

сообщения
Объединенного
Института
Ядерных
Исследований
Дубна

2300/82

17/1-82

P2-82-73

З.Омбоо

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ
ГЛАУБЕРОВСКИХ АМПЛИТУД
1. Упругое рассеяние

1982

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ АМПЛИТУД УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

Амплитуда упругого рассеяния составных систем А и В, содержащих соответственно А и В конstituентов, в приближении Глаубера-Ситенко дается следующим выражением /1/:

$$F(q) = \frac{i p^0}{2\pi} \int d^2 b e^{i q b} \langle \Psi_{A_f} \Psi_{B_f} | [1 - \prod_{i=1}^A \prod_{j=1}^B (1 - \gamma(\vec{b} - \vec{s}_i + \vec{r}_j))] | \Psi_{A_i} \Psi_{B_i} \rangle, /1/$$

в котором b - прицельный параметр; Ψ_{A_i}, Ψ_{B_i} (Ψ_{A_f}, Ψ_{B_f}) - начальные /конечные/ волновые функции составных систем; $\gamma(\vec{b} - \vec{s}_i + \vec{r}_j)$ - амплитуда упругого рассеяния конstituентов в представлении прицельного параметра; $\{\vec{s}_i\}, \{\vec{r}_j\}$ - прицельные координаты конstituентов системы А и В.

Как видно из /1/, амплитуда упругого рассеяния определяется суммой большого числа членов, имеющих вид

$$\frac{i p^0}{2\pi} \int d^2 b e^{i q b} \langle \Psi_{A_f} \Psi_{B_f} | \prod_{(i,j) \in M} \gamma_{ij} | \Psi_{A_i} \Psi_{B_i} \rangle, /2/$$

$$\gamma_{ij} = \gamma(\vec{b} - \vec{s}_i + \vec{r}_j),$$

где $M \subset I_1' \otimes I_2'$ и $I_1' \subset I_1, I_2' \subset I_2$, а I_1 и I_2 - множества целых чисел с элементами

$$I_1 = (1, 2, \dots, A); \quad I_2 = (1, 2, \dots, B).$$

Поскольку таких членов ряда довольно много ($2^{AB} - 1$), приведение подобных среди них представляет нетривиальную задачу, которая значительно упрощается, если перейти на язык диаграмм рассеяния.

Диаграмма рассеяния, представляющая собой общий член ряда /2/, строится следующим образом /2/. Нарисуем m вертикальных линий и n горизонтальных, пересекающих вертикальные m и n - соответственно мощности множеств I_1' и I_2' , тогда точки /узлы/ пересечения линий представляют множество $I_1' \otimes I_2'$. Подмножество изобразим в нем в виде темных точек /рис.1/.



Рис. 1

Такое представление членов ряда /1/ позволяет легко определить число подобных членов. Действительно, возьмем для примера диаграмму рассеяния рис.1. Ясно, что она может быть построена двумя способами.

Кроме того, m элементов из I_1 могут быть выбраны способами C_A^m , а n элементов из I_2 - соответственно C_B^n . Следовательно, общее число подобных членов, представляемых диаграммами типа диаграммы на рис.1, в выражении /1/ равно

$$2C_A^2 C_B^2.$$

Аналогичным образом можно определить число изоморфных диаграмм произвольного вида. Поскольку такая задача частично решена в работе /2/, мы ее здесь рассматривать не будем, а займемся вычислением интеграла в выражении /2/.

Для этого, очевидно, необходимо знать явный вид функций Ψ_{A_i} , Ψ_{B_j} и Ψ_{A_f} , Ψ_{B_f} . В случае упругого рассеяния $|\Psi_i\rangle = |\Psi_f\rangle$.

Поэтому необходимо располагать информацией только об основных состояниях систем А и В. Поскольку таковая в полном необходимом объеме отсутствует, используют различные приближения. В частности, наиболее популярны в случае небольших А и В следующие аппроксимации:

$$|\Psi\rangle^2 = C_1 \delta \left(\sum_{i=1}^A \vec{r}_i / A \right) \prod_{i=1}^A e^{-t s_i^2}, \quad /3/$$

$$|\Psi\rangle^2 = C_2 \delta \left(\sum_{i=1}^B \vec{r}_i / B \right) \prod_{i=1}^B e^{-d r_i^2}.$$

Если, кроме того, предположить, что

$$\gamma(\vec{b}) = C_3 e^{-ab^2}, \quad /4/$$

то общий член ряда /2/ может быть представлен в виде

$$N \frac{ip_0}{2\pi} \int d^2b \exp \{ -x^T Q x - 2b o^T x - 2b^2 C + iqb \} d^{m+n} x db, \quad /5/$$

где

$$x^T = (\vec{s}_{i_1}, \vec{s}_{i_2}, \dots, \vec{s}_{i_n}, \vec{r}_{j_1}, \vec{r}_{j_2}, \dots, \vec{r}_{j_m}).$$

Здесь $i_k (k=1,2,3,\dots,m)$ - элементы множества I_1' , а $j_k (k=1,2,\dots,n)$ - элементы множества I_2' ; Q - $(m+n) \times (m+n)$ - симметричная матрица, структуру которой обсудим ниже; b - одномерный вектор; o - коэффициентные матрицы векторов s_i и r_i ; C - скаляр; x^T , o^T - транспонированные матрицы x и o . Выражение /5/ легко интегрируется:

$$N \frac{ip_0}{2\pi} \int \exp \{ -x^T Q x - 2b o^T x - 2b^2 C + iqb \} d^{m+n} x db = \frac{\pi^{m+n+1}}{\text{Det } W} \exp \left\{ \frac{q^2}{4} \frac{|\text{Det } Q|}{|\text{Det } W|} \right\}. \quad /6/$$

Здесь $\text{Det } Q$, $\text{Det } W$ - детерминанты матрицы Q и W . Матрица W определяется следующим образом:

$$W = \begin{pmatrix} Q & o \\ o^T & c \end{pmatrix}. \quad /7/$$

Порядок матрицы Q и W зависит от конкретных видов диаграмм рассеяния. Например, для диаграммы с n вертикальными и m горизонтальными линиями соответствующая матрица Q есть $(n+m) \times (n+m)$ -матрица, а матрица W есть $(n+m+1) \times (n+m+1)$ -матрица. Вычисление детерминантов этих матриц - нетривиальная задача. Поэтому целью настоящей работы является получение эффективного метода вычисления детерминантов Q и W и приведение подобных в ряде /1/.

2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Возьмем для простоты диаграммы рис.1. Соответствующий такой диаграмме член ряда /2/ имеет вид

$$\frac{ip_0}{2\pi} \left(\frac{td}{\pi^2} \right)^2 \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{a}}{2\pi} \right)^2 \int \exp \{ -(t+a)s_1^2 - (t+a)s_2^2 - (d+a)r_1^2 - (d+a)r_2^2 + 2as_1 r_1 + 2as_1 r_2 + 2ab(\vec{s}_1 + \vec{s}_2 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{q} - 2ab^2 + iqb \} \times \\ \times d^2b d^2s_1 d^2s_2 d^2r_1 d^2r_2. \quad /8/$$

Следовательно,

$$Q = \begin{vmatrix} t+a & 0 & -a & 0 \\ 0 & t+a & 0 & -a \\ -a & 0 & d+a & 0 \\ 0 & -a & 0 & d+a \end{vmatrix}. \quad /9/$$

Отсюда видно, что матрица Q , соответствующая диаграмме, показанной на рис.1, обладает блочной структурой:

$$\begin{pmatrix} T & a \\ a^T & D \end{pmatrix}, \quad /10/$$

где T и D - диагональные матрицы вида

$$T = \begin{pmatrix} t+a & 0 \\ 0 & t+a \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d+a & 0 \\ 0 & d+a \end{pmatrix}.$$

Между матрицей a и диаграммой рассеяния существует однозначная связь; точки диаграммы, находящиеся на пересечении i -й горизонтальной и j -й вертикальной линий, соответствуют элементу $a_{ij} = -a$. Пустым узлам диаграммы соответствуют элементы матрицы a , равные нулю. a^T - транспонированная матрица. Структура диагональных матриц T и D также зависит от конкретного вида диаграмм. Например, элемент матрицы T t_{ii} равен $t + p_i a$, где p_i - число всех точек, находящихся на i -й горизонтальной линии диаграммы.

Точно таким же образом любой элемент диагональной матрицы D имеет вид

$$d_{jj} = d + \eta_j a,$$

где η - число всех точек, находящихся на j -й вертикальной линии диаграммы.



Рис. 2

Таким образом, любой диаграмме, например, диаграмме, показанной на рис. 2, соответствует матрица

$$Q = \begin{vmatrix} t+4a & 0 & 0 & -a & -a & -a & -a \\ 0 & t+2a & 0 & -a & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & t+a & 0 & 0 & -a & 0 \\ -a & -a & 0 & d+2a & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 & d+a & 0 & 0 \\ -a & -a & -a & 0 & 0 & d+3a & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d+a \end{vmatrix}.$$

Матрица W , входящая в выражение /6/, строится путем окаймления матрицы Q одномерной коэффициентной матрицей a , элементы которой тоже связаны с конкретным видом диаграммы следующим образом: элемент матрицы a a_i ($1 \leq i \leq \eta$) равен числу точек на i -й горизонтальной линии, умноженному на $-a$, а элемент a_j ($n < j < n + m$) равен числу точек на j -й вертикальной линии, умноженному на a .

Поэтому матрица W , соответствующая диаграмме, показанной на рис. 1, имеет вид

$$W = \begin{vmatrix} t+a & 0 & -a & 0 & -a \\ 0 & t+a & 0 & -a & -a \\ -a & 0 & d+a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 & d+a & a \\ -a & -a & a & a & 2a \end{vmatrix}.$$

Здесь угловой элемент матрицы согласно /5/ соответствует скаляру C .

Таким образом, если известен вид диаграммы, то построение матриц Q и W не представляет трудности. Вычисление же детерминантов этих матриц в случае больших чисел конstituентов очень громоздко /то есть для диаграмм, содержащих большое число горизонтальных и вертикальных линий и представляющих соударения высших кратностей, матрицы Q и W могут иметь очень большие порядки/. Однако матрицу Q всегда можно представить в виде произведения двух квазитреугольных матриц. Поскольку матрица Q имеет блочную структуру:

$$Q = \begin{pmatrix} T & a \\ a^T & D \end{pmatrix},$$

то

$$Q = \begin{pmatrix} T & a \\ a^T & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ a^T & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T' \\ 0 & Y \end{pmatrix}, \quad /11/$$

где I - единичная матрица.

Для нахождения неизвестных блоков T и Y имеем системы матричных уравнений:

$$\begin{cases} a = TT' \\ p = a^T T' + pY \end{cases} \quad /12/$$

Отсюда

$$T' = T^{-1} a,$$

$$Y = -D^{-1} a^T T' + I,$$

где T^{-1} и D^{-1} - матрицы, обратные диагональным матрицам T и D . Они диагональные и их диагональные элементы обратны соответствующим элементам матриц T и D .

Таким образом, детерминант матрицы Q равен

$$\text{Det } Q = (t + n_1 a) \dots (t + n_n a) (t + n_1 a) \dots (t + n_n a) \text{Det } Y.$$

Отсюда видно, что необходимо найти только детерминант матрицы Y , порядок которой равен наименьшему из чисел m и n .

Точно таким же образом можно упростить вычисление детерминанта матрицы W . Заметим, что

$$W = \begin{pmatrix} T & a & aI \\ a^T & D & -aI \\ I^T a & -I^T a & -N^T a I \end{pmatrix},$$

где $I^T = (1, 1, \dots, 1)$.
Отсюда

$$\begin{aligned} \text{Det } W &= \text{Det} \begin{vmatrix} T & a & aI \\ a^T & D & -aI \\ I^T(a^T+T) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \text{Det} \begin{vmatrix} T & a & (a+T)I \\ a^T & D & 0 \\ I^T(a^T+T) & 0 & I^T(a+T)I \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Последний детерминант можно вычислить аналогично $\text{Det } Q$. Теперь рассмотрим использование вышеописанного алгоритма в некоторых частных случаях.

3. КОНКРЕТНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Пусть $B=1$, а A - произвольно. В этом случае необходимо вычислить члены амплитуды рассеяния, соответствующие диаграммам, показанным на рис.3. Очевидно, что для диаграмм, содержащих n точек,

$$\begin{aligned} \text{Det } Q(n) &= \left[-\frac{na^2}{t+a} + d + na \right] (t+a)^n, \\ \text{Det } W(n) &= \begin{vmatrix} -\frac{na^2}{t+a} & \frac{nat}{t+a} \\ \frac{nat}{t+a} & -\frac{nt^2}{t+a} + nt \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, амплитуда рассеяния

$$\begin{aligned} F_{1-A}^{el}(q) &= K_A(q) \frac{ip_0}{2\pi} \int \sum_{n=1}^A C_A^n \frac{1}{\text{Det } W(n)} \frac{d}{\pi} \left(\frac{t}{\pi}\right)^n \left(\frac{\tilde{\sigma} a}{2\pi}\right)^n \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{q^2}{4} \frac{|\text{Det } Q(n)|}{|\text{Det } W(n)|} \right\} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

/13/

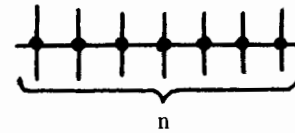


Рис.3

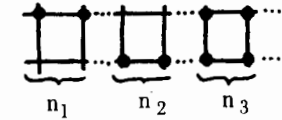


Рис.4

2. Пусть теперь $B=2$, а A - произвольно. В этом случае общий вид диаграммы можно представить в виде диаграммы рис.4. Следовательно, в этом случае

$$\begin{aligned} \text{Det } (n_1 n_2 n_3) &= (t+a)^{n_1+n_2} (t+2a)^{n_3} \times \\ &\times \begin{vmatrix} -\left[\frac{n_1 a^2}{t+a} + \frac{n_3 a^2}{t+2a} \right] & \left[\frac{n_3 a^2}{t+2a} \right] \\ \left[\frac{n_3 a^2}{t+2a} \right] & -\left[\frac{n_2 a^2}{t+a} + \frac{n_3 a^2}{t+2a} \right] + d + (n_2 + n_3) a \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{Det } W(n_1, n_2, n_3) = (t+a)^{n_1+n_2} (t+2a)^{n_3} \times$$

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{n_1 a^2}{t+a} + \frac{n_3 a^2}{t+2a} \right] + d + E_1 \left[\frac{n_3 a^2}{t+2a} \right] \left[\frac{n_1 at}{t+a} + \frac{n_3 at}{t+2a} \right] \\ - \left[\frac{n_3 a^2}{t+2a} \right] - \left[\frac{n_2 a^2}{t+a} + \frac{n_3 a^2}{t+2a} \right] + d + E_2 \left[\frac{n_2 at}{t+a} + \frac{n_3 at}{t+2a} \right] \\ \left[\frac{n_1 at}{t+a} + \frac{n_3 at}{t+2a} \right] \left[\frac{n_2 at}{t+a} + \frac{n_3 at}{t+2a} \right] - \left[\frac{n_1+n_2}{t+a} + \frac{n_3}{t+2a} \right] t^2 + d + E_3 \end{vmatrix},$$

где

$$E_1 = (n_1 + n_3) a; \quad E_2 = (n_2 + n_3) a; \quad E_3 = (n_1 + n_2 + n_3) t.$$

Зная $\text{Det } Q(n_1, n_2, n_3)$ и $\text{Det } W(n_1, n_2, n_3)$, нетрудно определить амплитуду рассеяния:

$$\begin{aligned} F_{2-A}^{el}(q) &= K_A(q) K_B(q) \frac{ip_0}{2\pi} \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^A C_A^{n_1+n_2+n_3} \frac{(n_1 + n_2 + n_3)!}{n_1! n_2! n_3!} \times \\ &(0 < n_1 + n_2 + n_3 \leq A) \end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \left(\frac{t}{\pi}\right)^{n_1+n_2+n_3} \left(\frac{\sigma \cdot a}{2\pi}\right)^{n_1+n_2+2n_3} \exp \left\{ -\frac{q^2}{4} \frac{|\text{Det } Q(n_1, n_2, n_3)|}{|\text{Det } W(n_1, n_2, n_3)|} \right\} \times$$

$$\times (-1)^{1+n_1+n_2+2n_3} \times \frac{\pi^{n_1+n_2+n_3}}{|\text{Det } W(n_1, n_2, n_3)|} \quad /14/$$

3. Общий вид диаграммы при $B=3$ и произвольном A дается на рис.5. Соответствующие детерминанты имеют следующий вид:

$$\text{Det } Q(n_1, n_2, \dots, n_7) = (t+a)^{n_1+n_2+n_3} (t+2a)^{n_1+n_2+2n_3} (t+3a)^{n_7} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} -\left[\frac{n_1 a^2}{t+a} + \frac{(n_5+n_6)a^2}{t+2a} + \frac{n_3 a^2}{t+3a}\right] + d + E_1 & -\left[\frac{n_5 a^2}{t+2a} + \frac{n_7 a^2}{t+3a}\right] & -\left[\frac{n_6 a^2}{t+2a} + \frac{n_7 a^2}{t+3a}\right] \\ \left[\frac{n_5 a^2}{t+2a} + \frac{n_7 a^2}{t+3a}\right] & -\left[\frac{n_2 a^2}{t+a} + \frac{(n_4+n_5)a^2}{t+2a} + \frac{n_7 a^2}{t+3a}\right] + d + E_2 & -\left[\frac{n_4 a^2}{t+2a} + \frac{n_7 a^2}{t+3a}\right] \\ -\left[\frac{n_6 a^2}{t+a} + \frac{n_7 a^2}{t+2a}\right] & -\left[\frac{n_4 a^2}{t+2a} + \frac{n_7 a^2}{t+3a}\right] & -\left[\frac{n_3 a^2}{t+a} + \frac{(n_4+n_6)a^2}{t+2a} + \frac{n_7 a^2}{t+3a}\right] + d + E_3 \end{vmatrix}$$

$\text{Det } W(n_1, n_2, \dots, n_7)$ - получается окаймлением $\text{Det } Q(n_1, n_2, \dots, n_7)$ элементами

$$C_{14} = \left[\frac{n_1 a t}{t+a} + \frac{(n_5+n_6) a t}{t+2a} + \frac{n_7 a t}{t+3a} \right],$$

$$C_{24} = \left[\frac{n_3 a t}{t+a} + \frac{(n_4+n_5) a t}{t+2a} + \frac{n_7 a t}{t+3a} \right],$$

$$C_{34} = \left[\frac{n_3 a t}{t+a} + \frac{(n_4+n_6) a t}{t+2a} + \frac{n_7 a t}{t+3a} \right],$$

$$C_{44} = \left[-\frac{n_1+n_2+n_3}{t+a} - \frac{(n_4+n_5+n_6)}{t+2a} + \frac{n_7}{t+3a} \right] t^2 + \sum_{i=1}^7 n_i t + d.$$

В этом случае амплитуда

$$F_{3-A}^{el}(q) = K_A(q) K_B(q) \sum_{n_1, \dots, n_7} C_A \frac{\pi^{n_1+\dots+n_7} (n_1+\dots+n_7)!}{n_1! n_2! \dots n_7!} \times$$

$$(0 < n_1 + \dots + n_7 \leq A)$$

$$\times \frac{\pi^{n_1+\dots+n_7+1}}{|\text{Det } W(n_1, \dots, n_7)|} \left(\frac{d}{\pi}\right)^3 \left(\frac{t}{\pi}\right)^{n_1+\dots+n_7} \left(\frac{\sigma \cdot a}{2\pi}\right)^{n_1+\dots+n_3+2(n_4+n_5+n_6)+3n_7} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{q^2}{4} \frac{|\text{Det } Q(n_1, \dots, n_7)|}{|\text{Det } W(n_1, \dots, n_7)|} \right\} \times$$

$$\times (-1)^{1+n_1+n_2+n_3+2(n_3+n_4+n_5)+3n_7} \quad /15/$$

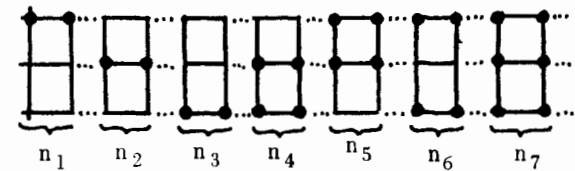


Рис.5

Аналогичным образом для любых значений A и B можно получить выражение для амплитуды рассеяния.

Выражения /13/-/15/ совпадают с выражениями, полученными в работе /3/. Но предложенный метод вычисления более нагляден и более универсален, что немаловажно для определения характеристик процессов, отличающихся от упругого рассеяния.

Я благодарен В.В.Ужинскому за ряд ценных замечаний и постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Glauber R.J. Lectures in Theoretical Physics (eds. W.E.Brittin et al). Interscience Publishers, Inc., New York, 1959, vol.1, p.315.
2. Ужинский В.В. ОИЯИ, P2-13054, Дубна, 1980.
3. Czyz W., Maximon L.C. Ann. of Phys., 1969, 52, p.59.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 января 1982 года.

Омбоо 3.

P2-82-73

Метод вычисления глауберовских амплитуд.

1. Упругое рассеяние

Излагается метод вычисления членов глауберовских рядов для амплитуд упругого рассеяния составных систем, одночастичные плотности которых так же, как и амплитуда упругого рассеяния конститuentов, заданы гауссианами. Метод эквивалентен ранее использовавшимся, но привлечение диаграмм рассеяния делает его более наглядным и универсальным. Привлечение понятия общей диаграммы рассеяния существенно упрощает процедуру вычисления. При этом детерминант, соответствующий различным членам ряда, уменьшается по крайней мере в два раза, если числа конститuentов сталкивающихся систем равны. А если числа их не равны, то порядок этой детерминанты равен меньшему из них.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Omboo Z.

P2-82-73

Glauber Amplitude Calculation Method.

1. Elastic Scattering

A method of calculating terms of Glauber series expansions for elastic scattering of composed system is presented. The one-particle densities of the system as well as the amplitude of elastic scattering of constituent are given by Gaussian functions. The method is equivalent with earlier used ones, but it is more universal due to using scattering diagrams. The inclusion of general scattering diagram simplifies essentially the calculation procedure. In this case a determinant corresponding to various members of the series decreases at least twice if numbers of constituents of scattered systems are equal. If these numbers are not equal, the determinant order is equal to the smallest one.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.