сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-82-44

В.Н.Стрельцов

О ПЛОТНОСТИ ТОКА ВЕРОЯТНОСТИ НЕЙТРАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1/2

1982

1. ВВЕДЕНИЕ

В рамках "классической" нерелятивистской квантовой механики, опирающейся на уравнение Шредингера, поведение частиц описывается комплексной /скалярной/ волновой функцией. Именно отмеченное свойство волновой функции позволяет ввести, например, оператор импульса в координатном представлении, являющийся мнимой величиной. Это же свойство существенно при определении понятий плотности вероятности и плотности тока вероятности.

При учете существования предельного перехода от релятивистской квантовой механики к нерелятивистской и, в частности, от уравнения Клейна-Гордона к уравнению Шредингера фактически полагается, что релятивистская волновая функция ψ является комплексной величиной. При этом комплексно-сопряженная волновая функция $\overset{*}{\psi}$ описывает поведение частиц с противоположным электрическим зарядом. В случае π°–, η°-мезонов и других электрически нейтральных /псевдо/ скалярных частиц с учетом сказанного будем иметь $\psi = \overset{*}{\psi}$, т.е. их поведение будет описываться реальной волновой функцией. Уравнение Клейна-Гордона, действительно, допускает такую возможность, поскольку не содержит мнимой единицы.

Следует отметить, что волновая функция фотона, каковой является электромагнитный потенциал A^{i}, также действительная величина. Аналогично реальной волновой функцией описываются и обладающие массой векторные частицы ω°–, ρ°-мезоны и т.д.

Возникает естественный вопрос: имеет ли место подобное положение в случае частиц со спином 1/2 и массой $m \neq 0$? Иными словами, если полагать, что переход от реальной волновой функции к комплексной связан с учетом заряда* /не только электрического/, то, скажем, при несохранении лептонного квантового числа действительные волновые функции могут описывать поведение массивного нейтрино.

Именно обсуждению особенностей описания поведения частиц со спином 1/2 с помощью действительной спинорной волновой функции** и будет посвящено следующее рассмотрение.

---

*Или магнитного момента.

**Т.е. четырех вещественных функций /вместо четырех комплексных или восьми вещественных функций/.

2. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА-МАЙОРАНЫ

Возьмем уравнение Дирака [1] в представлении Майораны [2] /уравнение Дирака-Майораны/:

$$(\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + m)\psi = 0, \qquad /1/$$

где $i = 0,1,2,3$, $\hbar = c = 1$, а

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \gamma^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad /2/$$

Переход от обычного уравнения Дирака к уравнению /1/ может быть осуществлен с помощью следующей простой замены волновых функций:

$$\psi^D_{1,4} = -\psi_{1,4} - i\psi_{4,1}, \quad \psi^D_{2,3} = -\psi_{3,2} + i\psi_{2,3}. \qquad /3/$$

При этом требование действительности майорановских волновых функций приводит к равенствам

$$\psi_4^D = i\psi_1^{*D}, \quad \psi_3^D = -i\psi_2^{*D}. \qquad /4/$$

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси y. В этом случае система уравнений /1/ распадается на две пары в соответствии с существованием двух линейно-независимых решений. Подставляя, например,

$$\psi_1 = u_1 \cos(k^0x^0 - k^2x^2), \quad \psi_4 = u_4 \sin(k^0x^0 - k^2x^2) \qquad /5/$$

в первое и четвертое уравнение, получим

$$mu_1 - (k^0 - k^2)u_4 = 0,$$
$$-(k^0 + k^2)u_1 + mu_4 = 0. \qquad /6/$$

Условие существования нетривиального решения этой системы, как и обычно, дает

$$m^2 - [(k^0)^2 - (k^2)^2] = 0. \qquad /7/$$

Полагая $k^2 = 0$, $u_1 = u_4 = u$ и

$$\psi_2 = v \sin k^0x^0, \quad \psi_3 = v \cos k^0x^0, \qquad /8/$$

легко найдем

$$(m - k^0)u = 0, \quad (k^0 + m)v = 0,$$
$$(-k^0 + m)u = 0, \quad (k^0 + m)v = 0. \qquad /9/$$

Отсюда заключаем, что ψ_1 и ψ_4 описывают решения с положительной, а ψ_2 и ψ_3 - с отрицательной энергиями. Этот результат является прямым следствием линейности уравнения Дирака, учитывающего таким же образом знак /направление/ импульса, чем отличается $\psi_1(\psi_2)$ и $\psi_4(\psi_3)$. Поэтому в рассматриваемом случае спин должен быть направлен по импульсу или против него.

В заключение этого параграфа отметим, что, как и для бозонов, вследствие вещественной волновой функции здесь возникают те же трудности, связанные с введением операторов типа $\hat{\vec{p}} = i\nabla$.

3. 4-ВЕКТОР ПЛОТНОСТИ ТОКА ВЕРОЯТНОСТИ

В рассматриваемом представлении /2/ для плотности тока вероятности

$$j^k = \tilde{\psi}\gamma^k\psi, \qquad /10/$$

где $\tilde{\psi} = \psi^{tr}\gamma^0$, будем иметь

$$j^0 = \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 + \psi_4^2,$$
$$j^1 = -2(\psi_1\psi_4 + \psi_2\psi_3),$$
$$j^2 = \psi_2^2 - \psi_1^2 + \psi_4^2 - \psi_3^2, \qquad /10a/$$
$$j^3 = 2(\psi_3\psi_4 - \psi_1\psi_2).$$

Отметим, что соответствующий аксиальный вектор $j^k_A = \tilde{\psi}\gamma^k\gamma^5\psi = 0$. Используя /10а/, вычислим квадрат 4-вектора плотности тока вероятности. При этом оказывается, что

$$j^k j_k = 0.^{*} \qquad /11/$$

Но это означает, что j^k - световой вектор, т.е. описываемая им плотность вероятности должна распространяться со скоростью света. В частности, для $\psi_1 = \cos k^0x^0$, $\psi_4 = \sin k^0x^0$, $\psi_2 = \psi_3 = 0$, где, очевидно, $\psi \neq \psi(x,y)$, получим, что

$$j^0 = 1, \quad j^1 = \cos 2k^0x^0, \quad j^2 = \sin 2k^0x^0,$$

т.е. имеет место поток плотности вероятности в направлениях осей x и y. Если связывать с j^k некоторый волновой пакет, то

---

* Тогда как для комплексной ψ $j^k j_k \neq 0$.

означает ли /11/, что частица массы m может перемещаться со скоростью c ?

Полученный результат отличается от того, который имеет место в релятивистской электродинамике для плотностей электрических зарядов и тока при условии

$$\mathrm{rot}_{ki}\, j = 0 \qquad /12/$$

/"отсутствия вихревых токов"/. В этом случае, привлекая уравнение непрерывности

$$\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0, \qquad /13/$$

будем иметь волновое уравнение для компонент j^k. Однако здесь, казалось бы, можно говорить о том, что не сами заряды, а только плотности зарядов /токов/ меняются со световой скоростью.

Следует отметить, что аналогичный результат /11/ для комплексной дираковской волновой функции мы будем иметь при условии $m=0$. Тогда система распадается на две пары одинаковых /с учетом $\psi_1 = \psi_3$ и $\psi_2 = \psi_4$ / уравнений. Но здесь трудности не возникает, поскольку масса $m=0$.

Таким образом, если в случае $m=0$ частицы со спином 1/2, действительно, могут быть описаны реальной спинорной /четырехкомпонентной/ волновой функцией /или двухкомпонентной комплексной функцией/, то при $m \neq 0$ возникает трудность. Конечно, она не возникает, если только массивное нейтрино обладает магнитным моментом или сохраняется лептонный заряд.

Однако мы хотим обратить внимание на то, что отмеченная трудность может быть связана с выбором 4-вектора плотности тока вероятности в форме /10/. Казалось бы, этого можно избежать, если задать j^{k}* с помощью выражения

$$j_k^{k\Gamma} = \frac{1}{2m}\left(\tilde{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x^k}\psi\right), \qquad /14/$$

соответствующего определению плотности тока вероятности частиц, описываемых уравнением Клейна-Гордона. Впрочем, при этом все равно остается открытым вопрос: какой физический смысл имеет величина, определяемая формулой /10/?

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реальные волновые функции служат в рамках квантовой механики для описания поведения нейтральных частиц. Однако их использование вызывает определенные трудности, связанные с введением дифференциальных операторов и определения понятия плотности вероятности и ее потока.

В случае частиц со спином 1/2 использование действительных волновых функций имеет свои особенности. В частности, дираковский 4-вектор тока вероятности оказывается "световым вектором". Переход к другому возможному выражению для j^k не устраняет указанной трудности.

---

*В связи с существованием неоднозначности в определении j_k для частиц со спином 1/2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P.A.M. Proc.Roy.Soc., 1928, A117, p.810.
2. Majorana E. Nuovo Cim., 1937, 14, p.171.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 января 1982 года.

Стрельцов В.Н. P2-82-44

О плотности тока вероятности нейтральных частиц со спином 1/2

Отмечаются особенности использования для описания нейтральных частиц в рамках квантовой механики действительных волновых функций. В частности, на основе представления Майораны рассмотрены решения уравнения Дирака в виде плоских волн и дираковский 4-вектор тока вероятности j^k. Показано, что в обсуждаемом случае j^k /для частиц с массой $m \neq 0$ / является "световым вектором" $j^k j_k = 0$.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Strel'tsov V.N. P2-82-44

On Probability Current Density for Neutral Particles with 1/2 Spin

Some specific properties of using real wave functions to describe neutral particles within the quantum mechanics framework are described. In particular basing on the Majorana representation solutions of Dirac's equation as plane waves and Dirac's 4-vector probability current j^k are considered. It is shown that in the case under discussion j^k (for particles with $m \neq 0$ mass) is "light vector" $j^k j_k = 0$.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.