0^{abc}), \quad (67)$$

$$C_2^{abc} = a_1^{abc} (a_0^{abc} + \lambda_2 v_0^{abc}),$$

$$C_3^{abc} = v_0^{abc} (v_1^{abc} + \lambda_2 a_1^{abc}),$$

$$C_4^{abc} = a_0^{abc} (a_1^{abc} + \lambda_2 v_1^{abc}).$$

Видно, кстати, что выполняется свойство

$$C_1^{abc} + C_2^{abc} = C_3^{abc} + C_4^{abc}.$$

Пока запишем в новых обозначениях вклады борновского сечения:

$$S_{tt}^{aac} = 2[C_1^{a\gamma c}(u^2 + s^2) + C_2^{a\gamma c}(u^2 - s^2)],$$

$$S_{ts}^{aac} = S_{st}^{aac} = 2u^2[C_1^{a\gamma c} + C_2^{a\gamma c}],$$

$$S_{ss}^{aac} = 2[C_3^{a\gamma c}(u^2 + t^2) + C_4^{a\gamma c}(u^2 - t^2)].$$

Верхний индекс γ в C играет специфическую роль,

так, например:

$$v_0^{a\gamma c} = g_V^{ac}, \quad a_0^{a\gamma c} = g_A^{ac}.$$

После вычисления следов в числителях боксов 4-вектор k либо отсутствует, либо содержится как k_α или $k_\alpha k_\beta$. Соответственно, для расчета боксов сечений нам предстоит вычисление 4-точечных скалярных, векторных и тензорных функций (согласно порядку положения в числителе подынтегральных выражений ниже), перечислим их для всех четырех случаев:

$$\begin{aligned} I_{0,\alpha,\alpha\beta}^{(1),ab} &= \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m_a^2)((k - q_t)^2 - m_b^2)(k^2 - 2p_1k)(k^2 + 2p_2k)}, \\ I_{0,\alpha,\alpha\beta}^{(2),ab} &= \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m_a^2)((k - q_t)^2 - m_b^2)(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_4k)}, \\ I_{0,\alpha,\alpha\beta}^{(3),ab} &= \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m_a^2)((k - q_s)^2 - m_b^2)(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_3k)}, \\ I_{0,\alpha,\alpha\beta}^{(4),ab} &= \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m_a^2)((k - q_s)^2 - m_b^2)(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_4k)}. \end{aligned} \quad (68)$$

Сведение 4-точечных векторных и тензорных интегралов к скалярным (так называемое векторное и тензорное интегрирование) подробно разобрано в Приложении В.

3.4. Расчет $\gamma\gamma$ -бокса

Все вклады (55)–(62) в сечение от диаграмм $\gamma\gamma$ -бокса вычисляются по сходной методике. В начале этого раздела будет рассчитана $(s, D) \times s$ -часть сечения $\gamma\gamma$ -бокса, т.е. формула (60) при $a, b = \gamma$.

Прежде всего выделим в (60) инфракрасно-расходящиеся члены; произведения амплитуд имеют две точки инфракрасной расходимости (ИКР): $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow q_r$. В точке $k \rightarrow 0$ вклад (60) факторизуется:

$$\mathcal{M}_{s,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+} |_{k \rightarrow 0} = C_s D_\gamma(q_s) S_{s,D}^c H_0^\gamma(p_1, p_3). \quad (69)$$

1. Борновский пропагатор, который формируется по простому правилу:

$$\lim_{k \rightarrow 0} D_\gamma(q_s - k) = D_\gamma(q_s),$$

видно, что он утрачивает зависимость от k и выносится за знак интеграла.

2. 3-точечная функция

$$\begin{aligned} H_0^\gamma(p_1, p_3) &= \\ &= \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_3k)}, \end{aligned} \quad (70)$$

непосредственно выражающаяся через скалярный мастер-интеграл, полный расчет которого приведен в Приложении С.

3. Борновская структура от произведения двух шпуров:

$$\begin{aligned} S_{s,D}^c &= \text{Sp} \left[\gamma_\beta \hat{p}_1 \gamma_\mu U_1^{\gamma\gamma} \gamma_\nu U_2^c \right] \times \\ &\times \text{Sp} \left[\gamma_\mu \hat{p}_3 \gamma_\beta U_4^{\gamma\gamma} \gamma_\nu U_3^c \right] = -2t \cdot S_{ss}^c. \end{aligned}$$

4. Факторизуется также инвариант t , это можно проверить непосредственным расчетом.

Из полученных в точке $k \rightarrow 0$ выражений без труда формируется искомая ИКР-часть $\gamma\gamma$ -бокса, приведем эти выражения здесь в порядке, удобном для дальнейшего попарного суммирования — t -канальные:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{t,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_t^{c+} |_{k \rightarrow 0} &= \\ &= -2C_t D_\gamma(q_t) \cdot S_{tt}^c \cdot s H_0^\gamma(p_1, -p_2), \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{t,C}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_t^{c+}|_{k \rightarrow 0} = \\ & = +2C_t D_\gamma(q_t) \cdot S_{tt}^{\gamma c} \cdot u H_0^\gamma(p_1, p_4), \\ & \mathcal{M}_{t,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+}|_{k \rightarrow 0} = \\ & = -2C_s D_\gamma(q_t) \cdot S_{ts}^{\gamma c} \cdot s H_0^\gamma(p_1, -p_2), \\ & \mathcal{M}_{t,C}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+}|_{k \rightarrow 0} = \\ & = +2C_s D_\gamma(q_t) \cdot S_{ts}^{\gamma c} \cdot u H_0^\gamma(p_1, p_4) \end{aligned}$$

и s -канальные:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{s,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_t^{c+}|_{k \rightarrow 0} = \quad (72) \\ & = -2C_t D_\gamma(q_s) \cdot S_{st}^{\gamma c} \cdot t H_0^\gamma(p_1, p_3), \\ & \mathcal{M}_{s,C}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_t^{c+}|_{k \rightarrow 0} = \\ & = +2C_t D_\gamma(q_s) \cdot S_{st}^{\gamma c} \cdot u H_0^\gamma(p_1, p_4), \\ & \mathcal{M}_{s,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+}|_{k \rightarrow 0} = \\ & = -2C_s D_\gamma(q_s) \cdot S_{ss}^{\gamma c} \cdot t H_0^\gamma(p_1, p_3), \\ & \mathcal{M}_{s,C}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+}|_{k \rightarrow 0} = \\ & = +2C_s D_\gamma(q_s) \cdot S_{ss}^{\gamma c} \cdot u H_0^\gamma(p_1, p_4). \end{aligned}$$

В точке $k \rightarrow q_s$, применяя закон сохранения 4-импульса, получим похожую факторизацию:

$$\mathcal{M}_{s,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+}|_{k \rightarrow q_s} = C_s D_\gamma(q_s) S_{s,D}^c F_0^\gamma(p_1, p_3). \quad (73)$$

Интеграл $F_0^\gamma(p_1, p_3)$ определяется так:

$$\begin{aligned} & F_0^\gamma(p_1, p_3) = \quad (74) \\ & = \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1}{((k - q_s)^2 - \lambda^2)(k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2p_3 k)}. \end{aligned}$$

Заменой $k \rightarrow k + q_s$, которая формально требует простых перестановок: $p_1 \rightarrow -p_2, p_3 \rightarrow -p_4$, не меняющих инвариантов, он сводится к рассмотренному выше:

$$F_0^\gamma(p_1, p_3) = H_0^\gamma(p_1, p_3). \quad (75)$$

Соответствующие формулам (71) и (72) выражения в точках $k \rightarrow q_r$ из-за равенства интегралов (75) имеют в точности такой же вид:

$$\mathcal{M}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}^{c+}|_{k \rightarrow 0} = \mathcal{M}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}^{c+}|_{k \rightarrow q_r}.$$

Теперь произведем вычитание ИКР-части $\gamma\gamma$ -боксов из полного результата, это делается для каждого из восьми слагаемых сечения по единой схеме:

$$\mathcal{M}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}^{c+} - \mathcal{M}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}^{c+}|_{k \rightarrow 0} - \mathcal{M}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}^{c+}|_{k \rightarrow q_s}.$$

В получившемся выражении после алгебраических преобразований все инфракрасно-расходящиеся скалярные интегралы сгруппируются в инфракрасно-конечную комбинацию (будем обозначать ее $X_0(p_1, p_3)$, согласно работе Кахане [20]). Упрощенный расчет интеграла $X_0(p_1, p_3)$ приведен в Приложении С. Там же приведены все требуемые

2-точечные функции и ИК-конечные скалярные 3-точечные функции G_0 .

Часто ИКР-часть сечения боксов, благодаря очевидной факторизации перед борновским сечением (не совсем, впрочем, полной, а лишь отдельно перед $t \times (t + s)$ (71) и $s \times (t + s)$ (72) частями борновского сечения), объединяется с вершинной ИКР-частью (после этого факторизация уже полная, перед всем сечением) и вкладом мягких фотонов, так что параметр λ сокращается аналитически. Здесь поступим по-другому: приведем для сечений боксов полные формулы, оставляя тем самым λ в программе численной оценки. Этим достигается как полнота и определенная симметрия записи, так и то, что, получив в сумме всех вкладов независимость от параметра λ численно, можно иметь дополнительную степень уверенности в правильности программирования.

Приведем получившийся в результате вычислений результат для $\gamma\gamma$ -боксов в УРП. Скалярные интегралы и вклады в сечения будем выражать относительно через логарифмы, содержащие фермионную массу:

$$L_\Lambda = \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}, \quad L_\lambda = \ln \frac{\lambda^2}{m^2}, \quad L_r = \ln \frac{|r|}{m^2}.$$

В $\gamma\gamma$ -боксов встречаются только три определенные комбинации констант связи и степеней поляризации:

$$\begin{aligned} P_3 & \equiv P_1^- g_+^{\gamma\gamma c} - P_2^- f_+^{\gamma\gamma c}, \quad (76) \\ P_4 & \equiv P_2^+ f_-^{\gamma\gamma c}, \quad P_5 \equiv P_2^- f_-^{\gamma\gamma c}, \end{aligned}$$

перед которыми происходит факторизация. Кроме этого удобно использовать сокращенные обозначения:

$$T_\pm = t^2 \pm u^2, \quad T_0 = s^2 + u^2.$$

Выражения для прямых t -канальных $\gamma\gamma$ -боксов выглядят так:

$$\mathcal{M}_{t,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_t^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{t} D_c^*(q_t) (P_3 x_1 + P_4 y_1), \quad (77)$$

$$\mathcal{M}_{t,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{t} D_c^*(q_s) P_3 x_1, \quad (78)$$

$$\begin{aligned} x_1 & = [L_t - L_s] (T_0 [L_s - L_t] - 2tu) + \\ & + 2u^2 (L_s [L_s - 2L_\lambda] - \frac{4}{3}\pi^2), \end{aligned}$$

$$y_1 = 2s^2 \left(L_t^2 - 2L_s [L_t - L_\lambda] + \frac{4}{3}\pi^2 \right),$$

для перекрестных t -канальных $\gamma\gamma$ -боксов:

$$\mathcal{M}_{t,C}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_t^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{t} D_c^*(q_t) (P_3 x_2 + P_4 y_2), \quad (79)$$

$$\mathcal{M}_{t,C}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{t} D_c^*(q_s) P_3 x_2, \quad (80)$$

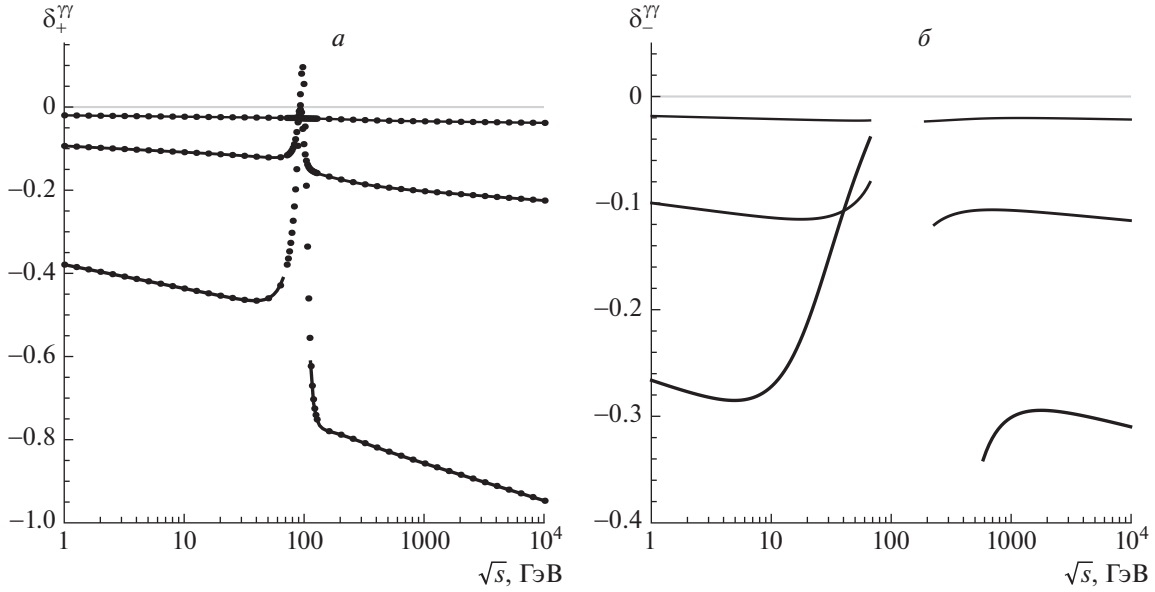


Рис. 6. Зависимость от \sqrt{s} относительных поправок $\delta_+^{\gamma\gamma}$ (а) и $\delta_-^{\gamma\gamma}$ (б). Обозначения такие же, как на рис. 4.

$$x_2 = 2u^2 \left(L_t^2 - 2L_u[L_t - L_\lambda] + \frac{4}{3}\pi^2 \right), \quad + 2t^2 \left(L_u[L_u - 2L_\lambda] - \frac{1}{3}\pi^2 \right),$$

$$y_2 = [L_u - L_t] (T_0[L_t - L_u] + 2st) - \pi^2 T_0 + 2s^2 \left(L_u[L_u - 2L_\lambda] - \frac{1}{3}\pi^2 \right),$$

для прямых s -канальных $\gamma\gamma$ -боксов:

$$\mathcal{M}_{s,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_t^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{s} D_c^*(q_t) P_3 x_3, \quad (81)$$

$$\mathcal{M}_{s,D}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{s} D_c^*(q_s) (P_3 x_3 + P_5 y_3), \quad (82)$$

$$x_3 = [L_t - L_s] (T_+ [L_s - L_t] + 2su) + 2u^2 \left(L_t[L_t - 2L_\lambda] - \frac{1}{3}\pi^2 \right),$$

$$y_3 = 2t^2 \left(L_s^2 - 2L_t[L_s - L_\lambda] + \frac{1}{3}\pi^2 \right),$$

для перекрестных s -канальных $\gamma\gamma$ -боксов:

$$\mathcal{M}_{s,C}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_t^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{s} D_c^*(q_t) P_3 x_4, \quad (83)$$

$$\mathcal{M}_{s,C}^{\gamma\gamma} \mathcal{M}_s^{c+} = \frac{8\pi\alpha^3}{s} D_c^*(q_s) (P_3 x_4 + P_5 y_4), \quad (84)$$

$$x_4 = 2u^2 \left(L_s^2 - 2L_u[L_s - L_\lambda] + \frac{1}{3}\pi^2 \right),$$

$$y_4 = [L_u - L_s] (T_+ [L_s - L_u] + 2st) +$$

На рис. 6 приведены зависимости от \sqrt{s} относительных поправок к дифференциальному сечению при различных углах для вкладов $\gamma\gamma$ -боксов. Видно превосходное согласие двух расчетов: асимптотического и с помощью компьютерной алгебры. На рис. 6 и всех рисунках ниже приводятся только те точки, в которых асимптотические методы работают надежно, т.е. в области, довольно далекой от Z -резонанса.

3.5. Расчет γZ -боксов в LE -режиме

Рассчитаем вклад боксовской диаграммы с одним фотоном (который переносит 4-импульс k) и одним Z -бозоном (переносит 4-импульс $q_r - k$). Легко можно показать, что обратная ситуация [когда Z -бозон имеет 4-импульс k , обозначим ее как $Z\gamma$ -боксы, см. (45)] даст совершенно такой же вклад, поэтому будем поступать так: рассчитаем первую ситуацию и в конце просто домножим на два.

Нетрудно убедиться, что сечение формируется только из 4-точечного ИК-расходящегося скалярного (с одной точкой расходимости: $k \rightarrow 0$) и ИК-конечных векторного и тензорного интегралов:

$$I_{0,\alpha,\beta}^{\gamma Z}(p_1, p_3, q_s) = \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \lambda^2) ((k - q_s)^2 - m_Z^2) (k^2 - 2p_1 k) (k^2 - 2p_3 k)}.$$

Скалярный интеграл $I_0^{\gamma Z}$ после тождественного преобразования разобьем на две части:

$$I_0^{\gamma Z} = (I_0^{\gamma Z} - I_0^{\gamma Z}|_{k \rightarrow 0}) + I_0^{\gamma Z}|_{k \rightarrow 0}.$$

Первая часть в LE-режиме незначительна, чтобы это показать, применим методику предыдущего раздела, тогда расчет сводится к произведению пропагатора и 3-точечной функции: $D_Z(q_s)H_0^Z \sim \sim \mathcal{O}(m_Z^{-4})$. Вторая часть выражается через ИК-расходящуюся 3-точечную функцию H_0^γ , которая уже обсуждалась выше:

$$I_0^{\gamma Z}|_{k \rightarrow 0} = D_Z(q_s)H_0^\gamma.$$

Выпишем ИКР-части γZ -боксов, они получают-ся из исходного выражения в пределе $k \rightarrow 0$. С учетом факторизации, точно так, как это было проделано выше для случая $\gamma\gamma$ -боксов, выясняем, что вклады в сечения $\mathcal{M}^{\gamma Z}\mathcal{M}^{c+}|_{k \rightarrow 0}$ легко получить из (71), (72) простыми заменами:

$$D_\gamma(q_r) \rightarrow D_Z(q_r), \quad S_{rr'}^{\gamma c} \rightarrow S_{rr'}^{Zc}. \quad (85)$$

Теперь рассчитаем ИК-конечную часть. В LE-режиме с учетом того, что основной вклад в интеграл вносят большие k , численно важен только тензорный интеграл. Используем трюк Фейнмана:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{C^2}, \quad \frac{1}{A^2B} = \int_0^1 \frac{2xdx}{C^3}, \quad (86)$$

$$\frac{1}{A^3B} = \int_0^1 \frac{3x^2dx}{C^4},$$

где

$$C = Ax + B\bar{x}, \quad \bar{x} = 1 - x.$$

Применяя этот прием и упрощая получившийся знаменатель, получим:

$$I_{\alpha\beta}^{\gamma Z} = \int_0^1 3z^2 dz \int_0^1 2y dy \times \quad (87)$$

$$\times \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{[k^2 - 2kp + \Delta]^4},$$

где

$$p = xyz \cdot (p_1 - p_3) + yz \cdot p_3 + \bar{z} \cdot q_s, \quad (88)$$

$$\Delta = \bar{z} \cdot (q_s^2 - m_Z^2).$$

Снимаем тензорный интеграл по формуле (A5) из работы [20]:

$$\int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{[k^2 - 2kp + \Delta]^4} = \quad (89)$$

$$= \frac{p_\alpha p_\beta - g_{\alpha\beta}(p^2 - \Delta)/2}{6(p^2 - \Delta)^2}.$$

С учетом того, что Δ доминирует, получим

$$I_{\alpha\beta}^{\gamma Z} = -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta} \int_0^1 z^2 dz \int_0^1 y dy \int_0^1 dx \frac{1}{p^2 - \Delta}. \quad (90)$$

Выпишем выражение в знаменателе, после упрощения оно имеет следующий точный вид:

$$p^2 - \Delta = y^2 z^2 t x(x-1) + (s\bar{y} + m^2 y^2)z^2 - (s\bar{y} + m_Z^2)z + m_Z^2.$$

Видно, что интеграл по x в (90) легко снимается, тогда, вводя новое обозначение $I_{(i)}^{\gamma Z}$ ($i = \overline{1,4}$), получим тензорный интеграл:

$$I_{\alpha\beta}^{\gamma Z} = g_{\alpha\beta} I_{(3)}^{\gamma Z}, \quad (91)$$

$$\text{где } I_{(3)}^{\gamma Z} = \frac{1}{a} \int_0^1 z dz \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{\beta}} \ln \frac{\sqrt{\beta} - ayz}{\sqrt{\beta} + ayz},$$

где

$$a = \sqrt{-t}, \quad \beta = a^2 y^2 z^2 - 4s\bar{y}z\bar{z} + 4m_Z^2 \bar{z}. \quad (92)$$

Поработаем с интегралом (91), введем обозначение

$$\delta = \frac{a}{2m_Z} \rightarrow +0$$

и опустим незначимое в LE-режиме слагаемое $4s\bar{y}z\bar{z}$ (это можно проверить численным интегрированием), тогда интеграл $I_{(3)}^{\gamma Z}$ приобретает вид

$$I_{(3)}^{\gamma Z} = \frac{1}{4m_Z^2 \delta} \int_0^1 z dz \times \quad (93)$$

$$\times \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{\bar{z} + \delta^2 y^2 z^2}} \ln \frac{\sqrt{\bar{z} + \delta^2 y^2 z^2} - \delta yz}{\sqrt{\bar{z} + \delta^2 y^2 z^2} + \delta yz}.$$

Снять интеграл по y в (93) представляется возможным, после этой операции получаем

$$I_{(3)}^{\gamma Z} = -\frac{1}{4m_Z^2} \times \quad (94)$$

$$\times \frac{1}{4\delta^2} \int_0^1 dz \ln^2 \frac{\sqrt{1-z+\delta^2 z^2} - \delta z}{\sqrt{1-z+\delta^2 z^2} + \delta z}.$$

Убедимся, что при $\delta \rightarrow +0$

$$\int_0^1 dz \ln^2 \frac{\sqrt{1-z+\delta^2 z^2} - \delta z}{\sqrt{1-z+\delta^2 z^2} + \delta z} \approx \quad (95)$$

$$\approx 2\delta^2 \left[3 - 4 \ln(2\delta) \right],$$

для этого предварительно рассчитаем более простой интеграл:

$$\int_0^1 dz \ln^2 \frac{\sqrt{1-z+\delta^2}-\delta}{\sqrt{1-z+\delta^2}+\delta} \approx \quad (96)$$

$$\approx 2\delta^2 \left[6 - 4 \ln(2\delta) \right]$$

(с ним справиться можно, интегрируя “в лоб”) и затем разницу между (95) и (96), которая даст $-6\delta^2 + \mathcal{O}(\delta^4)$. Наконец, получим асимптотическое выражение для LE-режима:

$$I_{(3)}^{\gamma Z} = -\frac{1}{4m_Z^2} \left(\frac{3}{2} + \ln \frac{m_Z^2}{-t} \right). \quad (97)$$

Выпишем ИК-конечные (обозначаем их символом “F” от “finite”) части γZ -боксов в LE-режиме, учитывая факторизацию перед борновскими комбинациями $S_{rr'}^{aac}$; получаем для t -канальных боксов:

$$\mathcal{M}_{t,D}^{\gamma Z} \mathcal{M}_t^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} = \quad (98)$$

$$= 16\pi\alpha^3 (4S^{Zc} + U^{Zc}) I_{(1)}^{\gamma Z} D_c^*(q_t),$$

$$\mathcal{M}_{t,D}^{\gamma Z} \mathcal{M}_s^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} = 16\pi\alpha^3 U^{Zc} I_{(1)}^{\gamma Z} D_c^*(q_s),$$

$$\mathcal{M}_{t,C}^{\gamma Z} \mathcal{M}_t^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} = -16\pi\alpha^3 (S^{Zc} + 4U^{Zc}) I_{(2)}^{\gamma Z} D_c^*(q_t),$$

$$\mathcal{M}_{t,C}^{\gamma Z} \mathcal{M}_s^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} = -64\pi\alpha^3 U^{Zc} I_{(2)}^{\gamma Z} D_c^*(q_s),$$

а для s -канальных боксов:

$$\mathcal{M}_{s,D}^{\gamma Z} \mathcal{M}_t^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} = 16\pi\alpha^3 U^{Zc} I_{(3)}^{\gamma Z} D_c^*(q_t), \quad (99)$$

$$\mathcal{M}_{s,D}^{\gamma Z} \mathcal{M}_s^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} = 16\pi\alpha^3 (4T^{Zc} + U^{Zc}) I_{(3)}^{\gamma Z} D_c^*(q_s),$$

$$\mathcal{M}_{s,C}^{\gamma Z} \mathcal{M}_t^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} = -64\pi\alpha^3 U^{Zc} I_{(2)}^{\gamma Z} D_c^*(q_t),$$

$$\mathcal{M}_{s,C}^{\gamma Z} \mathcal{M}_s^{c+}|_{\text{LE}}^{\text{F}} = -16\pi\alpha^3 (T^{Zc} + 4U^{Zc}) I_{(2)}^{\gamma Z} D_c^*(q_s).$$

3.6. Расчет ZZ- и WW-боксов в LE-режиме

В расчете ZZ-боксов фигурируют ИК-конечные 4-точечные скалярная, векторная и тензорная функции:

$$I_{0,\alpha,\alpha\beta}^{ZZ}(p_1, p_3, q_s) = \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m_Z^2) ((k - q_s)^2 - m_Z^2) (k^2 - 2p_1 k) (k^2 - 2p_3 k)}.$$

В LE-режиме можно существенно упростить задачу, замечая, что основной вклад в интеграл вносят большие k (так это было сделано и в предыдущем разделе). Внешними импульсами в подынтегральном выражении можно пренебречь, тогда

$$I_{(0,\alpha,\alpha\beta)}^{ZZ}(p_1, p_3, q_s) = \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta}{(k^2)^2 (k^2 - m_Z^2)^2}. \quad (100)$$

Векторный интеграл равен нулю из-за нечетности по вектору k , а скалярный интеграл даст вклады, малые по сравнению с вкладом тензорного.

Используя формулу

$$\int \frac{d^4 k}{i\pi^2} k_\alpha k_\beta f(k^2) = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} k^2 f(k^2)$$

(убедиться в ее правильности можно, домножив обе части на $g^{\alpha\beta}$) и осуществляя поворот Вика

$$k_0 \rightarrow ik_0, \quad (101)$$

переходим к евклидовому 4-вектору k_E , что дает:

$$\frac{d^4 k}{i\pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{2} k_E^2 dk_E^2 d\Omega_4, \quad \int d\Omega_4 = 2\pi^2.$$

Осуществляя замену

$$k^2 = -k_E^2 = -z, \quad \frac{d^4 k}{i\pi^2} = z dz,$$

получим

$$I_{\alpha\beta}^{ZZ}(p_1, p_3, q_s) \approx \quad (102)$$

$$\approx \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \int_0^\infty z dz \frac{-z}{z^2 (z + m_Z^2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \int_0^\infty dz \frac{1}{(z + m_Z^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \frac{1}{z + m_Z^2} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{4m_Z^2} g_{\alpha\beta}.$$

Интегралы для прочих случаев имеют совершенно такой же вид.

Итак, выражения для ZZ -боксов в LE-режиме $\mathcal{M}^{ZZ}\mathcal{M}^{c+}|_{LE}$ получаем из (98), (99) заменами:

$$Zc \rightarrow \zeta c, \quad I_{1,2,3}^{\gamma Z} \rightarrow -\frac{1}{4m_Z^2}. \quad (103)$$

Индекс “ ζ ” означает здесь следующее:

$$v^\zeta = v_+^{ZZ}, \quad a^\zeta = a_+^{ZZ}. \quad (104)$$

Чтобы получить выражения для WW -боксов, во-первых, как уже говорилось, необходимо “выключить” перекрестные диаграммы. Далее выражения в LE-режиме $\mathcal{M}^{WW}\mathcal{M}^{c+}|_{LE}$ получаем из формул (98), (99) следующими заменами:

$$Zc \rightarrow \omega c, \quad I_{1,2,3}^{\gamma Z} \rightarrow -\frac{1}{4m_W^2}. \quad (105)$$

Индекс “ ω ” означает здесь следующее:

$$v^\omega = v_+^{WW}, \quad a^\omega = a_+^{WW}. \quad (106)$$

3.7. Расчет γZ , ZZ - и WW -боксов в HE-режиме

Для того, чтобы рассчитать тяжелые боксы (боксы с по крайней мере одним массивным бозоном: γZ , ZZ , WW) в HE-режиме воспользуемся асимптотическим подходом [21], который был впервые разработан одним из авторов для расчета ЭСП к процессу Дрелла–Яна при больших инвариантных массах дилептона. Перестроим общие выражения для вкладов в сечение (55)–(62), применяя следующие правила:

1. отнимаем и добавляем “ИКР-части” (в точках $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow q$),
2. пренебрегаем массами бозонов везде, кроме комбинаций $\Pi^{ab}(q_r)$ с бозонными пропагаторами и 3-точечными функциями $H_0^{\gamma,Z}$ (это возможно именно в HE-режиме),
3. сохраняем произвольную индексацию бозонов $a, b = \gamma, Z, W$ в комбинациях констант связи.

Для прямых t -канальных боксов (случай 1) получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{t,D}^{ab}\mathcal{M}_t^{c+} &= \quad (107) \\ &= -\frac{2C_t}{t} \left[2C_{1+2}^{abc} l_{st} t u - C_1^{abc} l_{st}^2 (3s^2 + u^2) + \right. \\ &\quad \left. + C_2^{abc} l_{st}^2 (s^2 - u^2) \right] - 2C_t s \Pi_1^{ab}(qt) H_{tt}^{abc}, \\ \mathcal{M}_{t,D}^{ab}\mathcal{M}_s^{c+} &= +\frac{2C_s}{t} \left[C_{1+2}^{abc} l_{st} (l_{st} [s^2 + u^2] - 2tu) \right] - \end{aligned}$$

$$- 2C_s s \Pi_1^{ab}(qt) H_{ts}^{abc},$$

для перекрестных t -канальных боксов (случай 2):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{t,C}^{ab}\mathcal{M}_t^{c+} &= -\frac{2C_t}{t} \left[(C_1^{abc} [s^2 + 3u^2] + \right. \quad (108) \\ &\quad \left. + C_2^{abc} [u^2 - s^2]) (l_{tu}^2 + \pi^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2C_{1-2}^{abc} l_{tu} s t \right] + 2C_t u \Pi_2^{ab}(qt) H_{tt}^{abc}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{t,C}^{ab}\mathcal{M}_s^{c+} &= +\frac{2C_s}{t} \left[-2C_{1+2}^{abc} u^2 (l_{tu}^2 + \pi^2) \right] + \\ &\quad + 2C_s u \Pi_2^{ab}(qt) H_{ts}^{abc}, \end{aligned}$$

для прямых s -канальных боксов (случай 3):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,D}^{ab}\mathcal{M}_t^{c+} &= \quad (109) \\ &= -\frac{2C_t}{s} \left[-C_{1+2}^{abc} l_{st} (l_{st} [t^2 + u^2] + 2su) \right] - \\ &\quad - 2C_t t \Pi_3^{ab}(q_s) H_{st}^{abc}, \\ \mathcal{M}_{s,D}^{ab}\mathcal{M}_s^{c+} &= \\ &= +\frac{2C_s}{s} \left[2C_{3+4}^{abc} l_{st} s u + C_3^{abc} l_{st}^2 (3t^2 + u^2) + \right. \\ &\quad \left. + C_4^{abc} l_{st}^2 (u^2 - t^2) \right] - 2C_s t \Pi_3^{ab}(q_s) H_{ss}^{abc}, \end{aligned}$$

для перекрестных s -канальных боксов (случай 4):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,C}^{ab}\mathcal{M}_t^{c+} &= +\frac{2C_t}{s} \left[-2C_{1+2}^{abc} l_{su}^2 u^2 \right] + \quad (110) \\ &\quad + 2C_t u \Pi_4^{ab}(q_s) H_{st}^{abc}, \\ \mathcal{M}_{s,C}^{ab}\mathcal{M}_s^{c+} &= \\ &= -\frac{2C_s}{s} \left[C_3^{abc} l_{su}^2 (t^2 + 3u^2) + C_4^{abc} l_{su}^2 (u^2 - t^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2C_{3-4}^{abc} l_{su} s t \right] + 2C_s u \Pi_4^{ab}(q_s) H_{ss}^{abc}. \end{aligned}$$

Используются следующие сокращения:

$$H_{tt}^{abc} = 2[C_1^{abc}(u^2 + s^2) + C_2^{abc}(u^2 - s^2)],$$

$$H_{ts}^{abc} = H_{st}^{abc} = 2u^2[C_1^{abc} + C_2^{abc}],$$

$$H_{ss}^{abc} = 2[C_3^{abc}(u^2 + t^2) + C_4^{abc}(u^2 - t^2)],$$

$$C_{i\pm j}^{abc} = C_i^{abc} \pm C_j^{abc},$$

$$\Pi_i^{ab}(q_r) = H_0^a D_b(q_r) + D_a(q_r) H_0^b$$

(i — номер случая),

$$l_{r_1 r_2} = \ln \frac{|r_1|}{|r_2|}.$$

На этом этапе полезно будет убедиться, что вклад боксов в случае нейтральных бозонов не

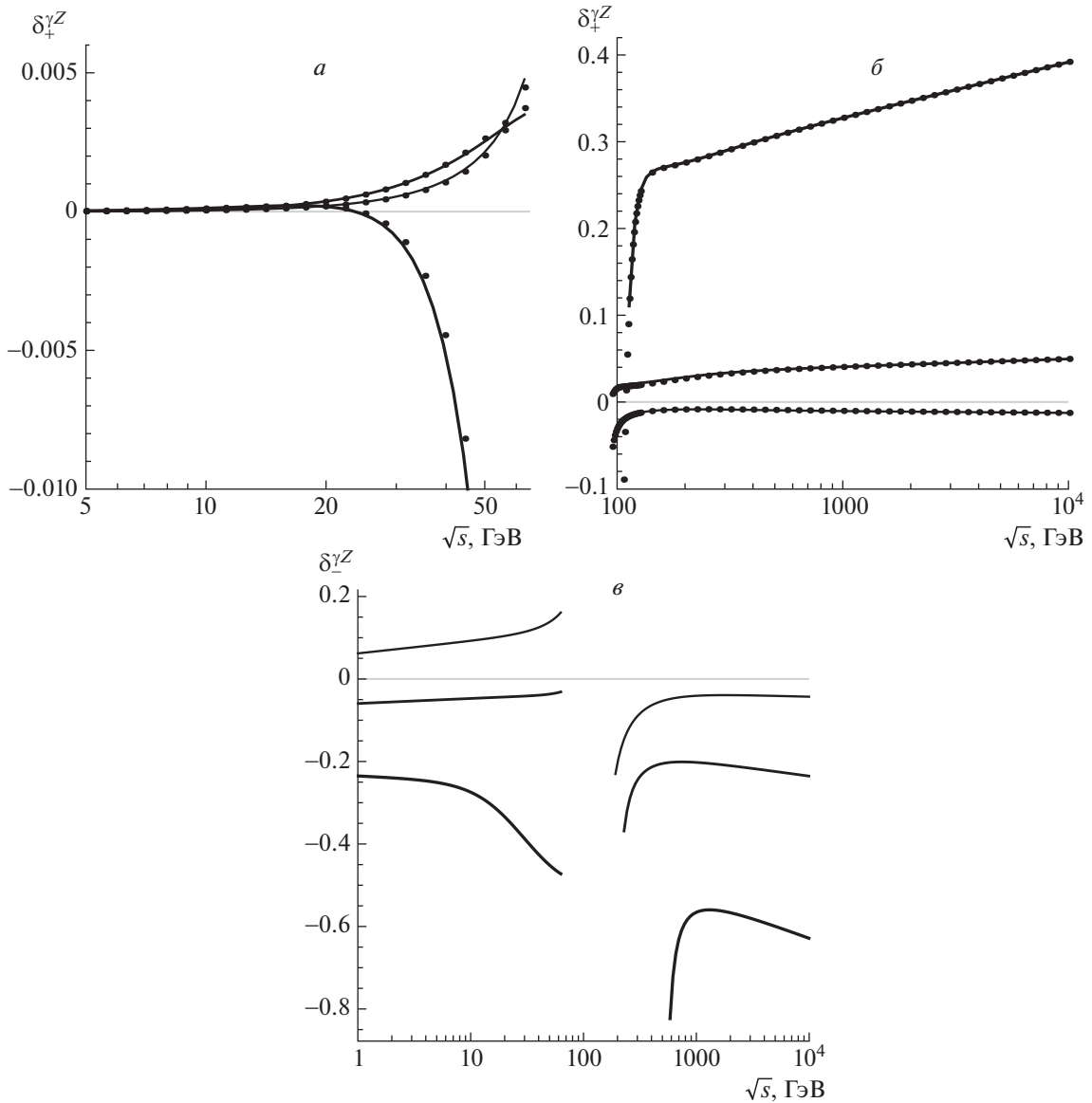


Рис. 7. Зависимость от \sqrt{s} относительных поправок $\delta_+^{\gamma Z}$ (а и б) и $\delta_-^{\gamma Z}$ (в). Обозначения такие же, как на рис. 4.

содержит коллинеарной сингулярности. Убедимся в этом на примере $\gamma\gamma$ -боксов в t -канале. Суммируя прямой и перекрестный вклады, получим слагаемое, содержащее фермионную массу в 3-точечной функции, в виде

$$2C_t[-s\Pi_1^{\gamma\gamma}(qt) + u\Pi_2^{\gamma\gamma}(qt)]H_{tt}^{\gamma\gamma c}.$$

Выражение в скобках после подстановки 3-точечных интегралов пропорционально сумме логарифмов

$$-\frac{1}{2}L_s^2 + L_sL_\lambda + \frac{1}{2}L_u^2 - L_uL_\lambda + \dots = l_{su} \left(\ln \frac{m^2}{\sqrt{s}|u|} + L_\lambda \right) + \dots = l_{su} \ln \frac{\lambda^2}{\sqrt{s}|u|} + \dots$$

и, как видно, от массы m не зависит.

На рис. 7, 8 и 9 приведены зависимости от \sqrt{s} относительных поправок от вкладов γZ -, ZZ - и WW -боксов. Видно превосходное согласие для относительных поправок в обоих расчетах: асимптотического и с помощью компьютерной алгебры как в LE-режиме, так и в HE-режиме.

3.8. Мягкие фотоны

Рассчитаем сечение процесса с излучением мягкого фотона с энергией p_0 в с.ц.м. начальных частиц:

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2, \quad p_{10} = p_{20} = E = \sqrt{s}/2, \quad (111)$$

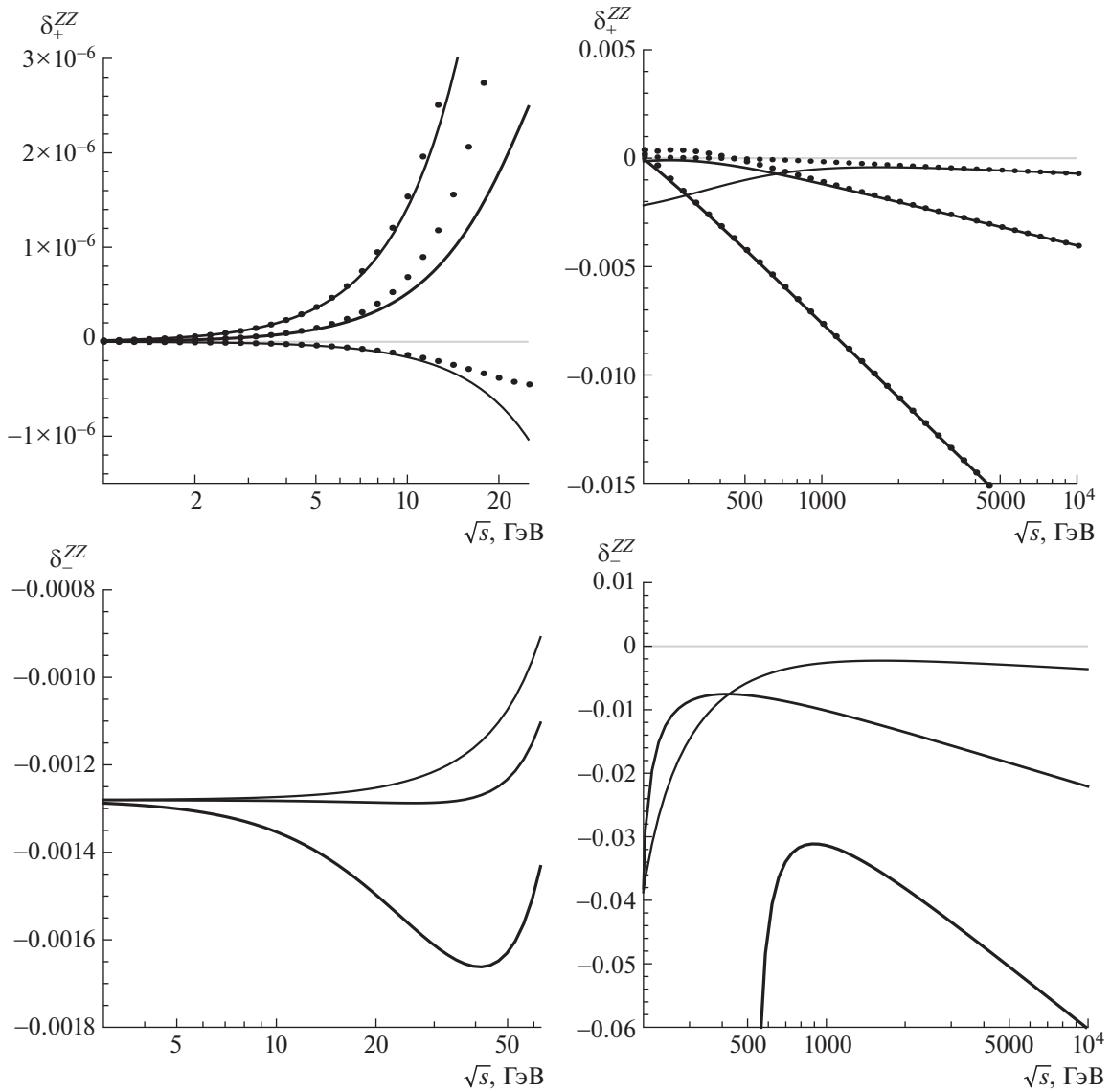


Рис. 8. Зависимость от \sqrt{s} относительных поправок δ_{\pm}^{ZZ} . Обозначения такие же, как на рис. 4.

меньшей фиксированного значения ω , такого, что $\omega \ll E$.

Прежде всего сделаем приближение $p \rightarrow 0$, везде, кроме части фазового объема $\frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0}$ и знаменателей с p . Тогда амплитуды мягкого тормозного излучения становятся пропорциональны борновским, что приводит к факторизации:

$$\begin{aligned} (R_1^a + R_2^a + R_3^a + R_4^a)|_{p \rightarrow 0} &\sim \quad (112) \\ &\sim e_\rho(p) \left(\frac{p_1^\rho}{pp_1} - \frac{p_2^\rho}{pp_2} - \frac{p_3^\rho}{pp_3} + \frac{p_4^\rho}{pp_4} \right) \mathcal{M}_0^a. \end{aligned}$$

После квадрирования получим факторизацию

также и перед борновским сечением:

$$\frac{d\sigma^{\text{soft}}}{dc} = \delta_{\text{soft}} \frac{d\sigma_0}{dc}, \quad (113)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{\text{soft}} &= -\frac{\alpha}{4\pi^2} \times \quad (114) \\ &\times \int_{|\mathbf{p}| < \omega} \frac{d^3\mathbf{p}}{p_0} \left(\frac{p_1^\rho}{pp_1} - \frac{p_2^\rho}{pp_2} - \frac{p_3^\rho}{pp_3} + \frac{p_4^\rho}{pp_4} \right)^2. \end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить поправку δ_{soft} , требу-

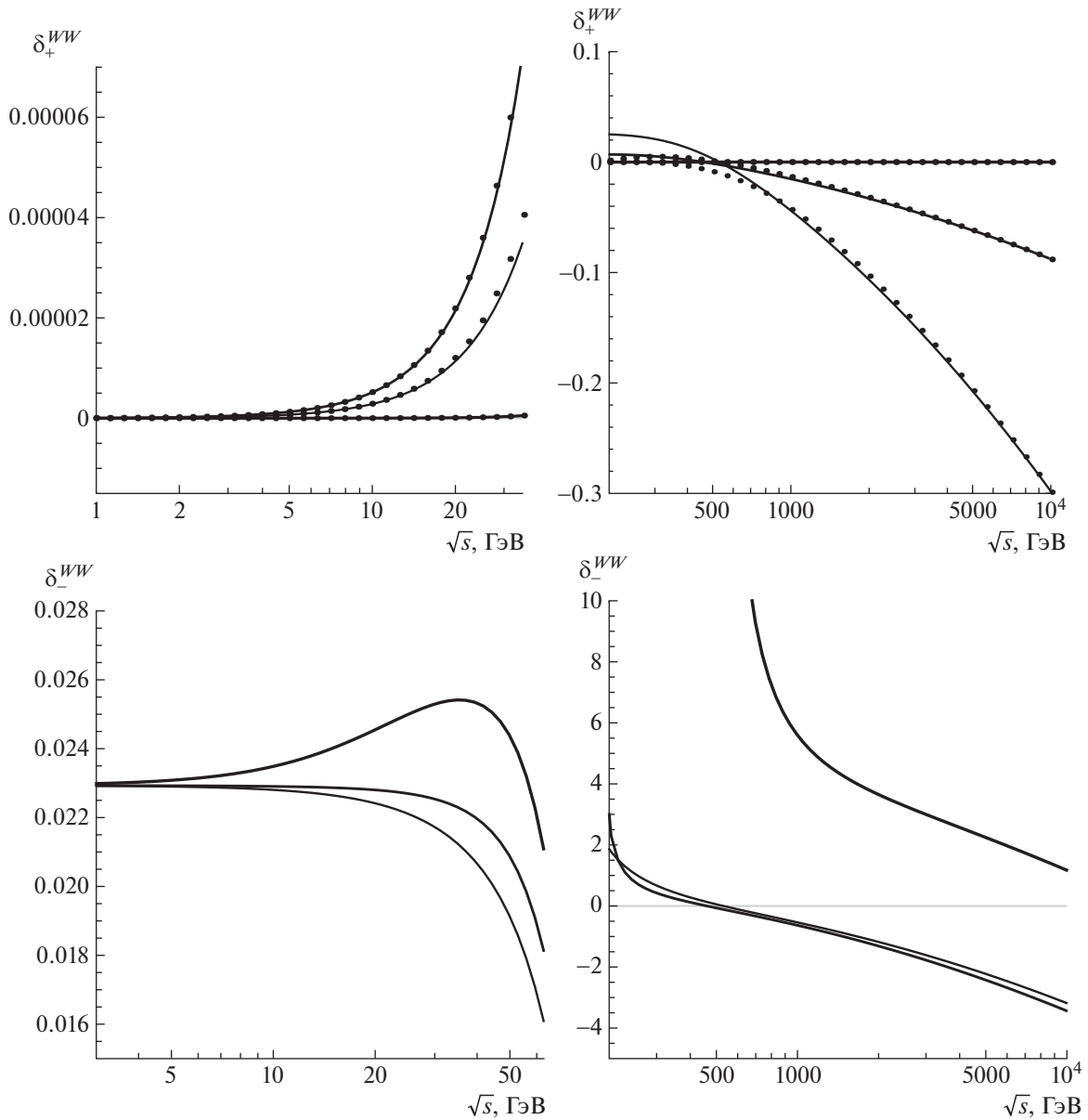


Рис. 9. Зависимость от \sqrt{s} относительных поправок δ_{\pm}^{WW} . Обозначения такие же, как на рис. 4.

ется уметь рассчитывать интегралы вида

$$L_{ij} = \int_{|\mathbf{p}| < \omega} \frac{d^3\mathbf{p}}{p_0} \frac{1}{pp_i} \frac{1}{pp_j}, \quad (i, j) = \overline{1, 4}, \quad (115)$$

методы такого интегрирования разобраны в работе [22]. Финальный ответ в УРП таков:

$$\delta_{\text{soft}} = \frac{2\alpha}{\pi} \left[2 \ln \frac{2\omega}{\lambda} \left(\ln \frac{st}{m^2 u} - 1 \right) + L_s - \frac{L_s^2}{2} - \frac{\pi^2}{3} + \text{Li}_2 \frac{-t}{u} - \text{Li}_2 \frac{-u}{t} \right]. \quad (116)$$

Чтобы проделать проверку независимости полного результата от λ аналитически, следует сло-

жить формулу (34) (в ней положим $F_a \rightarrow F_\gamma$), формулы (107)–(110) (в них положим $ab \rightarrow \gamma\gamma + \gamma Z + Z\gamma$), и формулу (113). В силу удачно выбранных обозначений и полученной факторизации это упражнение проделать не сложно. Полезно проделать проверку независимости от λ и численно, так как это является дополнительным тестом кода.

На рис. 10 приведены зависимости от энергии реакции \sqrt{s} полных относительных поправок δ_{\pm}^{V+S} от суммарного вклада виртуальных вкладов ($C = V$) и мягкого тормозного излучения ($C = S$) (при $\omega = 0.05\sqrt{s}$). В сумме этих вкладов отсутствует зависимость от λ .

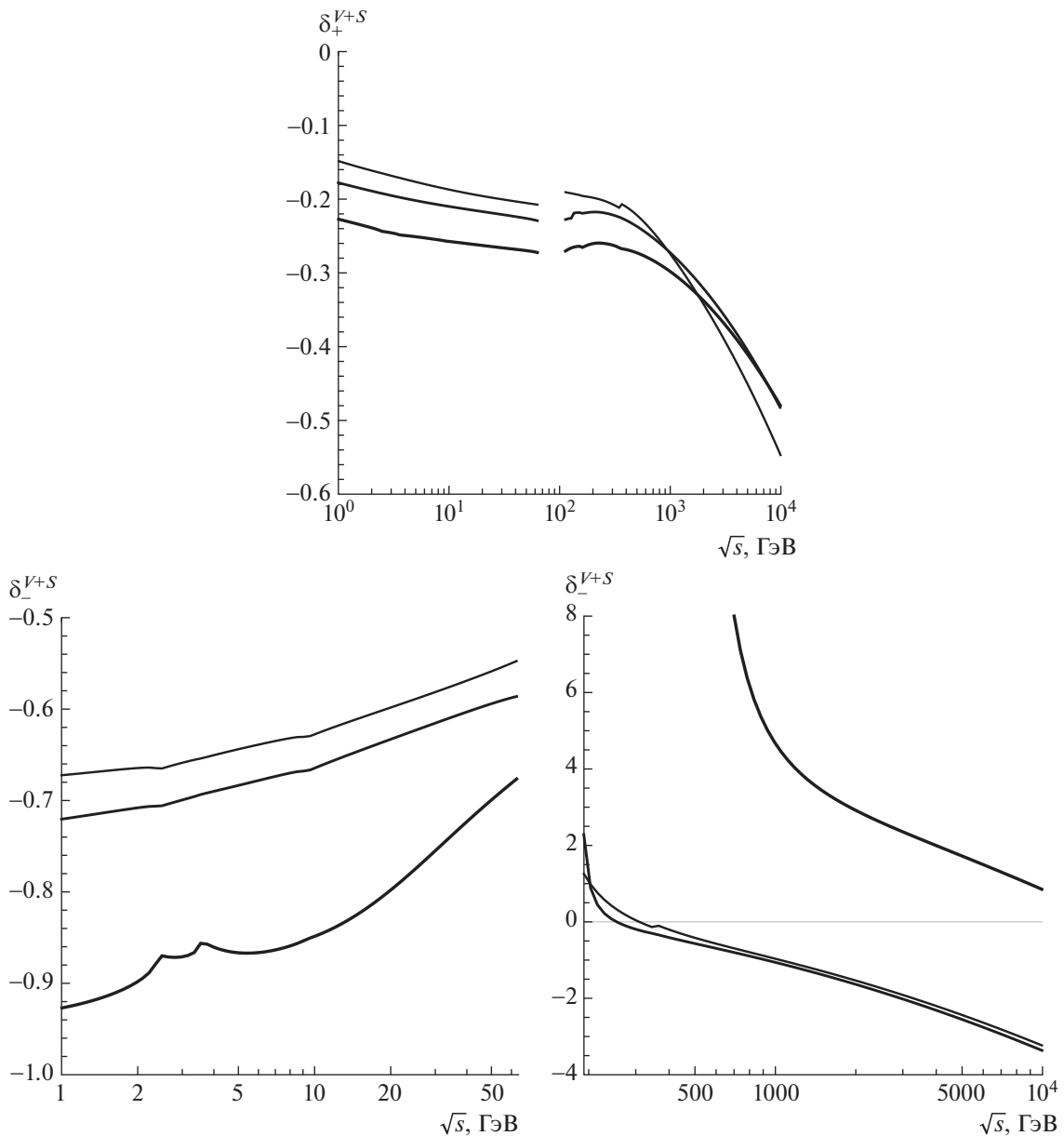


Рис. 10. Зависимость от \sqrt{s} относительных поправок δ_{\pm}^{V+S} .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены два набора асимптотических формул (ниже и выше Z -резонанса) для электрослабых однопетлевых поправок к наблюдаемым величинам поляризационного Бабарассеяния. Установленное хорошее согласие в области больших углов с точными результатами, полученными методами компьютерной алгебры FeynArts/FormCalc, подтверждает правильность найденных асимптотических выражений. Кроме академического интереса, они без сомнения будут полезны для “быстрой” оценки неполяризованных и поляризованных наблюдаемых в совре-

менных и будущих экспериментах физики высоких энергий.

Авторы признательны А.Б. Арбузову, М. Рупни (M. Roney) за обсуждение. В.А.З. благодарит государственную программу научных исследований Республики Беларусь “Конвергенция-2020” за поддержку.

Приложение А

ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА

Приведем основные правила Фейнмана (следующем обзоре [6]).

- Входящему фермиону с 4-импульсом p соответствует биспинорная амплитуда $u(p)$, выходящему соответствует биспинорная амплитуда $\bar{u}(p)$.
- Выходящему бозону с 4-импульсом p соответствует вектор поляризации $e_\rho(p)$.
- Пропагатору бозона (в калибровке Фейнмана) соответствует выражение

$$-ig^{\alpha\beta} D_a(q), \quad (\text{П.1})$$

где q — 4-импульс передачи в пропагаторе. Фотонная масса $m_\gamma \equiv \lambda$ равна нулю везде, кроме специально отмеченных ниже случаев, где она используется как инфинитесимальный параметр, который регуляризует инфракрасную расходимость. Масса Z -бозона обозначена как m_Z , его ширина — Γ_Z (используется схема с фиксированной шириной).

- Фермионный (электронный) пропагатор выглядит так (p — 4-импульс передачи в пропагаторе):

$$iS(p) = i \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (\text{П.2})$$

- Вершине взаимодействия фермиона f с калибровочным бозоном a сопоставляется выражение:

$$ie\gamma_\mu \Gamma_f^a, \quad \text{где } \Gamma_f^a = v_f^a - a_f^a \gamma_5. \quad (\text{П.3})$$

Векторные и аксиально-векторные константы связи фермиона f с фотоном и Z -бозоном:

$$v_f^\gamma = -Q_f, \quad a_f^\gamma = 0, \quad (\text{П.4})$$

$$v_f^Z = \frac{I_f^3 - 2Q_f s_W^2}{2s_W c_W}, \quad a_f^Z = \frac{I_f^3}{2s_W c_W}.$$

Используются следующие параметры СМ: Q_f — электрический заряд f -частицы в единицах протонного заряда, третья компонента слабого изоспина (тут конкретизируем тип фермиона):

$$I_\nu^3 = +\frac{1}{2}, \quad I_e^3 = -\frac{1}{2}, \quad (\text{П.5})$$

$$I_u^3 = +\frac{1}{2}, \quad I_d^3 = -\frac{1}{2},$$

а s_W (c_W) — синус (косинус) угла Вайнберга, которые связаны с массами Z - и W -бозона согласно правилам СМ:

$$c_W = \frac{m_W}{m_Z}, \quad s_W = \sqrt{1 - c_W^2}. \quad (\text{П.6})$$

- По 4-импульсу каждой внутренней частицы следует провести интегрирование. С учетом сохранения 4-импульса в каждой вершине, которая выражается присутствием в ней соответствующей δ -функции в конечном выражении для амплитуды, останется одна δ -функция, выражающая общий закон сохранения энергии-импульса диаграммы.

Сконструированная по вышеприведенным правилам Фейнмана амплитуда \mathcal{M} процесса позволяет сформировать дифференциальное сечение. В случае процесса $2 \rightarrow 2$ дифференциальное сечение записывается с помощью формулы

$$d\sigma = \frac{1}{8\pi^2 s} |\mathcal{M}|^2 d\Phi_2, \quad (\text{П.7})$$

где фазовый объем реакции имеет вид

$$d\Phi_2 = \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2p_{30}} \frac{d^3\mathbf{p}_4}{2p_{40}}. \quad (\text{П.8})$$

Снимая с помощью δ -функции три интеграла по пространственным компонентам p_4 и используя сферическую систему координат, получим в с.ц.м. (где энергии конечных частиц равны $p_{30} = p_{40}$)

$$d\Phi_2 = \delta(\sqrt{s} - 2p_{30}) \times \quad (\text{П.9})$$

$$\times \frac{1}{4p_{30}p_{40}} |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3| d\cos\theta d\varphi,$$

где

$$\sqrt{s} = \sqrt{(p_1 + p_2)^2} = p_{10} + p_{20}$$

— полная энергия реакции (в с.ц.м., где $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$).

Применив соотношение $|\mathbf{p}_3| d|\mathbf{p}_3| = p_{30} dp_{30}$ и снимая интегралы (по p_{30} с помощью δ -функции, а по φ с учетом симметрии системы относительно азимутального поворота), получим, возвращаясь на последнем шаге к лоренц-инвариантной записи:

$$d\Phi_2 = \frac{\pi |\mathbf{p}_3|}{4p_{40}} d\cos\theta = \frac{\pi}{2s} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} dt. \quad (\text{П.10})$$

Приложение В

ВЕКТОРНОЕ И ТЕНЗОРНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Изложим технику вычисления тензорных и векторных 4-точечных интегралов (на примере расчета прямого s -канального $\gamma\gamma$ -бокса, случай 3). Тензорный интеграл $I_{\alpha\beta}^{(3)}$ и векторный интеграл $I_\alpha^{(3)}$ определены в (68). Далее в этом разделе опускаем обозначение случая 3 и индекс $ab = \gamma\gamma$. Остальные нужные для расчета скалярные и векторные интегралы имеют вид:

$$G_{0,\alpha}(p_{1,3}, q_s) = \quad (\text{П.11})$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)((k - q_s)^2 - \lambda^2)(k^2 - 2p_{1,3}k)}, \\
 &\quad H_{0,\alpha}(p_1, p_3) = \\
 &= \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha}{(k^2 - \lambda^2)(k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2p_3 k)}, \\
 &\quad F_{0,\alpha}(p_1, p_3, q_s) = \\
 &= \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha}{((k - q_s)^2 - \lambda^2)(k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2p_3 k)}.
 \end{aligned}$$

Векторные интегралы раскладываются следующим образом (где можно, скобки с аргументами опустим):

$$\begin{aligned}
 G_\alpha(p_1, q_s) &= g_1 p_{1\alpha} + g_3 q_{s\alpha}, & (П.12) \\
 G_\alpha(p_3, q_s) &= G_2 p_{3\alpha} + G_3 q_{s\alpha}, \\
 H_\alpha &= h_1 p_{1\alpha} + h_2 p_{3\alpha}, \\
 F_\alpha &= f_1 p_{1\alpha} + f_2 p_{3\alpha} + f_3 q_{s\alpha}, \\
 I_\alpha &= a_1 p_{1\alpha} + a_2 p_{3\alpha} + a_3 q_{s\alpha}.
 \end{aligned}$$

1. Интеграл G_α

Далее с векторными интегралами поступим согласно методу, описанному в работе [23]: домножим каждый из них на каждый 4-вектор из правой части. Для интеграла G_α получим:

$$\begin{aligned}
 p_1^\alpha G_\alpha &= g_1 m^2 + g_3 (p_1 q_s), \\
 q_s^\alpha G_\alpha &= g_1 (p_1 q_s) + g_3 q_s^2.
 \end{aligned}$$

Далее подносим под знак интеграла домножаемый 4-вектор, свертываем с числителем и выражаем через комбинации, присутствующие в знаменателях (осуществляем так называемое разложение Вельмана–Пассарино [23]):

$$\begin{aligned}
 p_{1,3}k &= \frac{1}{2}(2p_{1,3}k - k^2 + k^2), \\
 q_s k &= \frac{1}{2}(k^2 + q_s^2 - (k - q_s)^2).
 \end{aligned}$$

Деля почленно подынтегральные выражения, получим комбинации 2-точечных функций (они приведены в следующем Приложении). В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 g_1 m^2 + g_3 (p_1 q_s) &= \frac{1}{2}[P(p_1, q_s) - R(q_s)], \\
 g_1 (p_1 q_s) + g_3 q_s^2 &= \\
 &= \frac{1}{2}[P(p_1, q_s) + q_s^2 G_0(p_1, q) - P(p_1)].
 \end{aligned}$$

Решение этой системы дает выражения коэффициентов в векторных интегралах через скалярные

интегралы, расчет которых приведен в следующем разделе, в УРП эти коэффициенты выглядят так:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= G_0 - \frac{2}{s}[P(p_1, q_s) - R(q_s)] = \\
 &= \frac{1}{2s}[L_s^2 - 4L_s + \frac{1}{3}\pi^2], \\
 g_3 &= \frac{1}{s}[P(p_1, q_s) - R(q_s)] = \frac{1}{s}L_s.
 \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что

$$G_2 = g_1, \quad G_3 = g_3.$$

2. Интегралы H_α и F_α

Для интеграла H_α имеем следующую систему:

$$\begin{aligned}
 p_1^\alpha H_\alpha &= h_1 m^2 + h_2 (p_1 p_3) = \\
 &= \frac{1}{2}[-P(p_3) + N(p_1, p_3)], \\
 p_3^\alpha H_\alpha &= h_1 (p_1 p_3) + h_2 m^2 = \\
 &= \frac{1}{2}[-P(p_1) + N(p_1, p_3)].
 \end{aligned}$$

Решая ее, в УРП получим

$$h_1 = h_2 = \frac{1}{2p_1 p_3} [N(p_1, p_3) - P(p_1)] = \frac{1}{t} L_t.$$

Для расчета F_α проделаем следующий трюк: заменим переменную интегрирования $k \rightarrow k + q_s$ [этот прием уже применялся при получении (75)]. Упрощая, получим соотношение

$$\begin{aligned}
 F_\alpha &= \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{k_\alpha + q_{s\alpha}}{(k^2 - \lambda^2)(k^2 + 2p_2 k)(k^2 + 2p_4 k)} = \\
 &= H_\alpha|_{p_{1,3} \rightarrow -p_{2,4}} + q_{s\alpha} H_0|_{p_{1,3} \rightarrow -p_{2,4}}.
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем, раскладывая по 4-векторам:

$$\begin{aligned}
 f_1 p_{1\alpha} + f_2 p_{3\alpha} + f_3 q_{s\alpha} &= \\
 &= -h_1 p_{2\alpha} - h_2 p_{4\alpha} + q_{s\alpha} H_0.
 \end{aligned}$$

Приводя подобные и приравнявая коэффициенты при соответствующих 4-векторах, получим:

$$f_1 = f_2 = h_1, \quad f_3 = H_0 - 2h_1.$$

3. Интеграл I_α

Для интеграла I_α имеем следующую систему:

$$\begin{aligned}
 p_1^\alpha I_\alpha &= a_1 m^2 + a_2 (p_1 p_3) + a_3 (p_1 q_s) = \\
 &= \frac{1}{2}[-G_0 + F_0], \\
 p_3^\alpha I_\alpha &= a_1 (p_1 p_3) + a_2 m^2 + a_3 (p_3 q_s) = \\
 &= \frac{1}{2}[-G_0 + F_0],
 \end{aligned}$$

$$q_s^\alpha I_\alpha = a_1(p_1 q_s) + a_2(p_3 q_s) + a_3 q_s^2 = \\ = \frac{1}{2} [F_0 + q_s^2 I_0 - H_0].$$

Из первых двух уравнений в УРП получим $a_1 = a_2$. Решая далее, находим:

$$a_1 = -\frac{1}{2u} [sI_0 - H_0 - F_0 + 2G_0] = \quad (\text{П.13}) \\ = -\frac{1}{2u} [X_0 + 2G_0], \\ a_3 = \frac{1}{s} [a_1 t - G_0 + F_0].$$

4. Интеграл $I_{\alpha\beta}$

Тензорный интеграл $I_{\alpha\beta}$ раскладывается по простейшим следующим образом:

$$I_{\alpha\beta}(p_1, p_3, q_s) = \quad (\text{П.14}) \\ = b_0 g_{\alpha\beta} + b_1 p_{1\alpha} p_{1\beta} + b_2 p_{3\alpha} p_{3\beta} + b_3 q_{s\alpha} q_{s\beta} + \\ + b_4 (p_{1\alpha} p_{3\beta} + p_{3\alpha} p_{1\beta}) + b_5 (p_{1\alpha} q_{s\beta} + q_{s\alpha} p_{1\beta}) + \\ + b_6 (p_{3\alpha} q_{s\beta} + q_{s\alpha} p_{3\beta}).$$

Домножая его на $g^{\alpha\beta}$, получим уравнение

$$4b_0 + m^2(b_1 + b_2) + q_s^2 b_3 + 2(p_1 p_3) b_4 + \\ + 2(p_1 q_s) b_5 + 2(p_3 q_s) b_6 = F_0.$$

Упрощая с учетом того, что для безрадиационной кинематики s -канала выполняются соотношения $2p_{1,2,3,4} q_s = s$, в УРП находим

$$4b_0 + sb_3 + (-t)b_4 + sb_5 + sb_6 = F_0. \quad (\text{П.15})$$

Далее, домножая на p_1^β и приравнявая коэффициенты при одинаковых членах, получим три уравнения, запишем их сразу в УРП:

$$2b_0 + (-t)b_4 + sb_5 = f_1, \quad (\text{П.16})$$

$$(-t)b_2 + sb_6 = f_2 - G_2, \quad (\text{П.17})$$

$$sb_3 + (-t)b_6 = f_3 - G_3. \quad (\text{П.18})$$

Домножая на p_3^β , получим следующие три уравнения:

$$(-t)b_1 + sb_5 = f_1 - g_1, \quad (\text{П.19})$$

$$2b_0 + (-t)b_4 + sb_6 = f_2, \quad (\text{П.20})$$

$$sb_3 + (-t)b_5 = f_3 - g_3. \quad (\text{П.21})$$

Наконец, домножая на q_s^β , получим:

$$sb_1 + sb_4 + 2sb_5 = f_1 + sa_1 - h_1, \quad (\text{П.22})$$

$$sb_2 + sb_4 + 2sb_6 = f_2 + sa_2 - h_2, \quad (\text{П.23})$$

$$2b_0 + 2sb_3 + sb_5 + sb_6 = f_3 + sa_3. \quad (\text{П.24})$$

Получившаяся система 10 уравнений имеет 7 неизвестных, следовательно, является переопределенной (некоторые уравнения являются линейно-зависимыми). Для решения выбираются 7 уравнений, обязательны следующие: уравнение (П.15), одно уравнение из блока (П.16)–(П.18), одно из блока (П.19)–(П.21) и одно из блока (П.22)–(П.24).

Приведем здесь решение системы в упрощенном виде:

$$b_0 = \frac{1}{2}(G_0 - a_1 t), \quad (\text{П.25})$$

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{tu}(G_0 s + g_1 u - g_3 s + h_1 t - a_1 s t),$$

$$b_3 = \frac{1}{su}(g_3 s + H_0 u + h_1(s - u) + G_0 t - a_1 t^2),$$

$$b_4 = \frac{1}{tu}(-g_3 s - G_0 t + h_1 t + a_1 t^2),$$

$$b_5 = b_6 = \frac{1}{u}(G_0 - g_3 - h_1 - a_1 t).$$

Естественно, что в силу переопределенности полной системы такая форма записи не является единственно возможной. Это не отражается на физическом результате (следует помнить, что между коэффициентами системы существуют дополнительные связи, для построения программы численного расчета они не имеют особого значения).

Приложение С

СКАЛЯРНЫЕ МНОГОТОЧЕЧНЫЕ ФУНКЦИИ

1. 2-точечные функции

Введем скалярные 2-точечные (ультрафиолетово-расходящиеся) функции:

$$N(p_1, p_3) = \quad (\text{П.26})$$

$$= \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2p_3 k)},$$

$$P(p_1, q) = \quad (\text{П.27})$$

$$= \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1}{((k - q)^2 - \lambda^2)(k^2 - 2p_1 k)},$$

$$P(p_1) = \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)(k^2 - 2p_1 k)}, \quad (\text{П.28})$$

$$R(q) = \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)((k - q)^2 - \lambda^2)}. \quad (\text{П.29})$$

Рассчитаем для примера первую (нужна только действительная часть).

Применяем трюк Фейнмана [конкретно, первую формулу из (86)] и получаем выражение (П.26) в виде

$$N(p_1, p_3) = \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \times \int_0^1 \frac{dy}{[(k^2 - 2p_1 k)y + (k^2 - 2p_3 k)(1 - y)]^2}. \quad (\text{П.30})$$

Снимаем интеграл по k по формуле

$$\int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{dy}{[(k - b)^2 - d]^2} = \ln \frac{\Lambda^2}{d} - 1. \quad (\text{П.31})$$

Тогда

$$N(p_1, p_3) = \int_0^1 dy \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \ln \frac{d}{m^2} - 1 \right), \quad (\text{П.32})$$

где

$$b = p_1 y + p_3(1 - y), \quad d = b^2.$$

Упрощая, получим

$$\frac{d}{m^2} = ay^2 - ay + 1, \quad a = \frac{2m^2 - 2p_1 p_3}{m^2}.$$

Наконец, снимаем интеграл по y и получаем выражение

$$N(p_1, p_3) = \ln \frac{\Lambda^2}{m^2 |a|} + 1. \quad (\text{П.33})$$

В УРП явный вид 2-точечных функций такой:

$$N(p_1, p_3) = L_\Lambda + \ln \frac{m^2}{2p_1 p_3} + 1, \quad (\text{П.34})$$

$$P(p_1, q_r) = P(p_1) = L_\Lambda + 1,$$

$$R(q_r) = L_\Lambda - L_r + 1.$$

2. 3-точечные функции

Скалярный мастер-интеграл имеет вид (опускаем для краткости обозначение обхода полюса $+i\epsilon$, кроме этого, везде далее рассчитываем только действительную часть)

$$H_0^\gamma(p_1, p_3) = \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)((k - p_1)^2 - m^2)((k - p_3)^2 - m^2)}. \quad (\text{П.35})$$

Подробный расчет этого интеграла разобран в [22]. Приведем нужные формулы для справочных целей. В обозначениях этого Приложения:

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= p_1 x - (p_1 - p_3)y, \\ \tilde{d} &= m^2 x^2 + 2(m^2 - p_1 p_3)y^2 - \\ &\quad - 2(m^2 - p_1 p_3)xy - \lambda^2 x + \lambda^2, \end{aligned}$$

а интеграл имеет вид

$$H_0^\gamma(p_1, p_3) = - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{\tilde{d}}. \quad (\text{П.36})$$

Далее

$$\begin{aligned} H_0^\gamma(p_1, p_3) &= \quad (\text{П.37}) \\ &= - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f}, \end{aligned}$$

где

$$a = m^2, \quad b = 2(m^2 - p_1 p_3), \quad c = -2(m^2 - p_1 p_3),$$

$$d = -\lambda^2, \quad e = 0, \quad f = \lambda^2 - i\epsilon.$$

Используем ультрарелятивистское приближение

$$m^2 \ll |b|, \quad (\text{П.38})$$

также используется условие малости фотонной массы по сравнению с массой излучающего лептона

$$\lambda \ll m \quad (\text{П.39})$$

и обозначения для коллинеарного L_b и инфракрасного логарифмов L_λ :

$$L_b = \ln \frac{|b|}{m^2}, \quad L_\lambda = \ln \frac{\lambda^2}{m^2}. \quad (\text{П.40})$$

Приведем основные выражения в ультрарелятивистском приближении, используя обозначения:

$$\mu = \frac{m^2}{b}, \quad \nu = \frac{\lambda^2}{b},$$

так что выполняются соотношения

$$\ln |\mu| = -L_b, \quad \ln |\nu| = L_\lambda - L_b.$$

Для упрощений в ультрарелятивистском приближении используем очень полезную формулу

$$\text{Li}_2(z) = -\text{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{2} \ln^2(-z) - \frac{1}{6} \pi^2, \quad (\text{П.41})$$

связывающую дилогарифмы Спенса с обратными аргументами. Вычисляя H_0^γ на основе приближенно вычисленных в УРП (П.38) и с условием (П.39), получим общую формулу

$$H_0^\gamma(p_1, p_3) = \frac{1}{2m^2 - 2p_1 p_3} \left(\text{Li}_2\left(-\frac{m^2}{\lambda^2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2m^2 - 2p_1 p_3}{\lambda^2}\right) - \text{Li}_2(1) \right).$$

Подставляя значение b в зависимости от аргумен-

тов 3-точечной функции, получим:

$$H_0^\gamma(p_1, -p_2) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{2} L_s^2 - L_s L_\lambda - \frac{2}{3} \pi^2 \right) \quad (\text{П.42})$$

для случая 1,

$$H_0^\gamma(p_1, p_4) = \frac{1}{u} \left(\frac{1}{2} L_u^2 - L_u L_\lambda - \frac{1}{6} \pi^2 \right)$$

для случая 2 и случая 4,

$$H_0^\gamma(p_1, p_3) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} L_t^2 - L_t L_\lambda - \frac{1}{6} \pi^2 \right)$$

для случая 3.

Теперь рассчитаем подобный скалярный интеграл, но с массивным Z -бозоном (естественным будет обозначение H_0^Z):

$$H_0^Z(p_1, p_3) = \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - m_Z^2)((k - p_1)^2 - m^2)((k - p_3)^2 - m^2)}. \quad (\text{П.43})$$

Методика расчета H_0^Z в НЕ-режиме такая же самая, как в случае расчета H_0^γ за исключением того, что вместо условия (П.39) необходимо использовать (очевидное для первых поколений фермионов) условие

$$m_Z \gg m. \quad (\text{П.44})$$

Изменение условий, с первого взгляда выглядящее как не особенно важное, тем не менее “драматическим” образом меняет форму результата. Используем обозначения: $\mu = \frac{m^2}{b}$, $\nu = \frac{m_Z^2}{b}$. Подставляя значение b в зависимости от аргументов 3-точечной функции и упрощая, где это возможно, получим:

$$H_0^Z(p_1, -p_2) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{m_Z^2}{s} - \frac{1}{6} \pi^2 \right) \quad (\text{П.45})$$

для случая 1,

$$H_0^Z(p_1, p_4) = \frac{1}{u} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{m_Z^2}{-u} + \frac{1}{3} \pi^2 \right)$$

для случая 2 и случая 4,

$$H_0^Z(p_1, p_3) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{m_Z^2}{-t} + \frac{1}{3} \pi^2 \right)$$

для случая 3.

Видно, что рассматриваемый интеграл во всех четырех случаях выражается через квадрат судаковского логарифма.

Теперь вычислим скалярный мастер-интеграл

$$G_0(p_1, q) = \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha}{k^2(k - q)^2(k^2 - 2p_1 k)}, \quad (\text{П.46})$$

действовать будем по той же схеме. Выбирая $a_1 = k^2 - \lambda^2$, $a_2 = (k - q)^2 - \lambda^2$, $a_3 = (k - p_1)^2 - m^2$, получим (при условии нахождения конечных частиц на массовой поверхности и равных масс)

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= qx + p_3 y, \\ \tilde{d} &= q^2 x^2 + m^2 y^2 - q^2 x y - q^2 x + \\ &+ (q^2 - \lambda^2) y + \lambda^2. \end{aligned}$$

Далее подставляем полученные значения коэффициентов a, b, \dots, f в процедуру расчета. Заметим, что здесь μ и ν уже определяются по-другому:

$$\mu = \frac{m^2}{q^2}, \quad \nu = \frac{\lambda^2}{q^2}.$$

Упрощая, получим общую формулу

$$G_0(p_1, q) = \frac{1}{q^2} \left(2\text{Li}_2(2) - \text{Li}_2\left(\frac{q^2}{m^2}\right) \right).$$

Ультрарелятивистские выражения для конкретных случаев приобретают следующий вид:

$$G_0(p_1, q_t) = G_0(-p_2, q_t) = G_0(p_4, q_t) = \quad (\text{П.47})$$

$$= \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} L_t^2 + \frac{2}{3} \pi^2 \right),$$

$$G_0(p_1, q_s) = G_0(p_3, q_s) = G_0(p_4, q_s) = \quad (\text{П.48})$$

$$= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{2} L_s^2 + \frac{1}{6} \pi^2 \right).$$

3. 4-точечные интегралы X_0 и I_0

В этом разделе вычислим ИК-конечную 4-точечную функцию (рассмотрим случай 3, следовательно $q = q_s$):

$$X_0(p_1, p_3, q) = \quad (\text{П.49})$$

$$= q^2 I_0^\gamma(p_1, p_3, q) - F_0^\gamma(p_1, p_3) - H_0^\gamma(p_1, p_3) =$$

$$= \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \frac{2k(q-k)}{k^2(k-q)^2(k^2-2p_1k)(k^2-2p_3k)}.$$

Будем использовать ряд обозначений и методику расчета из работы Кахане [20] (все ссылки на формулы до конца абзаца относятся к формулам из [20]): применяем трюк Фейнмана (П.1)–(П.3) и интегрируем по внутреннему 4-импульсу (П.5). Снимая два первых интеграла по параметрам Фейнмана x и z , получаем (П.36). В наших обозначениях это дает следующее выражение:

$$X_0(p_1, p_3, q) = \int_0^1 \frac{dy}{p_y^2} \ln \left| \frac{p_y^2}{q^2} \right|, \quad (\text{П.50})$$

где $p_y = yp_1 + (1-y)p_3$.

Вычислим p_y^2 , после возведения в квадрат получим

$$p_y^2 = t(y^2 - y + \alpha) = t(y - y_1)(y - y_2),$$

где

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha}}{2}, \quad \alpha = \frac{m^2}{t}. \quad (\text{П.51})$$

Полезны следующие соотношения:

$$y_1 - y_2 = \sqrt{1 - 4\alpha}, \quad y_1 + y_2 = 1. \quad (\text{П.52})$$

Нетрудно сделать разложение

$$\frac{1}{p_y^2} = \frac{1}{t\sqrt{1-4\alpha}} \left(\frac{1}{y-y_1} - \frac{1}{y-y_2} \right).$$

Приступаем к последнему интегрированию, замечая, что в случае $\alpha < 0$ (это справедливо при $t < 0$) особенностей у подынтегральной функции

нет. Разбиваем ее на шесть элементарных слагаемых и снимаем интеграл:

$$X_0(p_1, p_3, q) = \frac{1}{t\sqrt{1-4\alpha}} \times \quad (\text{П.53})$$

$$\times \left(\ln \frac{-t}{q^2} \left[\int_0^1 \frac{dy}{y-y_1} - \int_0^1 \frac{dy}{y-y_2} \right] + \right.$$

$$+ \int_0^1 \frac{\ln|y-y_1|}{y-y_1} - \int_0^1 \frac{\ln(y-y_2)}{y-y_2} +$$

$$\left. + \int_0^1 \frac{\ln(y-y_2)}{y-y_1} - \int_0^1 \frac{\ln|y-y_1|}{y-y_2} \right).$$

Упрощая с учетом (П.52) и затем делая УРП ($|\alpha|, |y_2| \ll 1$), получим

$$X_0(p_1, p_3, q) = \frac{1}{t\sqrt{1-4\alpha}} \times \quad (\text{П.54})$$

$$\times \left(2 \ln \frac{-t}{q^2} \ln \frac{-y_2}{y_1} + \ln^2(-y_2) - \ln^2 y_1 + \right.$$

$$\left. + 2\text{Li}_2 \frac{y_1}{y_1 - y_2} - 2\text{Li}_2 \frac{y_2}{y_2 - y_1} \right) =$$

$$= \frac{1}{t} \left(2 \ln \frac{-t}{q^2} \ln(-\alpha) + \ln^2(-\alpha) + \frac{1}{3} \pi^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{t} \left(-2 \ln \frac{q^2}{m^2} \ln(-\alpha) - \ln^2(-\alpha) + \frac{1}{3} \pi^2 \right).$$

Для конкретных случаев в УРП получаем:

$$X_0(p_1, -p_2, q_t) = \frac{1}{s} \left((2L_t - L_s)L_s + \frac{4}{3} \pi^2 \right) \quad (\text{П.55})$$

для случая 1,

$$X_0(p_1, p_4, q_t) = \frac{1}{u} \left((2L_t - L_u)L_u + \frac{1}{3} \pi^2 \right)$$

для случая 2,

$$X_0(p_1, p_3, q_s) = \frac{1}{t} \left((2L_s - L_t)L_t + \frac{1}{3} \pi^2 \right)$$

для случая 3,

$$X_0(p_1, p_4, q_s) = \frac{1}{u} \left((2L_s - L_u)L_u + \frac{1}{3} \pi^2 \right)$$

для случая 4.

Заметим, что в интеграле $X_0(p_1, -p_2, q_t)$ появилось добавочное слагаемое $+\pi^2$, его происхождение та-

кое:

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}\left(\ln^2(-\alpha)\right) &= -\operatorname{Re}\left(\ln^2\frac{m^2}{-s}\right) = \\ &= -\operatorname{Re}\left(\ln\frac{m^2}{s} - i\pi\right)^2 = -\ln^2\frac{m^2}{s} + \pi^2. \end{aligned}$$

Наконец, для скалярной 4-точечной ИК-расходящейся функции для конкретных случаев в УРП получаем следующие выражения:

$$I_0(p_1, -p_2, q_t) = \frac{2}{ts} L_s(L_t - L_\lambda) \quad (\text{П.56})$$

для случая 1,

$$I_0(p_1, p_4, q_t) = \frac{2}{tu} L_u(L_t - L_\lambda) \quad \text{для случая 2,}$$

$$I_0(p_1, p_3, q_s) = \frac{2}{st} L_t(L_s - L_\lambda) \quad \text{для случая 3,}$$

$$I_0(p_1, p_4, q_s) = \frac{2}{su} L_u(L_s - L_\lambda) \quad \text{для случая 4.}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. L. Perl, G. S. Abrams, A. Boyarski, M. Breidenbach, D. Briggs, F. Bulos, W. Chinowsky, J. T. Dakin, G. J. Feldman, C. E. Friedberg, D. Fryberger, G. Goldhaber, G. Hanson, F. B. Heile, B. Jean-Marie, J. A. Kadyk, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **35**, 1489 (1975).
2. G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott, J. Abdallah, S. A. Khalek, A. A. Abdelalim, O. Abdinov, R. Aben, B. Abi, M. Abolins, O. AbouZeid, H. Abramowicz, H. Abreu, B. S. Acharya, L. Adamczyk, D. Adams, *et al.* (ATLAS Collab.), Phys. Lett. B **716**, 1 (2012); arXiv: 1207.7214 [hep-ex]; S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A. M. Sirunyan, A. Tumasyan, W. Adam, E. Aguilo, T. Bergauer, M. Dragicevic, J. Ero, C. Fabjan, M. Friedl, R. Fruehwirth, V. M. Ghete, J. Hammer, M. Hoch, N. Horman, *et al.* (CMS Collab.), Phys. Lett. B **716**, 30 (2012); arXiv: 1207.7235 [hep-ex].
3. C. A. Heusch, Int. J. Mod. Phys A **20**, 7289 (2005).
4. H. J. Bhabha, Proc. R. Soc. Lond. A **154**, 195 (1935).
5. F. A. Berends, K. J. F. Gaemers, and R. Gastmans, Nucl. Phys. B **68**, 541 (1974).
6. M. Böhm, H. Spiesberger, and W. Hollik, Fortschr. Phys. **34**, 687 (1986).
7. W. Hollik, Fortschr. Phys. **38**, 165 (1990).
8. M. Böhm and W. Hollik, Nucl. Phys. B **204**, 45 (1982).
9. M. Böhm, A. Denner, and W. Hollik, Nucl. Phys. B **304**, 687 (1988).
10. F. A. Berends, R. Kleiss, and W. Hollik, Nucl. Phys. B **304**, 712 (1988).
11. G. Balossini, C. Bignamini, C. M. Carloni Calame, G. Montagna, O. Nicrosini, and F. Piccinini, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **183**, 168 (2008); arXiv: 0806.4909 [hep-ph].
12. A. Arbuzov, E. Kuraev, and B. Shaikhatdenov, ЭЧАЯ **33**, 5 (2002).
13. T. Hahn and M. Perez-Victoria, Comput. Phys. Commun. **118**, 153 (1999) [hep-ph/9807565].
14. A. Denner, Fortschr. Phys. **41**, 307 (1993).
15. Particle Data Group (C. Amsler *et al.*), Phys. Lett. B **667**, 1 (2008).
16. F. Jegerlehner, J. Phys. G **29**, 101 (2003) [hep-ph/0104304].
17. S. Eidelman and F. Jegerlehner, Z. Phys. C **67**, 585 (1995).
18. S. Actis, A. Arbuzov, G. Balossini, P. Beltrame, C. Bignamini, R. Bonciani, C. M. Carloni Calame, V. Cherepanov, M. Czakon, H. Czyz, A. Denig, S. Eidelman, G. V. Fedotovich, A. Ferroglia, J. Gluza, A. Grzelinska, *et al.*, Eur. Phys. J. C **66**, 585 (2010).
19. A. Г. Алексеев, С. Г. Барканова, В. А. Зыкунов, ЯФ **75**, 231 (2012) [Phys. At. Nucl. **75**, 209 (2012)].
20. J. Kahane, Phys. Rev. B **135**, 975 (1964).
21. V. A. Zykunov, Phys. Rev. D **75**, 073019 (2007) [hep-ph/0509315].
22. G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. B **153**, 365 (1979).
23. G. Passarino and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **160**, 151 (1979).

APPLICATION OF ASYMPTOTIC METHODS TO THE CALCULATION OF THE ELECTROWEAK CORRECTIONS TO POLARIZED BHABHA-SCATTERING

A. G. Aleksejevs¹⁾, S. G. Barkanova¹⁾, Yu. M. Bystritskiy²⁾, V. A. Zykunov^{2),3)}

¹⁾Memorial University, Corner Brook, Canada

²⁾JINR, Dubna, Moscow region, Russia

³⁾Francisk Skorina Gomel State University, Belarus

Within on-mass-shell renormalization scheme the asymptotic formulas for one-loop electroweak radiative corrections to observables in polarized Bhabha scattering are obtained. The numerical analysis of relative one-loop electroweak corrections to the cross section and to the polarization asymmetry at energies below and above Z resonance is performed. The successful comparison with precise results obtained with the use of computer algebra systems is done.