

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ ЯДЕР ${}^3\text{H}$, ${}^{3,4,6}\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$ МЕТОДОМ ФЕЙНМАНОВСКИХ КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

© 2017 г. В. В. Самарин^{1),2)*}, М. А. Науменко¹⁾

Поступила в редакцию 18.01.2017 г.

Энергия и квадрат модуля волновой функции основного состояния ядер ${}^3\text{H}$, ${}^{3,4,6}\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$ вычислены методом континуальных интегралов Фейнмана. Получено удовлетворительное согласие с экспериментальными данными.

DOI: 10.7868/S0044002717050221

1. ВВЕДЕНИЕ

Низкоэнергетические реакции с участием легких ядер: гелия, трития, лития, бериллия [1], составляют значительную часть изученных и изучающихся в настоящее время ядерных реакций. Ядра ${}^4\text{He}$ (альфа-частицы) в опыте Резерфорда оказались первым инструментом для открытия и исследования атомного ядра [2]. Исследования столкновений альфа-частиц, ядер ${}^3\text{He}$, ${}^6\text{He}$, ${}^8\text{He}$ с ядрами золота и другими ядрами продолжают давать ценную информацию о механизмах реакций слияния и нуклонных передач [2–11]. В реакциях передачи и слияния с участием ядра ${}^6\text{He}$ [4, 5, 9, 11] исследуется протяженное распределение (так называемое гало), образованное парой внешних слабосвязанных нейтронов (энергия отделения 0.975 МэВ для двух нейтронов и 1.865 МэВ для одного нейтрона [12]). Ядро ${}^6\text{He}$ устойчиво благодаря силе спаривания между внешними нейтронами [13], поскольку система $\alpha + n$ (ядро ${}^5\text{He}$) связанных состояний не имеет. Знание свойств и волновой функции основного состояния нуклидов гелия, трития, лития, бериллия необходимо для теоретического описания реакций с их участием. В простейшей оболочечной модели [12, 13] конфигураций ${}^6\text{He}$: $\alpha + n + n$ и ${}^6\text{Li}$: $\alpha + n + p$ [1], внешние нуклоны в поле ядерного кора (α -кластера) занимают состояние $1p_{3/2}$ и проявляют свойства кластеров — динейтрона и дейтрона соответственно [14–18]. Ядро ${}^9\text{Be}$ можно представить в виде конфигурации $\alpha + n + \alpha$ [19, 20].

Уравнение Шредингера в рамках задачи трех тел с ортогональным проектированием впервые решено для ядра ${}^6\text{Li}$ в работе [21], а для ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Be}$ — в работе [22]. В работе [23] уравнение Шредингера для трехтельной системы $\alpha + n + n$ было решено с помощью разложений по гиперсферическим функциям (K -гармоникам). В работах [24, 25] волновые функции системы трех тел были получены с помощью гауссова базиса и численного решения системы интегральных уравнений Хилла—Уилера. Более простую возможность вычисления энергии E_0 и плотности вероятности $|\Psi_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)|^2$ для основного состояния n -частичной системы дает метод континуальных интегралов Фейнмана [26–33]. Его универсальность позволила в едином подходе выполнить расчеты для шести малонуклонных ядер: ${}^3\text{H}$, ${}^{3,4,6}\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$. Можно указать четыре области применения полученных результатов. Во-первых, использование сразу нескольких ядер позволяет более достоверно выбирать форму и определять значения параметров парных потенциалов взаимодействия нуклонов и α -кластеров. Во-вторых, анализ свойств $|\Psi_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)|^2$ позволяет подобрать аналитические аппроксимации $\Psi_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$, например, в виде произведения экспонент гауссова типа. В-третьих, сравнение результатов метода континуальных интегралов Фейнмана с результатами оболочечной модели позволило предложить новую параметризацию потенциалов сферического среднего поля для ядер ${}^3\text{H}$, ${}^{3,4,6}\text{He}$ [32], которая может быть использована при описании низкоэнергетических ядерных реакций с участием легких ядер. Она может быть применена также для сферического ядра ${}^6\text{Li}$ и аксиально-симметричного ядра ${}^9\text{Be}$. В-четвертых, знание плотности вероят-

¹⁾Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.

²⁾Государственный университет “Дубна”, Дубна, Россия.

*E-mail: samarin@jinr.ru

ности $|\Psi_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)|^2$ позволяет уточнить условия применимости и скорость сходимости методов, основанных на приближенном решении уравнения Шредингера для трех и четырех тел с помощью разложения по базисным функциям, например гиперсферическим функциям [34]. В частности, можно определять минимально необходимое число базисных функций и их квантовые числа для получения с заданной погрешностью результата как для основного состояния, так и для возбужденных состояний.

2. ФЕЙНМАНОВСКИЕ КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ЕВКЛИДОВОМ ВРЕМЕНИ ДЛЯ МАЛОНУКЛОННЫХ ЯДЕР

Энергия E_0 и квадрат модуля волновой функции основного состояния $|\Psi_0|^2$ системы нескольких частиц могут быть найдены с помощью введенных Фейнманом [26] континуальных интегралов (интегралов по траекториям) [28–30]. Фейнмановский интеграл

$$K(q, t; q_0, 0) = \int Dq(t') \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[q(t')] \right\} = \quad (1)$$

$$= \left\langle q \left| \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t \right) \right| q_0 \right\rangle$$

представляет собой пропагатор — амплитуду вероятности распространения частицы массы m из точки q_0 в точку q за время t . Здесь $S[q(t)]$ и \hat{H} — действие и гамильтониан системы; $Dq(t)$ — мера интегрирования [27]. Для не зависящей от времени потенциальной энергии переход к мнимому (евклидовому) времени $t = -i\tau$ дает пропагатор $K_E(q, \tau; q_0, 0)$:

$$K_E(q, \tau; q_0, 0) = \quad (2)$$

$$= \int D_E q(\tau') \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} S_E[q(\tau')] \right\},$$

с евклидовым действием

$$S_E[q(\tau')] = \int_0^\tau d\tau' \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau'} \right)^2 + V(q) \right], \quad (3)$$

где $V(q)$ — потенциальная энергия. Интегрирование по q при периодических граничных условиях $q = q_0$ дает возможность найти энергию E_0 основного состояния в пределе $\tau \rightarrow \infty$ [29]:

$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_E(q, \tau; q, 0) dq = \quad (4)$$

$$= \text{Sp} \left[\exp \left(-\frac{\hat{H}\tau}{\hbar} \right) \right] = \sum_n \exp \left(-\frac{E_n\tau}{\hbar} \right) +$$

$$+ \int_{E_{\text{cont}}}^{\infty} \exp \left(-\frac{E\tau}{\hbar} \right) g(E) dE,$$

$$F(\tau) \rightarrow \exp \left(-\frac{E_0\tau}{\hbar} \right), \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (5)$$

$$K_E(q, \tau; q, 0) = \sum_n |\Psi_n(q)|^2 \exp \left(-\frac{E_n\tau}{\hbar} \right) + \quad (6)$$

$$+ \int_{E_{\text{cont}}}^{\infty} |\Psi_E(q)|^2 \exp \left(-\frac{E\tau}{\hbar} \right) g(E) dE.$$

Здесь $g(E)$ — плотность уровней непрерывного спектра при $E \geq E_{\text{cont}}$. Для системы с дискретным спектром и финитным движением частиц квадрат модуля волновой функции основного состояния может быть найден в пределе $\tau \rightarrow \infty$ [29] вместе с энергией E_0 :

$$K_E(q, \tau; q, 0) \rightarrow |\Psi_0(q)|^2 \exp \left(-\frac{E_0\tau}{\hbar} \right), \quad (7)$$

$$\tau \rightarrow \infty,$$

$$\hbar \ln K_E(q, \tau; q, 0) \rightarrow \hbar |\Psi_0(q)|^2 - E_0\tau, \quad (8)$$

$$\tau \rightarrow \infty.$$

Уравнение (8) может быть использовано для нахождения энергии E_0 как углового коэффициента линейной части графика зависимости $\hbar \ln K_E(q, \tau; q, 0)$ от τ . Значения квадрата модуля волновой функции основного состояния $|\Psi_0(q)|^2$ в точках q ограниченной области финитного движения могут быть найдены с помощью выражения (7) при значениях τ , соответствующих линейной части графика зависимости $\hbar \ln K_E(q, \tau; q, 0)$.

Фейнмановский интеграл по траекториям (2) можно представить в виде предела многократного интеграла [28–30]

$$K_E(q, \tau; q_0, 0) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N\Delta\tau = \tau}} \int \dots \quad (9)$$

$$\int \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_{k=1}^N \left[\frac{m(q_k - q_{k-1})^2}{2\Delta\tau} + V(q_k) \Delta\tau \right] \right\} \times$$

$$\times C^N dq_1 dq_2 \dots dq_{N-1},$$

где $q_k = q(\tau_k)$, $\tau_k = k\Delta\tau$, $k = \overline{0, N}$, $q_N = q$,

$$C = \left(\frac{m}{2\pi\hbar\Delta\tau} \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Здесь $(N-1)$ -кратный интеграл соответствует усреднению по “траекториям” частицы в виде ломаных линий в плоскости (q, τ) с вершинами

(q_k, τ_k) , $k = \overline{1, N-1}$. Для приближенного вычисления интеграла по траекториям (9) непрерывную ось τ заменяют сеткой $\tau = \tau_k = k\Delta\tau$, $k = \overline{0, N}$, $N \geq 2$, с шагом $\Delta\tau$ и выделяют евклидов пропагатор свободной частицы $K_E^{(0)}(q, \tau; q_0, 0)$:

$$K_E(q, \tau; q_0, 0) \approx K_E^{(0)}(q, \tau; q_0, 0) \times \left\langle \exp \left[-\frac{\Delta\tau}{\hbar} \sum_{k=1}^N V(q_k) \right] \right\rangle_{0,N}, \quad (11)$$

$$K_E^{(0)}(q, \tau; q_0, 0) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar\tau} \right)^{1/2} \times \exp \left[-\frac{m(q - q_0)^2}{2\hbar\tau} \right]. \quad (12)$$

Полагая $q_N = q_0 = q$, получим

$$K_E(q, \tau; q, 0) \approx K_E^{(0)}(q, \tau; q, 0) \times \left\langle \exp \left[-\frac{\Delta\tau}{\hbar} \sum_{k=1}^N V(q_k) \right] \right\rangle_{0,N}, \quad (13)$$

$$K_E^{(0)}(q, \tau; q, 0) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar\tau} \right)^{1/2}. \quad (14)$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначено усреднение величины f :

$$f = \exp \left[-\frac{\Delta\tau}{\hbar} \sum_{k=1}^N V(q_k) \right] \quad (15)$$

по случайным траекториям, т.е. $(N-1)$ -мерным векторам $Q = \{q_1, \dots, q_{N-1}\}$ с законом распределения $W(q_0; q_1, \dots, q_{N-1}; q_N = q_0)$:

$$W(q_0; q_1, \dots, q_{N-1}; q_N = q_0) = C^{N-1} N^{1/2} \exp \left[-\frac{m}{2\hbar\Delta\tau} \sum_{k=1}^N (q_k - q_{k-1})^2 \right]. \quad (16)$$

Усреднение величины f может быть вычислено методом Монте-Карло [35, 36]:

$$\langle f \rangle \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i. \quad (17)$$

Алгоритм моделирования случайного вектора с законом распределения (16) описан в Приложении. Из-за случайных погрешностей моделирования в выражении (8) для определения энергии основного состояния следует использовать линейную регрессию.

Формулы (2)–(17) естественным образом обобщаются на случаи большего числа степеней свободы, в том числе на системы нескольких частиц.

В качестве примера рассмотрим трехмерный осциллятор с приведенной массой μ и потенциальной энергией

$$V(r) = -U_0 + \frac{\mu}{2} \omega^2 r^2. \quad (18)$$

Простой дискретный энергетический спектр с колебательными квантовыми числами n_1, n_2, n_3 по каждой из декартовых координат

$$E_{n_1, n_2, n_3} = -U_0 + \hbar\omega \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2} \right) \quad (19)$$

позволяет выполнить суммирование в выражении (4):

$$F(\tau) = \iiint K_E(\mathbf{q}, \tau; \mathbf{q}, 0) d\mathbf{q} = \sum_n \exp \left(-\frac{E_n \tau}{\hbar} \right) = \frac{1}{8} \exp \left(\frac{U_0 \tau}{\hbar} \right) \text{sh}^{-3}(\omega\tau/2). \quad (20)$$

Выражения для пропагатора гармонического осциллятора в реальном времени приведены в [26, 28].

Для удобства расчетов в масштабах действия ядерных сил представим выражения (6), (9)–(11), (14) с использованием безразмерных переменных $\tilde{q} = q/x_0$, $\tilde{V} = V(q)/\varepsilon_0$, $\tilde{m} = m/m_0$, $\tilde{\tau} = \tau/t_0$, $\Delta\tilde{\tau} = \Delta\tau/t_0$, где $x_0 = 1$ Фм, $\varepsilon_0 = 1$ МэВ, m_0 — масса нейтрона, $t_0 = m_0 x_0^2 / \hbar \approx 1.57 \times 10^{-23}$ с, $b_0 = t_0 \varepsilon_0 / \hbar \approx 0.02412$, $\tilde{K}_E = K_E x_0$, тогда

$$\tilde{K}_E(\tilde{q}_0, \tilde{\tau}; \tilde{q}_0, 0) \approx \left(\frac{\tilde{m}}{2\pi\tilde{\tau}} \right)^{1/2} \times \left\langle \exp \left[-\Delta\tilde{\tau} b_0 \sum_{k=1}^N \tilde{V}(q_k) \right] \right\rangle_{0,N}, \quad (21)$$

$$W(\tilde{q}_0; \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{N-1}; \tilde{q}_N) = \tilde{C}^N N^{-1/2} \times \exp \left[-\frac{1}{2\Delta\tilde{\tau}} \sum_{k=1}^N (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1})^2 \right], \quad (22)$$

$$\tilde{C} = \left(\frac{\tilde{m}}{2\pi\Delta\tilde{\tau}} \right)^{1/2}. \quad (23)$$

Для системы двух частиц с массами m ($\mu = m/2$) и параболической потенциальной энергией взаимодействия (18)

$$V(r) = -U_0 + \varepsilon_0 A \tilde{r}^2 = -U_0 + \varepsilon_0 \frac{1}{b_0} \frac{\tilde{m}}{4} \tilde{\omega}^2 \tilde{r}^2, \quad (24)$$

где $\tilde{\omega} = 2\sqrt{Ab_0}$, выражение (20) можно представить в безразмерной форме:

$$F(\tilde{\tau}) = \iiint \tilde{K}_E(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\tau}; \tilde{\mathbf{q}}, 0) d\tilde{\mathbf{q}} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{8} \exp \left[\tilde{U}_0 b_0 \tilde{\tau} \right] \text{sh}^{-3} \left(\tilde{\tau} \sqrt{A b_0} \right).$$

Результаты вычисления интеграла (25) с пропагатором, найденным со статистикой $n = 10^7$ траекторий для $\tilde{m} = 1$, $U_0 = 40$ МэВ, $A = 3$, демонстрируют хорошее согласие с точным аналитическим результатом (рис. 1а). Видно, что при достаточно больших значениях $\tilde{\tau} > T_1$, $T_1 > 6$, зависимость логарифма пропагатора от $\tilde{\tau}$ становится линейной (рис. 1б):

$$b_0^{-1} \ln \tilde{K}_E(q, \tilde{\tau}; q, 0) \approx b_0^{-1} \ln |\Psi_0(q)|^2 - E_0 \tilde{\tau}, \quad (26)$$

$$T_1 < \tilde{\tau}.$$

Значение энергии основного состояния было найдено с помощью линейной регрессии, при этом погрешность определения энергии оказалась менее 0.1 МэВ (точное значение $E_0 = -6.5$ МэВ).

С целью уменьшения кратности интегралов в формулах (13), (21) вычисления для ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$ выполнялись в системе центра масс с использованием координат Якоби [28, 37] для систем трех частиц ($p + n + n$, $p + p + n$, $\alpha + n + n$, $\alpha + n + p$ и $\alpha + \alpha + n$) с массами $m_1 = m_2, m_3$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{y} = \mathbf{r}_3 - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \quad (27)$$

и системы четырех частиц ($p + p + n + n$) с равными массами:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3, \quad (28)$$

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4) - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2).$$

Для основных состояний ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, содержащих не более двух тождественных нуклонов, расчеты по формулам (2)–(17) можно проводить без учета принципа Паули. Принцип Паули можно не учитывать и для ядер ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$, если рассматривать их как состоящие из α -кластеров и не более двух нуклонов. Если потенциальную энергию указанных ядер представить в виде суммы парных взаимодействий, то условие симметричности функции (15) по отношению к перестановке двух тождественных частиц будет выполнено автоматически. При выборе пар $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$ в качестве радиусов-векторов тождественных частиц дополнительной симметризации траекторий не требуется.

При расчетах с конечным числом траекторий асимптотическое поведение (7), (8) может не достигаться. Вне классически доступной области для основного состояния в выражении (6) величина $|\Psi_0(q)|^2 \exp(-E_0 \tau / \hbar)$ может оказаться существенно меньшей интегрального вклада состояний непрерывного спектра. Подобная ситуация возможна и при существовании связанных состояний

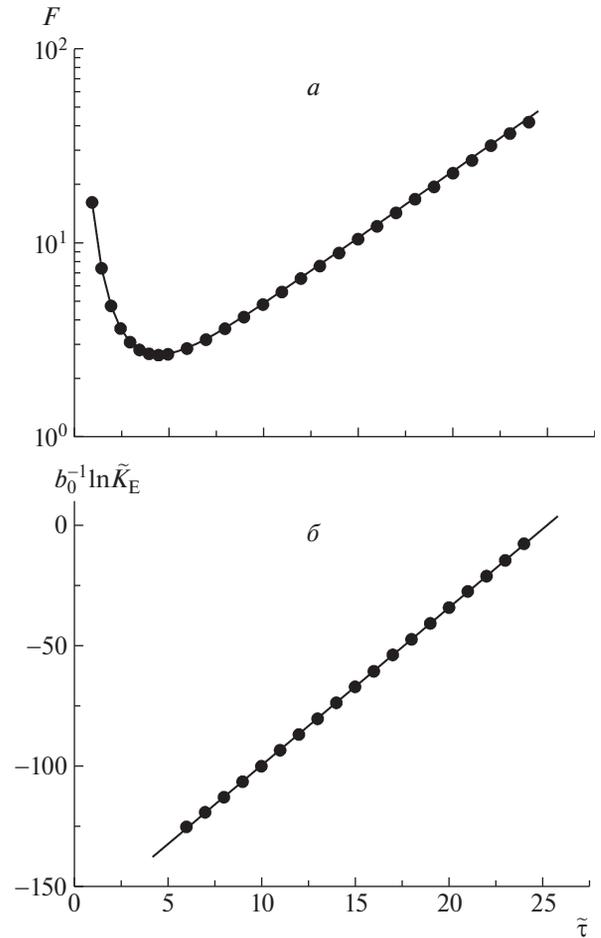


Рис. 1. Зависимости функции (25) $F(\tilde{\tau})$ (а) и логарифма пропагатора $b_0^{-1} \ln \tilde{K}_E$ (б) от евклидова времени $\tilde{\tau}$ для двух частиц с параболическим потенциалом взаимодействия (24) при $\tilde{m} = 1$, $U_0 = 40$ МэВ, $A = 3$, $E_0 = -6.5$ МэВ. Линии — точный результат (а) и результат линейной регрессии (б); точки — расчет методом Монте-Карло для $n = 10^7$ траекторий с шагом сетки $\Delta\tilde{\tau} = 0.01$.

некоторой части частиц системы. Так, для двух нейтронов и протона наряду с основным состоянием в виде ядра ${}^3\text{H}$ возможно состояние в виде дейтрона и свободного нейтрона. Поэтому при конечном значении τ выражения (7), (8) применимы для набора координат q , соответствующих не очень большому удалению от границы Σ_0 классически доступной области для основного состояния системы. При больших значениях τ часть случайной траектории может пройти снаружи и вдали от Σ_0 , где вклад состояний непрерывного спектра может привести к большим случайным отклонениям от асимптотического поведения (7). Поэтому для приближенного вычисления энергии $E_0 < 0$ и плотности вероятности $|\Psi_0(q)|^2$ основного состояния формулу (26) можно применять только при не очень больших временах $T_1 < \tilde{\tau} < T_2$ и не очень больших удале-

ниях от центра масс системы, который выбирается в качестве начала координат. Для корректного вычисления $|\Psi_0(q)|^2$ вне классически доступной области вблизи Σ_0 можно использовать введение искусственной границы Σ'_R , такой, что вне ее значение потенциальной энергии системы полагается равным некоторому большому положительному значению $V_\Sigma \gg |E_0|$. Внутри многомерной потенциальной ямы со стенками конечной высоты энергии возбужденных состояний (стоячих волн) быстро возрастают с ростом их номера. Состояния, подобные конфигурациям в виде дейтрона и свободного нейтрона, также будут иметь энергии порядка V_Σ . Поэтому сумма (6) будет приближенно равна вкладу основного состояния. Положение границы Σ'_R можно определить условиями равенства $r_i = R$ для расстояния r_i любой из частиц до центра масс или условием для гиперрадиуса системы ρ , например, для системы трех частиц

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = R^2. \quad (29)$$

Для реализации расчетов средних (15) по случайным траекториям была использована технология CUDA параллельных вычислений на графических процессорах [33, 38–40]. Расчеты были выполнены на гетерогенном кластере “HybriLIT” [41] Лаборатории информационных технологий Объединенного института ядерных исследований. Отладка программ проводилась на персональных компьютерах с графическими картами NVIDIA, поддерживающими технологию CUDA. Численные расчеты пропагатора (21) проводились с числом траекторий $n \sim 10^6 - 10^8$ и шагом сетки по евклидовому времени $\Delta\tilde{\tau} = 0.01$.

3. СВОЙСТВА ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ ЯДЕР ${}^3\text{H}$, ${}^3,4\text{He}$

В расчетах пропагатора $\tilde{K}_E(q, \tilde{\tau}; q_0, 0)$ для ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3,4\text{He}$ были использованы эффективные центральные парные потенциалы сильного взаимодействия нейтрона с нейтроном $V_{n-n}(r)$ и нейтрона с протоном $V_{n-p}(r)$. Потенциал взаимодействия протона с протоном $V_{p-p}(r)$ включал ядерную (N) и кулоновскую части (C):

$$V_{p-p}(r) = V_{p-p}^{(N)}(r) + V_{p-p}^{(C)}(r). \quad (30)$$

Для кулоновской части взаимодействия использовалось регуляризованное выражение

$$V_{p-p}^{(C)}(r) = \frac{e^2}{\sqrt{r^2 + \delta^2}} \quad (31)$$

с $\delta \ll 1$ Фм. Результаты вычисления пропагатора оказались мало чувствительными к выбору значения малого параметра в диапазоне от 0.001 до

0.1 Фм, в расчетах использовалось значение $\delta = 0.01$ Фм. Конечное значение потенциала $V_{p-p}^{(C)}(0)$ соответствует представлению о нуклонах как о частицах, обладающих структурой.

Зависимости от расстояния r нуклон-нуклонного взаимодействия с твердой сердцевиной, аналогичные потенциалу МЗУ [42, 43], аппроксимировались комбинацией экспонент гауссова типа [32]

$$V_{n-p}(r) = \sum_{k=1}^3 u_k \exp(-r^2/b_k^2), \quad (32)$$

$$V_{n-n}(r) \equiv V_{p-p}^{(N)}(r) = \sum_{k=1}^3 u_k \exp(-r^2/c_k^2). \quad (33)$$

Чтобы обеспечить идентичность всех потенциалов (32), (33) вдали от твердых сердцевины при $r \gg \gg b_1, r \gg c_1$, были наложены условия $b_2 = c_2, b_3 = c_3$. Возможность точного решения задачи двух тел для дейтрона, имеющего единственное состояние с полным спином $S = 1$ и энергией связи 2.225 МэВ [12], позволяет подобрать параметры потенциала взаимодействия $V_{n-p}^{\uparrow\uparrow}(r)$ между протоном и нейтроном с параллельными ($\uparrow\uparrow$) спинами. Пример такого потенциала с параметрами $b_1^{(\uparrow\uparrow)} = 0.296$ Фм, $b_2 = c_2 = 1.265$ Фм, $b_3 = c_3 = 2.667$ Фм, $u_1 = 500$ МэВ, $u_2 = -102$ МэВ, $u_3 = 2$ МэВ показан на рис. 2а. В соответствии с принципом Паули спины двух нейтронов в ядре ${}^3\text{H}$ и двух протонов в ядре ${}^3\text{He}$ противоположны, поэтому потенциальные энергии ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ включают протон-нейтронные взаимодействия с параллельными и антипараллельными спинами:

$$V^{({}^3\text{H})} = V_{n-p}^{\uparrow\uparrow}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|) + V_{n-p}^{\uparrow\downarrow}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|) + V_{n-n}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \quad (34)$$

$$V^{({}^3\text{He})} = V_{n-p}^{\uparrow\uparrow}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|) + V_{n-p}^{\uparrow\downarrow}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|) + V_{p-p}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) + V_{p-p}^{(C)}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (35)$$

Значение параметра $c_1 = 0.533$ Фм потенциала $V_{n-n}(r) \equiv V_{p-p}^{(N)}(r)$ было фиксировано, а значение параметра $b_1^{(\uparrow\downarrow)}$ потенциала $V_{n-p}^{\uparrow\downarrow}(r)$ варьировалось для одновременного получения энергий основных состояний $E_0 = -E_B$, близких к экспериментальным для ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$, где E_B — энергия связи (8.482, 7.718 и 28.296 МэВ соответственно [12]). При одинаковой последовательности использованных при моделировании псевдослучайных чисел, фиксированном числе $n \gg 1$ траекторий и неизменном интервале $T_1 < \tilde{\tau} < T_2$ вычисленное значение энергии основного состояния E_0 является

непрерывной функцией параметра $\beta = b_1^{(\uparrow\downarrow)}$, $E_0 = g(\beta)$. Вблизи значения $-E_B$ возможно линейное представление

$$-g(\beta) = E_B + k(\beta - \gamma). \quad (36)$$

Для $n = 7 \times 10^7$ траекторий были получены следующие близкие значения γ_i : для ядра ${}^3\text{H}$ $\gamma_1 = 0.4603$ Фм, для ядра ${}^3\text{He}$ $\gamma_2 = 0.4614$ Фм и для ядра ${}^4\text{He}$ $\gamma_3 = 0.519$ Фм. Из условия минимума полного квадрата отклонения теоретических значений от экспериментальных для трех ядер

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{E_{0,i}^{(\text{theor})} - E_{0,i}^{(\text{exp})}}{E_{0,i}^{(\text{exp})}} \right)^2 \quad (37)$$

было найдено значение параметра $b_1^{(\uparrow\downarrow)} = 0.473$ Фм, для которого теоретические значения энергий связи трех ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ составили 8.21, 7.37 и 30.60 МэВ соответственно, что достаточно близко к экспериментальным значениям.

В более простой модели можно использовать не зависящий от спинов потенциал (32) и варьировать параметр b_1 . Для $n = 7 \times 10^7$ траекторий были получены следующие близкие значения: для ядра ${}^3\text{H}$ $\gamma_1 = 0.3865$ Фм, для ядра ${}^3\text{He}$ $\gamma_2 = 0.3857$ Фм и для ядра ${}^4\text{He}$ $\gamma_3 = 0.407$ Фм. Из условия минимума полного квадрата отклонения теоретических значений от экспериментальных для трех ядер можно определить общее значение параметра $b_1 = 0.391$ Фм, для которого теоретические значения энергии связи ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ составили 8.23, 7.46 и 30.68 МэВ, что также достаточно близко к экспериментальным значениям. Потенциалы $V_{n-p}^{\uparrow\downarrow}(r)$, $V_{n-n}(r)$ приведены на рис. 2а, а результаты вычисления пропагаторов для этих ядер со статистикой $n = 7 \times 10^7$ траекторий показаны на рис. 2б. В соответствии с формулой (26) угловой коэффициент сглаживающих в результате линейной регрессии прямых на рис. 2б равен энергии основного состояния ядер.

Протон-нейтронный потенциал (32) имеет более глубокий минимум по сравнению с нейтрон-нейтронным потенциалом и ядерной частью протон-протонного потенциала (33) из-за меньшего радиуса твердой сердцевины $b_1 < c_1$. Такое поведение можно связать с кварковой структурой нуклонов: n (udd), p (uud). При сближении двух одинаковых нуклонов четыре одинаковых кварка u или d оказываются локализованы в ограниченной области. Без учета цвета, в соответствии с принципом Паули, пары кварков с противоположными спинами должны занять два уровня — с наименьшей энергией и вышележащий. В конфигурации с одинаковыми спинами только три кварка с разными цветами (R ,

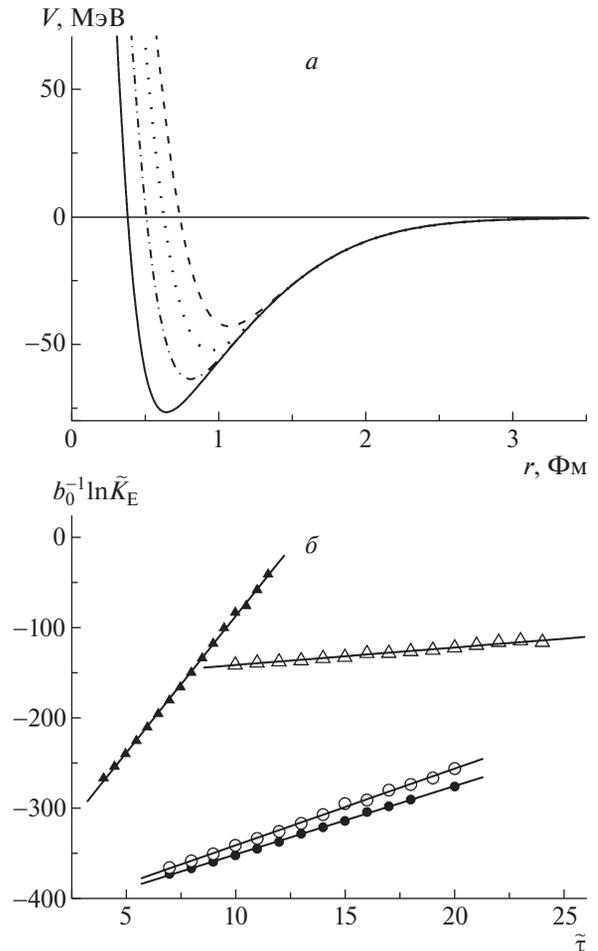


Рис. 2. а — Потенциалы взаимодействия нейтрона и протона с параллельными спинами $V_{n-p}^{\uparrow\uparrow}(r)$ (сплошная кривая) и антипараллельными спинами $V_{n-p}^{\uparrow\downarrow}(r)$ (точечная кривая), не зависящий от спинов потенциал $V_{n-p}(r)$ (штрихпунктирная кривая), потенциал взаимодействия двух одинаковых нуклонов $V_{n-n}(r) \equiv V_{p-p}^{(N)}(r)$ (штриховая кривая). б — Зависимость логарифма пропагатора $b_0^{-1} \ln \tilde{K}_E$ от евклидова времени $\tilde{\tau}$ для ядер ${}^2\text{H}$ (Δ), ${}^3\text{H}$ (\circ), ${}^3\text{He}$ (\bullet) и ${}^4\text{He}$ (\blacktriangle); линии — результаты линейной регрессии (расчет методом Монте-Карло для $n = 7 \times 10^7$ траекторий с шагом сетки $\Delta\tilde{\tau} = 0.01$).

G , B) могут занять низший уровень, а четвертый должен оказаться на вышележащем уровне. В результате учета вкладов всевозможных конфигураций с различным распределением спинов и цветов кварков полная энергия может оказаться выше, чем при сближении протона и нейтрона с локализацией в ограниченной области трех одинаковых кварков.

Исследование плотности вероятности $|\Psi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2$ для основного состояния было ограничено анализом усредненной по углам двумерной

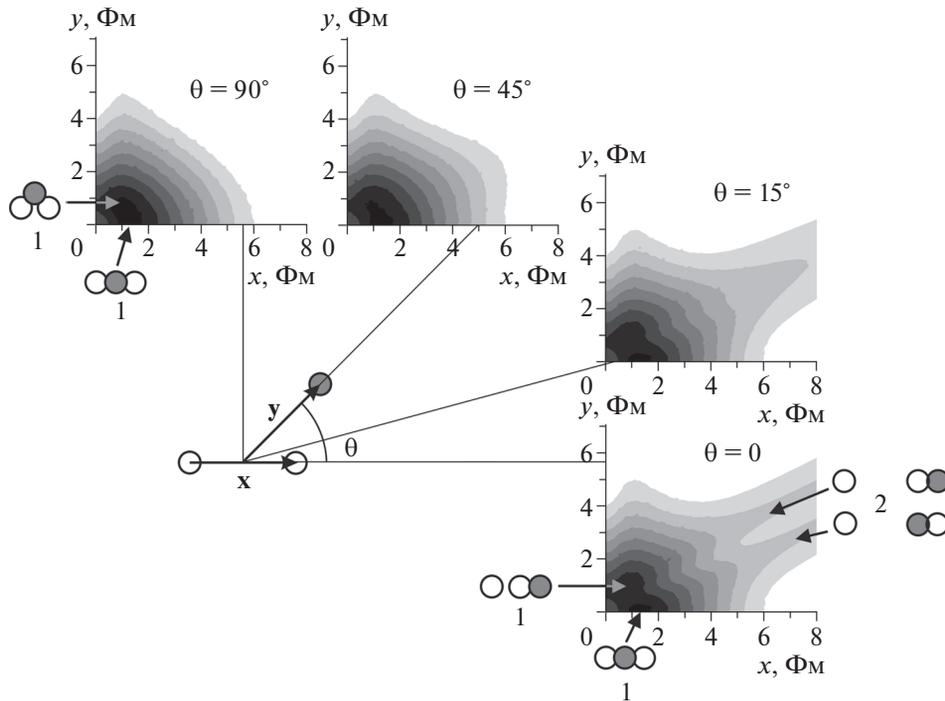


Рис. 3. Топография пропагатора $\tilde{K}_E(x, y, \cos \theta; \tilde{\tau})$ системы $p + n + n$ для $\tilde{\tau} = 10$. Указаны векторы \mathbf{x}, \mathbf{y} в координатах Якоби и примеры положения нейтронов (○) и протонов (●) для основного состояния ядра ${}^3\text{H}$ (1) и конфигурации $n + d$ (2).

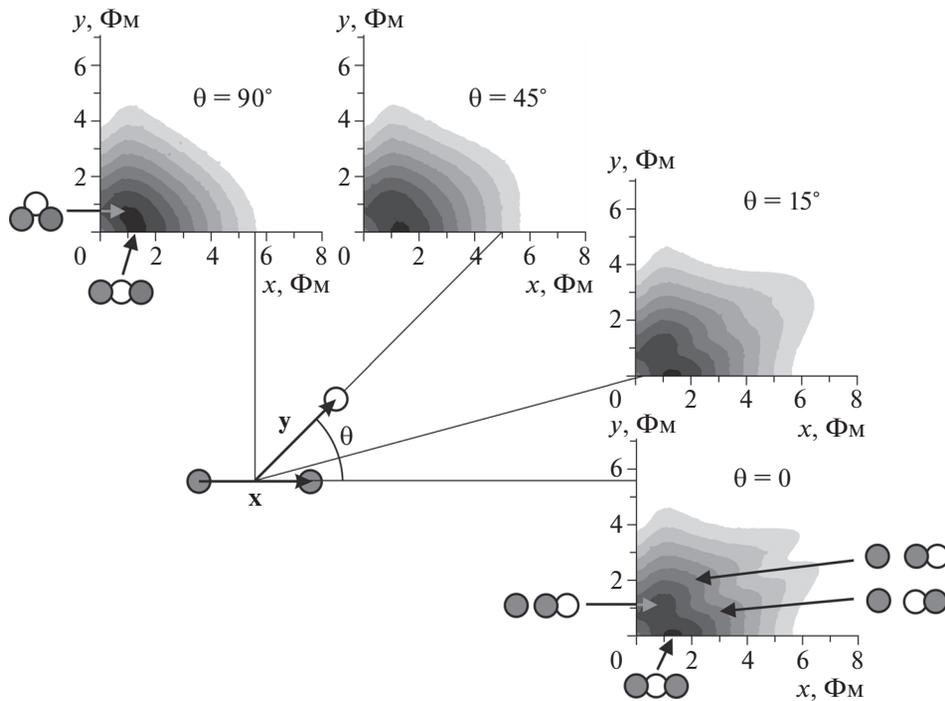


Рис. 4. Топография плотности вероятности $|\Psi_0(x, y, \cos \theta; \tilde{\tau})|^2$ основного состояния ядра ${}^3\text{He}$ ($p + p + n$) для $\tilde{\tau} = 10$. Обозначения те же, что на рис. 3.

радиальной плотности

$$P(x, y) = x^2 y^2 \int |\Psi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 d\Omega_{\mathbf{x}} d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (38)$$

Функция $P(x, y)$ для ядра ${}^3\text{H}$ была вычислена в работе [14]. Максимум плотности вероятности (38) приблизительно соответствует конфигурации с

расположением нуклонов в вершинах правильного треугольника со стороной, приблизительно равной 1.5 Фм. Для определения вероятностей других конфигураций использовалась зависимость пропагатора $\tilde{K}_E(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{\tau}; \mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = \tilde{K}_E(x, y, \cos \theta; \tilde{\tau})$ от x, y и угла θ между векторами Якоби (27).

Для трехтельной системы ${}^3\text{H}$ ($p + n + n$) топография пропагатора $\tilde{K}_E(x, y, \cos \theta; \tilde{\tau})$ при значении $\tilde{\tau} = 10$ из области линейного участка зависимости (26) показана на рис. 3. Наряду с основным состоянием ядра ${}^3\text{H}$ на рис. 3 проявляются состояния в виде дейтрона и свободного нейтрона. Выделение плотности вероятности основного состояния ядра ${}^3\text{He}$ ($p + p + n$) с помощью введения высокой потенциальной ступеньки вокруг центра масс с условием (29) показано на рис. 4. В области максимума топография пропагатора (рис. 3) для системы $p + n + n$ мало отличается от плотности вероятности $|\Psi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2$ системы $p + p + n$.

Для симметричной конфигурации четырех нуклонов в ядре ${}^4\text{He}$ с взаимно перпендикулярными векторами $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}, \mathbf{x}_2$ и $x_1 = x_2 = x$ плотность вероятности $|\Psi_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}, \mathbf{x}_2)|^2 = |\Psi_0(x, y)|^2$ найдена в работах [32, 33]. Отметим, что наличие отталкивательного кора в нуклон-нуклонном взаимодействии уменьшает вероятность нахождения нуклонов в центре масс системы для рассмотренных симметричных конфигураций. Это должно приводить к более плавному росту концентрации нуклонов и плотности электрического заряда при приближении к центру ядра. В оболочечной модели изотопов гелия этот эффект может быть учтен с помощью уменьшения глубины потенциальной ямы в центре ядра [32]. Такой потенциал с мягким отталкивательным кором можно представить в виде суммы нескольких гауссовых экспонент [44] или функций типа Вудса–Саксона:

$$V_{n-\alpha}(r) = V_{p-\alpha}^{(N)}(r) = \sum_{i=1}^s U_i [1 + \exp((r - R_i)/a_i)]^{-1}. \quad (39)$$

Для среднего поля в ядре ${}^6\text{He}$ можно использовать значения параметров $s = 2$, $U_1 = -76$ МэВ, $U_2 = 62$ МэВ, $R_1 = 2.05$ Фм, $R_2 = 1.32$ Фм, $a_1 = a_2 = 0.3$ Фм (и $\lambda_{LS} = 12.2$ в оболочечной модели со спин-орбитальным взаимодействием).

4. СВОЙСТВА ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ ЯДЕР ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$

Ядра ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, имеющие кластерную структуру, рассматривались как системы трех тел $\alpha + n + n$ и $\alpha + n + p$ соответственно. Рассмотрение только

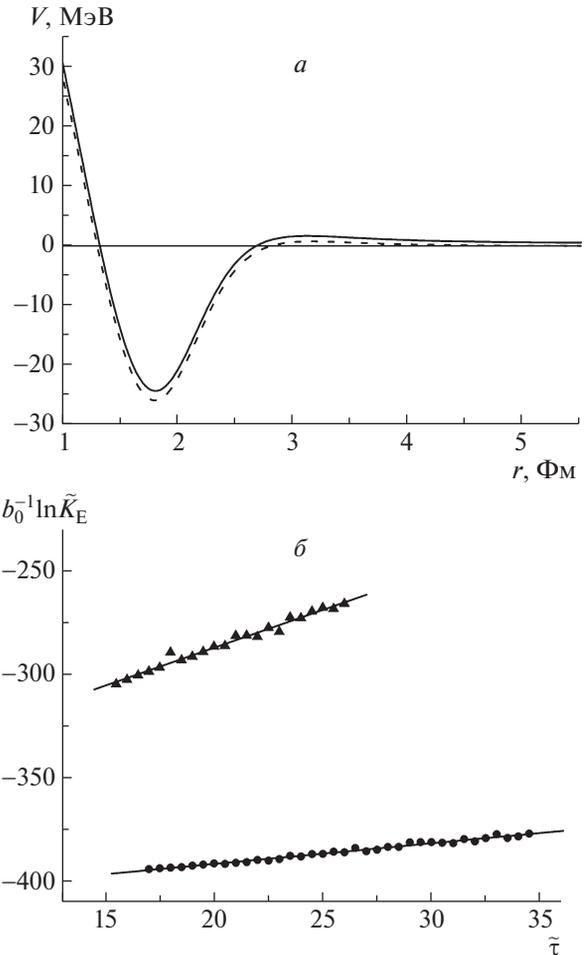


Рис. 5. *a* — Потенциалы взаимодействия α -кластера с внешними протоном (сплошная кривая) и нейтроном (штриховая кривая) в ядрах ${}^6\text{Li}$ и ${}^6\text{He}$, для ядерной составляющей использована комбинация трех функций Вудса–Саксона в форме (39). *б* — Зависимость логарифма пропагатора $b_0^{-1} \ln \tilde{K}_E$ от евклидова времени $\tilde{\tau}$ для ${}^6\text{Li}$ (\blacktriangle) и ${}^6\text{He}$ (\bullet); линии — результаты линейной регрессии.

двух внешних нейтронов с противоположными спинами в ядре ${}^6\text{He}$ и протон-нейтронной пары с параллельными спинами в ядре ${}^6\text{Li}$ позволяет проводить расчеты без учета принципа Паули. В расчетах пропагатора $\tilde{K}_E(q, \tilde{\tau}; q_0, 0)$ для ядер ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$ вместе с потенциалами $V_{n-n}, V_{n-p}^{\uparrow\uparrow}$ были использованы двухчастичные потенциалы сильного взаимодействия нейтрона с α -кластером $V_{n-\alpha}(r)$ и протона с α -кластером $V_{p-\alpha}^{(N)}(r)$. Потенциал взаимодействия протона с α -кластером $V_{p-\alpha}(r)$ включал ядерную и кулоновскую части:

$$V_{p-\alpha}(r) = V_{p-\alpha}^{(N)}(r) + V_{p-\alpha}^{(C)}(r). \quad (40)$$

Для кулоновской части взаимодействия использовалось известное выражение для энергии точечно-

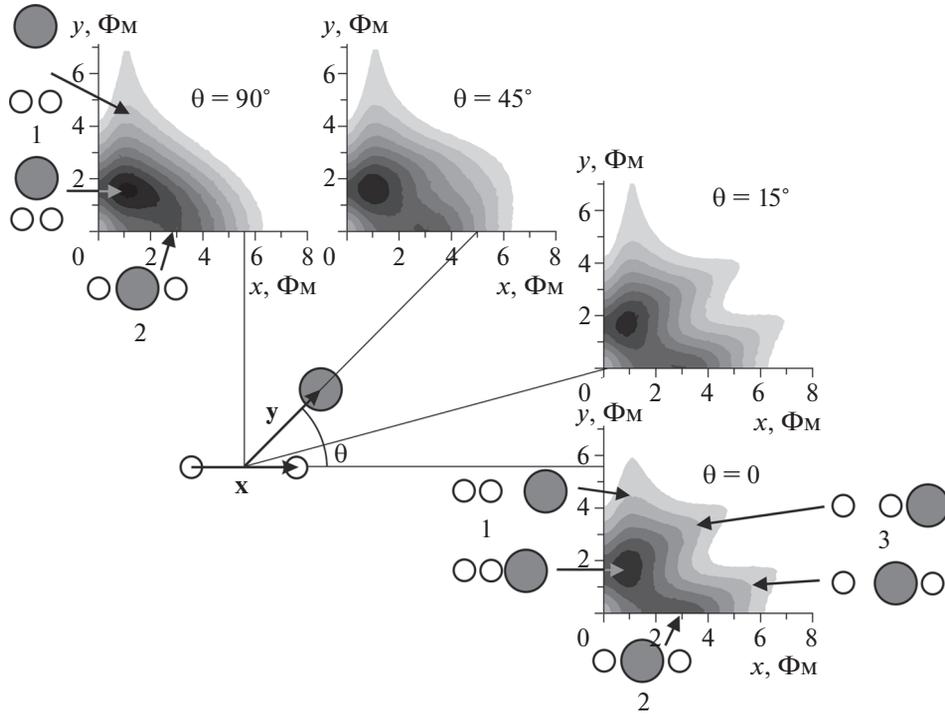


Рис. 6. Топография плотности вероятности $|\Psi_0(x, y, \cos \theta; \bar{\tau})|^2$ основного состояния ядра ${}^6\text{He}$ ($\alpha + n + n$) для $\bar{\tau} = 20$. Указаны векторы \mathbf{x} , \mathbf{y} в координатах Якоби и примеры положения нейтронов (\circ) и α -кластеров (\bullet) для конфигураций: динейтронной (1), сигарообразной (2) и $n + {}^5\text{He}$ (3).

го заряда в поле равномерно заряженного шара. Потенциалы взаимодействия $V_{n-\alpha}(r)$ и $V_{p-\alpha}^{(N)}(r)$ (рис. 5а) выбирались в форме (39) с $s = 3$. Поскольку для внешних нуклонов состояние $1p_{3/2}$ оболочечной модели является хорошим приближением, их взаимодействие с ядерным α -кластерным остовом в работе [32] было представлено в виде комбинации потенциала Вудса–Саксона и жесткого отталкивательного кора, подобного центробежному потенциалу $\hbar^2 l(l+1)/(2\mu r^2)$, где μ — приведенная масса системы $\alpha + n$, $l = 1$. В настоящей работе в (39) использовалось слагаемое с $i = 3$ и параметрами $R_3 = 1$ ФМ, $a_3 = 0.5$ ФМ. Результат вычисления пропагаторов для рассматриваемых ядер приведен на рис. 5б. Параметр U_3 варьировался для получения энергий разделения систем $\alpha + n + n$ и $\alpha + n + p$ на составляющие частицы, близких к экспериментальным одновременно для обоих ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Li}$ (0.97542 МэВ и 3.637 МэВ соответственно [12]). При фиксированном числе $n \gg 1$ траекторий и неизменном интервале $T_1 < \bar{\tau} < T_2$ вычисленное значение энергии основного состояния E_0 является непрерывной функцией параметра U_3 , $E_0 = g(U_3)$. Вблизи значения $-E_B$ возможно линейное представление

$$-g(U) = E_B + k(U - w). \quad (41)$$

Для $n = 7 \times 10^7$ траекторий были получены следующие близкие значения: для ядра ${}^6\text{He}$ $w_1 = 111.97$ МэВ, для ядра ${}^6\text{Li}$ $w_2 = 113.39$ МэВ. Минимум полного квадрата отклонения (37) теоретических значений энергии разделения систем от экспериментальных для обоих ядер достигается при $w_2 = 112.08$ МэВ. Это дает для ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^6\text{Li}$ значения энергий разделения систем $\alpha + n + n$ и $\alpha + n + p$ на составляющие частицы 0.96 и 3.87 МэВ соответственно, достаточно близкие к экспериментальным.

Распределение плотности вероятности $|\Psi_0(x, y, \cos \theta; \bar{\tau})|^2$ для трехтельных конфигураций ${}^6\text{He}$ ($\alpha + n + n$) показано на рис. 6, наиболее вероятными из них являются динейтронная ($\alpha + (n + n)$) и сигарообразная ($n + \alpha + n$). Для ядра ${}^6\text{Li}$ ($\alpha + n + p$) наиболее вероятна дейтронная конфигурация ($\alpha + d$), а вероятность сигарообразной конфигурации мала.

5. СВОЙСТВА ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ ЯДРА ${}^9\text{Be}$

В расчетах пропагатора $\tilde{K}_E(q, \bar{\tau}; q_0, 0)$ для ядра ${}^9\text{Be}$ был использован двухчастичный потенциал взаимодействия α -кластера с α -кластером

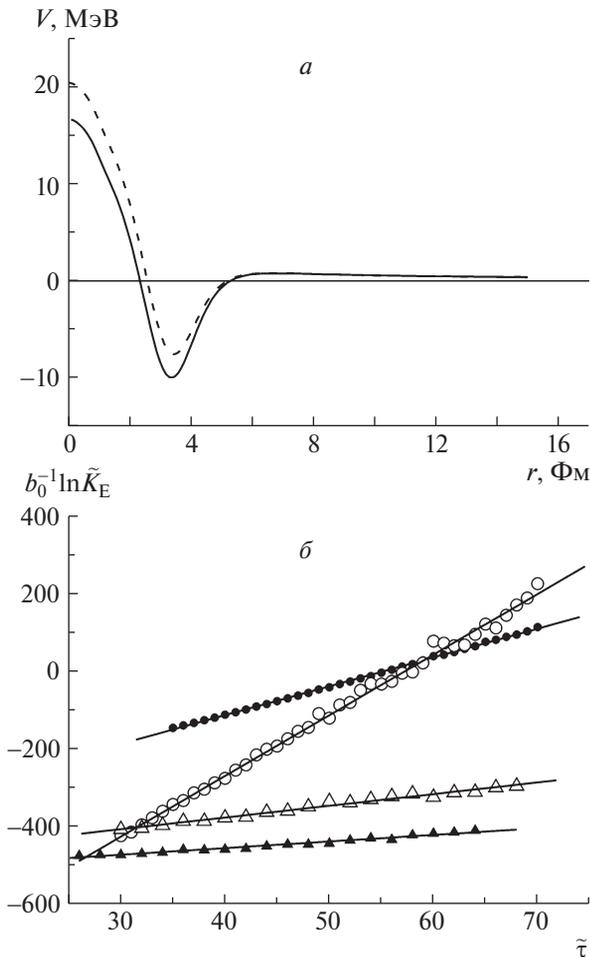


Рис. 7. *a* — Потенциалы взаимодействия α -кластера с α -кластером $V_{\alpha-\alpha}(r)$ в сильносвязанных ядрах ^{12}C и ^{16}O (сплошная кривая) и $V'_{\alpha-\alpha}(r)$ в слабосвязанном ядре ^9Be (штриховая кривая), для ядерной составляющей использована комбинация двух функций Вудса—Саксона в форме (39). *б* — Зависимость логарифма пропагатора $b_0^{-1} \ln \tilde{K}_E$ от евклидова времени $\tilde{\tau}$ для ядер ^{12}C (●), ^{16}O (○), ^9Be (△) при расчетах с потенциалом $V_{\alpha-\alpha}(r)$ и при расчетах с потенциалом $V'_{\alpha-\alpha}(r)$ для ^9Be (▲); линии — результаты линейной регрессии.

$V_{\alpha-\alpha}(r)$, включавший ядерную и кулоновскую части:

$$V_{\alpha-\alpha}(r) = V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(r) + V_{\alpha-\alpha}^{(C)}(r). \quad (42)$$

Потенциальная энергия взаимодействия двух α -кластеров на расстояниях, превышающих $2(R_{\text{ch}}^2)^{1/2}$, может быть выбрана в форме комбинации потенциала Вудса—Саксона с параметрами Акюза—Винтера и потенциала кулоновского отталкивания двух точечных зарядов. На малых расстояниях кулоновская часть может быть представлена в форме отталкивательного потенциала взаимодействия двух равномерно заряженных шаров. Результат усредненного действия отталкивательного кора

и принципа Паули можно представить в форме суммы двух функций типа Вудса—Саксона (39).

Значения параметров потенциала $V_{\alpha-\alpha}(r)$ можно определить по экспериментальным значениям энергий разделения систем $\alpha + \alpha + \alpha$ и $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha$ на составляющие α -частицы для α -кластерных ядер ^{12}C , ^{16}O (7.275 и 14.44 МэВ соответственно [12]), а также из условия отсутствия связанного состояния у α -кластерного ядра ^8Be . Теоретические значения энергии основного состояния систем трех и четырех α -кластеров были вычислены методом континуальных интегралов аналогично другим рассмотренным выше ядрам. Параметры $U_2 = 38$ МэВ, $R_1 = 3.73$ Фм, $R_2 = 2.71$ Фм, $a_1 = a_2 = 0.512$ Фм были фиксированы, а параметр U_1 варьировался.

Для $n = 10^7$ траекторий в линейном выражении (41) равенство теоретических и экспериментальных энергий разделения систем достигалось при близких значениях $w_1 = 29.75$ МэВ для ядра ^{12}C и $w_2 = 29.0$ МэВ для ядра ^{16}O . График потенциала $V_{\alpha-\alpha}(r)$ показан на рис. 7*a*, а результаты вычисления пропагаторов для этих ядер — на рис. 7*б*. При этом рассчитанная энергия разделения системы $\alpha + n + \alpha$ на составляющие частицы для ядра ^9Be составила 3.4 ± 0.1 МэВ, что заметно больше экспериментального значения 1.573 МэВ [12]. Для получения меньшего значения энергии разделения системы (рис. 7*б*) требуется уменьшение глубины потенциальной ямы $V_{\alpha-\alpha}(r)$ при меньшем значении параметра $U_1 = 25.9$ МэВ (рис. 7*a*). Этот факт можно интерпретировать как следствие различия α -кластеров и/или их взаимодействия друг с другом в слабосвязанном ядре ^9Be и сильносвязанных ядрах ^{12}C и ^{16}O . Распределение плотности вероятности для трехтельных конфигураций ^9Be ($\alpha + n + \alpha$) показано на рис. 8. Видно, что наибольшую вероятность имеют конфигурации $\alpha + n + \alpha$ и $\alpha + ^5\text{He}$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный подход к расчетам волновой функции основных состояний ядер ^3H , $^{3,4,6}\text{He}$, ^6Li , ^9Be может служить дополнением к существующим более сложным вычислительным методам. Он позволяет достаточно просто определить энергию основного состояния и установить ее зависимость от параметров нуклон-нуклонного потенциала. Анализ свойств плотности вероятности позволяет подобрать аналитические аппроксимации для волновой функции основного состояния, а также сделать более реалистичным выбор среднего поля оболочечной модели и распределения заряда и массы

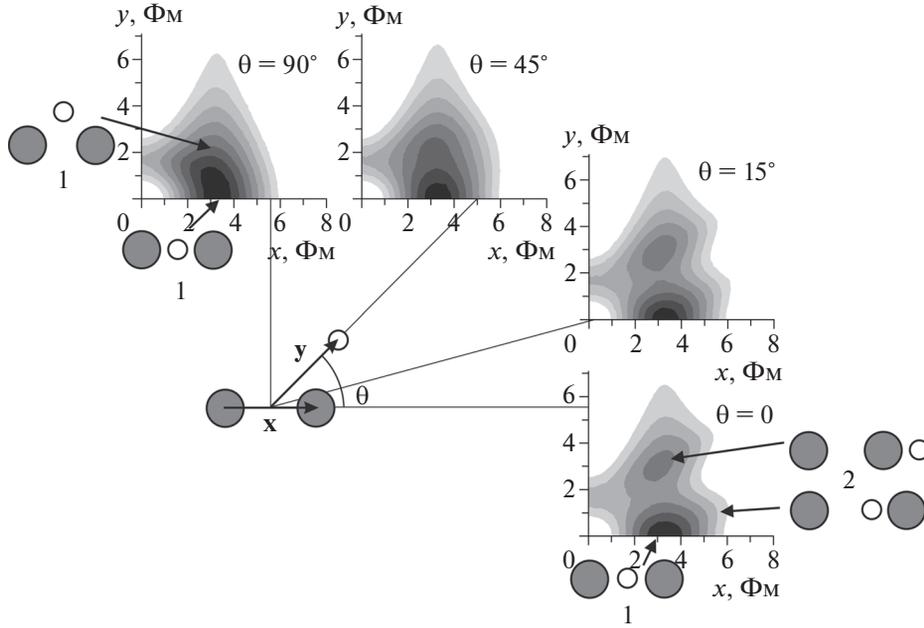


Рис. 8. Топография плотности вероятности $|\Psi_0(x, y, \cos \theta; \tilde{\tau})|^2$ основного состояния ядра ${}^9\text{Be}$ для $\tilde{\tau} = 20$. Обозначения те же, что на рис. 6. Указаны примеры положения нейтрона и α -кластеров для конфигураций: $\alpha + n + \alpha$ (1) и $\alpha + {}^5\text{He}$ (2).

в ядрах. Найденная методом континуальных интегралов плотность вероятности позволяет определять минимально необходимое число базисных функций (например, гиперсферических функций) и их квантовые числа для решения с заданной точностью многомерного уравнения Шредингера как для основного состояния, так и для возбужденных состояний.

Авторы выражают благодарность за полезное обсуждение полученных результатов профессору В.И. Кукулину, А.В. Карпову и А.С. Деникину.

Приложение

Стандартный алгоритм моделирования случайного вектора Q с плотностью вероятности (16) состоит [35, 36] в последовательном выборе значений его компонент из условных распределений $W_1(q_1|q_0)$, $W_2(q_2|q_0, q_1)$, $W_3(q_3|q_0, q_1, q_2)$, ..., $W_{N-1}(q_{N-1}|q_0, q_1, q_2, \dots, q_{N-2})$. Здесь $W_k(q_k|q_0, q_1, q_2, \dots, q_{k-1})$ — плотность вероятности значений величины q_k при заданных значениях величин $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{k-1}$. Одномерное распределение для $k = 1$:

$$W_1(q_1|q_0) = \int dq_2 \dots \int dq_{N-1} \times \quad (\text{П.1})$$

$$\times W(q_0; q_1, q_2, \dots, q_{N-1}; q_N = q_0) =$$

$$= C^{N-1} N^{1/2} \int dq_2 \dots \int dq_{N-1} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{m}{2\Delta\tau\hbar} \sum_{k=1}^N [(q_k - q_{k-1})^2] \right\} =$$

$$= N^{1/2} K_E^{(0)}(q_0, \tau = (N-1)\Delta\tau; q_1, 0) \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{m}{2\Delta\tau\hbar} [(q_1 - q_0)^2] \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1} [(q_1 - q_0)^2] \right\},$$

является нормальным с математическим ожиданием

$$Mq_1 = q_0 \quad (\text{П.2})$$

и дисперсией

$$\sigma_1 = \frac{\Delta\tau\hbar}{m} \left(1 - \frac{1}{N} \right). \quad (\text{П.3})$$

Двумерное распределение для $k = 2$ является произведением нормальных распределений для величин q_1 и q_2 :

$$\int dq_3 \dots \int dq_{N-1} \times \quad (\text{П.4})$$

$$\times W(q_0; q_1, q_2, q_3, \dots, q_{N-1}; q_N = q_0) =$$

$$= W_2(q_2|q_0, q_1) W_1(q_1|q_0),$$

где

$$W_2(q_2|q_0, q_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} \times \quad (\text{П.5})$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_2} [(q_2 - Mq_2)^2] \right\},$$

$$Mq_2 = \left(1 - \frac{1}{N-1}\right) q_1 + \frac{1}{N-1} q_0, \quad (\text{П.6})$$

$$\sigma_2 = \frac{\Delta\tau\hbar}{m} \left(1 - \frac{1}{N-1}\right).$$

В общем случае распределение $W_k(q_k|q_0, q_{k-1})$ также является нормальным с математическим ожиданием

$$Mq_k = (1 - A_k) q_{k-1} + A_k q_0, \quad (\text{П.7})$$

$$A_k = \frac{1}{N - k + 1}$$

и дисперсией

$$\sigma_k = \frac{\Delta\tau\hbar}{m} (1 - A_k). \quad (\text{П.8})$$

При моделировании траектории очередное случайное значение q_k вычисляется по формуле

$$q_k = Mq_k + \zeta_k \Delta q_k, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad (\text{П.9})$$

где $\Delta q_k = \sqrt{\sigma_k}$ — среднеквадратичное отклонение и ζ_k — нормально распределенная случайная величина с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. Э. Пенионжкевич, ЯФ **74**, 1641 (2011) [Phys. Atom. Nucl. **74**, 1615 (2011)].
2. A. Lemasson, A. Shrivastava, A. Navin, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **103**, 232701 (2009).
3. А. А. Кулько, Н. А. Демехина, Р. Калпакчиева и др., ЯФ **70**, 643 (2007) [Phys. Atom. Nucl. **70**, 613 (2007)].
4. А. А. Kulko, N. A. Demekhina, R. Kalpakchieva, *et al.*, J. Phys. G **34**, 2297 (2007).
5. Yu. E. Penionzhkevich, R. A. Astabatyanyan, N. A. Demekhina, *et al.*, Eur. Phys. J. A **31**, 185 (2007).
6. Yu. E. Penionzhkevich, V. I. Zagrebaev, S. M. Lukanov, and R. Kalpakchieva, Phys. Rev. Lett. **96**, 162701 (2006).
7. Н. К. Скобелев, А. А. Кулько, Ю. Э. Пенионжкевич и др., Письма в ЭЧАЯ **10**, 671 (2013) [Phys. Part. Nucl. Lett. **10**, 410 (2013)].
8. Н. К. Скобелев, А. А. Кулько, Ю. Э. Пенионжкевич и др., Изв. РАН. Сер. физ. **77**, 878 (2013) [Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. **77**, 795 (2013)].
9. N. K. Skobelev, A. A. Kulko, V. Kroha, *et al.*, J. Phys. G **38**, 035106 (2011).
10. Н. К. Скобелев, Ю. Э. Пенионжкевич, Е. И. Воскобойник и др., Письма в ЭЧАЯ **11**, 198 (2014) [Phys. Part. Nucl. Lett. **11**, 114 (2014)].
11. J. J. Kolata, V. Guimarães, D. Peterson, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 4580 (1998).
12. В. И. Загребаев, А. С. Деникин, А. В. Карпов, А. П. Алексеев, М. А. Науменко, В. А. Рачков, В. В. Самарин, В. В. Сайко, *Сетевая база знаний NRV по ядерной физике низких энергий*, URL: <http://nrw.jinr.ru/> [NRV web knowledge base on low-energy nuclear physics, URL: <http://nrw.jinr.ru/>]
13. В. Г. Соловьев, *Теория атомного ядра: ядерные модели* (Энергоиздат, Москва, 1981).
14. Yu. Ts. Oganessian, V. I. Zagrebaev, and J. S. Vaagen, Phys. Rev. C **60**, 044605 (1999).
15. Л. И. Галанина, Н. С. Зеленская, ЯФ **65**, 1315 (2002) [Phys. Atom. Nucl. **65**, 1282 (2002)].
16. R. Raabe, A. Andreev, M. Huyse, ..., L. I. Galanina, and N. S. Zelenskaya, Phys. Rev. C **67**, 044602 (2003).
17. Л. И. Галанина, Н. С. Зеленская, ЯФ **70**, 308 (2007) [Phys. Atom. Nucl. **70**, 283 (2007)].
18. Л. И. Галанина, Н. С. Зеленская, ЭЧАЯ **43**, 295 (2012) [Phys. Part. Nucl. **43**, 147 (2012)].
19. W. von Oertzen, M. Freer, and Y. Kanada En'yo, Phys. Rept. **432**, 43 (2006).
20. P. Descouvemont, T. Druet, L. F. Canto, and M. S. Hussein, Phys. Rev. C **91**, 024606 (2015).
21. V. T. Voronchev, V. M. Krasnopol'sky, and V. I. Kukulin, J. Phys. G **8**, 649 (1982).
22. V. T. Voronchev, V. M. Krasnopol'sky, V. I. Kukulin, and P. V. Sazonov, J. Phys. G **8**, 667 (1982).
23. M. V. Zhukov, B. V. Danilin, D. V. Fedorov, *et al.*, Phys. Rept. **231**, 151 (1993).
24. В. И. Кукулин, В. М. Краснополянский, М. А. Миселхи, В. Т. Ворончев, ЯФ **34**, 21 (1981) [Sov. J. Nucl. Phys. **34**, 11 (1981)].
25. V. I. Kukulin, V. M. Krasnopol'sky, V. T. Voronchev, and P. V. Sazonov, Nucl. Phys. A **453**, 365 (1986).
26. Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям* (Мир, Москва, 1968) [R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, New York, 1965)].
27. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей* (Наука, Москва, 1978).
28. Д. И. Блохинцев, *Основы квантовой механики* (Наука, Москва, 1976).
29. Э. В. Шуряк, УФН **143**, 309 (1984) [Sov. Phys. Usp. **27**, 448 (1984)].
30. E. V. Shuryak and O. V. Zhiron, Nucl. Phys. B **242**, 393 (1984).
31. В. В. Самарин, ЯФ **78**, 916 (2015) [Phys. Atom. Nucl. **78**, 861 (2015)].
32. В. В. Самарин, М. А. Науменко, Изв. РАН. Сер. физ. **80**, 314 (2016) [Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. **80**, 283 (2016)].
33. M. A. Naumenko and V. V. Samarin, Supercomp. Front. Innov. **3** (2), 80 (2016).
34. Р. И. Джибути, К. В. Шитикова, *Метод гиперсферических функций в атомной и ядерной физике* (Энергоатомиздат, Москва, 1993).

35. С. М. Ермаков, *Метод Монте-Карло в вычислительной математике. Вводный курс* (Невский Диалект, Санкт-Петербург, 2009).
36. Ю. Г. Полляк, *Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах* (Советское радио, Москва, 1971).
37. В. П. Жигунов, Б. Н. Захарьев, *Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния* (Атомиздат, Москва, 1974).
38. NVIDIA CUDA. URL: <http://developer.nvidia.com/cuda-zone/>
39. Е. Е. Перепёлкин, Б. И. Садовников, Н. Г. Иноземцева, *Вычисления на графических процессорах (GPU) в задачах математической и теоретической физики* (Ленанд, Москва, 2014).
40. Д. Сандерс, Э. Кэндрот, *Технология CUDA в примерах. Введение в программирование графических процессоров* (ДМК Пресс, Москва, 2011) [J. Sanders and E. Kandrot, *CUDA by Example: An Introduction to General-Purpose GPU Programming* (Addison-Wesley, New York, 2010)].
41. *HybriLIT* — гетерогенный кластер ЛИТ ОИЯИ, URL: <http://hybrilit.jinr.ru/>
42. G. R. Satcher and W. G. Love, *Phys. Rept.* **55**, 183 (1979).
43. M. A. G. Alvarez, L. C. Chamon, D. Pereira, *et al.*, *Nucl. Phys. A* **656**, 187 (1999).
44. H. Kanada, T. Kaneko, S. Nagata, and M. Nomoto, *Prog. Theor. Phys.* **61**, 1327 (1979).

STUDY OF GROUND STATES OF ${}^3\text{H}$, ${}^{3,4,6}\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$ NUCLEI BY FEYNMAN'S CONTINUAL INTEGRALS METHOD

V. V. Samarin, M. A. Naumenko

The energies and the wave functions of the ground states of ${}^3\text{H}$, ${}^{3,4,6}\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$ nuclei have been calculated by Feynman's continual integrals method. The results demonstrate the overall satisfactory agreement with the experimental data.