ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Б 3-9-6984

ДЕПОНИРОВАННАЯ ПУБЛИКАЦИЯ

Дубна 1973

ОБЪЕДИНЁННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Отдел новых методов ускорения

Ю.Л.Обухов

СООБРАЖЕНИЯ,КАСАЮЩИЕСЯ ВЫВОДА УРАВНЕНИЙ ЛИУВИЛЛЯ

(Обзор некоторых работ)

г.Дубна,1973 год.

В физической литературе большое значение имеют уравнения Лиувилля. Эти уравнения широко используются при выводе кинематических уравнений для различных функций распределения, при рассмотрении вопросов устойчивости движения различных систем, в вопросах связанных с изменением фазового объёма, а также для обоснования различных статистических теорий. Для примера, достаточно сказать, что цепочка Н.Н.Боголюбова (так называемая иерархия ВВСКУ), которая легла в основу целого ряда наиболее строгих статистических теорий, начинается с написания уравнений Лиувилля.

В связи с вышесказанным, представляется не лишним напомнить некоторые рассуждения, касающиеся вывода самих уравнений Лиувилля, поскольку во многих задачах, связанных с коллективным методом ускорения приходится использовать кинетические уравнения в той или иной форме, а также широко использовать понятие фазового объёма.

Не претендуя на целиком оригинальное сообщение*), используем нужные нам для дальнейшего рассуждения и результаты из соответствующих работ, сделав необходимые в данном случае оговорки.

Как известно, состояние механической системы, имеющей n степеней свободы в нерелятивистском классическом случае , представляют точкой в $2n$ мерном фазовом пространстве Γ , где $n=3N$, N - число частиц в системе. Координатами точки в Γ пространстве являются координаты векторов поло-

---

*) Только список работ, опирающихся на цепочку Н.Н.Боголюбова превышает размеры данной заметки.

жения частиц $\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N$ и соответствующие компоненты импульсов $\vec{p}_1 \ldots \vec{p}_N$. С течением времени фазовая точка будет перемещаться согласно уравнениям движения, написанным для координат и импульсов. Иными словами, в случае гамильтоновых систем это будут уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

где q_i - обобщенные координаты; p_i - обобщенные импульсы. Поскольку уравнения Гамильтона являются уравнениями первого порядка по времени, то ясно, что задавая соответствующие начальные условия, мы, в принципе, должны получить единственное решение уравнений движения и определить единственную фазовую траекторию изображающей точки в Γ пространстве для данного начального условия. Заметим далее, что физический интерес представляют, как правило, непрерывные решения уравнений движения. Динамическое поведение системы, таким образом, определяется как некая непрерывная траектория в фазовом пространстве .

Отсюда мы можем сделать следующее важное заключение: /1,2/ Поскольку уравнения движения однозначно определяют траекторию отображающей точки для любой начальной фазы, то через каждую точку фазового пространства Γ проходит не более одной фазовой траектории.

Действительно, исходя из вышесказанного и воспользовавшись непрерывностью решения, мы можем рассматривать каждую точку фазового пространства как начальную, а отсюда нетрудно получить и единственность траектории.

Для того чтобы сократить объём некоторых необходимых тов $t_0 = const$ и $t = const$ как отображение пространства Γ на себя, а совокупность всех фазовых точек $X_i = f_i(X_{(0)1}, \ldots t_0, t)$ при фиксированных начальных значениях $X_{(0)i}$ и t_0 (где $i = 1, 2, \ldots 2n$) и $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$ образует фазовую траекторию с начальной фазой.

Введем временно следующую сокращенную запись

$$X_{t_0} = (X_{(0)1}, X_{(0)2}, \ldots X_{(0)2n})$$
$$X = (X_1, X_2, \ldots X_{2n}) \tag{4}$$

Тогда преобразование от t_0 к моменту t можно записать в виде:

$$X = f(X_{t_0} t_0 t) \tag{5}$$

Поскольку рассматриваемое преобразование непрерывно, то обратное отображение будет

$$X_{t_0} = f(X t t_0) \tag{6}$$

В соответствующих работах показано, что преобразования фазового пространства в себя, рассмотренные выше образуют однопараметрическую непрерывную группу преобразований /1/,/6/.

Предыдущие рассуждения нам были необходимы для того, чтобы логично ввести понятие Якобиана преобразования от начальной фазовой точки X_{t_0} к конечной X. Ограничимся пока рассмотрением Евклидового фазового пространства и определим Якобиан преобразования следующим образом:

$$\Delta(X_{t_0}, t_0, t) \equiv \det \left| \frac{\partial f_i(X_{t_0} t_0 t)}{\partial X_{0j}} \right| \tag{7}$$

Простым вычислением доказывается следующая формула:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t} = \Delta\cdot\sum_{k=1}^{2n}\frac{\partial F_k\{f(X_{t_0}t_0t),t\}}{\partial X_k} = \Delta\,\mathrm{Div}\,\vec{F} \qquad (8)$$

ж)

где вектор $\vec{F}$ имеет компоненты F_i ,а дивергенция определена как сумма производных $F_{kk} = \frac{\partial F_k}{\partial X_k}$.

Поскольку для начальных условий будет

$$\Delta(X_{t_0}t_0t) = \det\left|\frac{\partial X_{,i}}{\partial X_{0j}}\right| = 1 \qquad (9)$$

то можно написать и соответствующую интегральную формулу определяющую сам Якобиан.

$$\Delta(X_{t_0}t_0t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{2n}F_{kk}\left\{f(X_{t_0}t_0t), t'\right\}dt'\right. \qquad (10)$$

для всех величин от X_{t_0}, t_0, t . На языке дивергенции эта же формула будет иметь такой вид:

$$\Delta(X_{t_0}, t_0, t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t}\mathrm{Div}\,\vec{F}\,dt'\right] \qquad (10a)$$

Продолжая наше формальное рассмотрение,мы вспоминаем, что нас интересует не одна частица,а система частиц, т.е. нас интересует преобразование некоторой совокупности решений уравнений движения.

Рассмотрим некоторую фазовую точку X_{t_0} и рассмотрим окрестность этой точки.

ж) Эта формула была получена самим Лиувиллем /7/.

Фазовое пространство, определенное выше, по сути дела, является точечным множеством, так как оно определено как совокупность всех возможных решений уравнений движения (1) или как совокупность всех возможных обобщенных координат и импульсов. Следовательно, рассматривая окрестность какой либо фазовой точки мы должны указать как определить, например, объём произвольной системы точек. Точнее, мы должны определить меру в заданном пространстве. В математике показывается, что во всяком случае в нерелятивистской классической статистике таковой служит мера Лебега, /1/,/3/,/5/,/8/. Существует, однако известная теорема, которая устанавливает, что всякая измеримая по Риману система измерима и по Лебегу, и в данном случае обе меры совпадают (обратное неверно). Если не рассматривать исключений, то можно поступать так как общепринято в физике /9/. Можно просто определить фазовый объём, как обыкновенный геометрический; это и будет мерой в фазовом пространстве Γ. Поскольку рассматриваемое фазовое пространство Евклидово, то мы можем написать выражение для элементарного объёма в окрестности точки X_{t_0}

$$\delta V_0 = \prod_{j=1}^{2n} \delta X_{(0)j} \tag{11}$$

Рассмотрим теперь, что будет с тем же объемом в момент t. Каждая точка, которая попала в элементарный объём δV_0 будет преобразовываться согласно решениям (5). Пользуясь непрерывностью решений во времени и предполагая, что ни одна точка не исчезает, мы можем написать /10/

$$\delta V = \prod_{j=1}^{2n} \delta x_j =$$

$$= \Delta(x_{t_0} t_0 t) \prod_{j=1}^{2n} \delta x_{(0)j} = \Delta(x_{t_0} t_0 t)\, \delta V_0 \tag{12}$$

Аналогичное заключение можно сделать и относительно границы C_0 ,которая ограничивает данную группу частиц в некоторый момент t_0 и преобразуется в границу C в момент t ,которая ограничивает ту же самую группу частиц /2/.

Обращаясь к конечному объему в фазовом пространстве напишем интеграл (интеграл в смысле Пуанкаре /10/,/11/,/12/)

$$V(t) = \int_{C_t} \delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_{2n} \tag{13}$$

или согласно (12):

$$V(t) = \int_{C_0} \Delta(x_{t_0} t_0 t)\, \delta x_{(0)1}\, \delta x_{(0)2} \ldots \delta x_{(0)2n} \tag{14}$$

Полагая,что граница C_0 не зависит от t напишем

$$\frac{dV}{dt} = \int_{C_0} \frac{d\Delta}{dt}\, \delta x_{(0)1},\, \delta x_{(0)2} \ldots \delta x_{(0)2n} \tag{15}$$

или согласно (8)

$$\frac{dV}{dt} = \int_{C_0} \Delta\, \mathrm{Div}\, \vec{F}\, \delta V_0 = \int_{C_0} \Delta \sum_{K=1}^{2n} F_{KK}\, \delta V_0 \tag{16}$$

Отсюда,как следствие может быть сформулирована теорема <u>Лиувилля:</u>

Если $\sum_{K=1}^{2n} F_{KK}(xt) = 0$,то якобиан $\Delta(x_{t_0} t_0 t) = 1$ и фазовый объём,ограничивающий данную систему частиц сохраняется (сохраняется мера Лебега для всех подсистем L_0 из R^{2n}) для всех величин t_0 и t .

В частности,можно сказать,что фазовое отображение является "сохраняющим меру" для всех гамильтоновых систем /3/ , /11/,/13/.

Нетрудно видеть,если воспользоваться формулой (10), что в случае когда $\sum_{k=1}^{2n} F_{kk}(x\,t) \geqslant \alpha$ для всех X и $t \geqslant t_0$, то будет:

$$\Delta(X_{t_0} t_0 t) \geqslant e^{\alpha(t-t_0)} \quad \text{при } t \geqslant t_0 \qquad (17)$$

Аналогично,пусть: $\sum_{k=1}^{2n} F_{kk}(x\,t) \leqslant \beta$ для всех X и $t \geqslant t_0$,то

$$0 \leqslant \Delta(X_{t_0} t_0 t) \leqslant e^{\beta(t-t_0)} \quad \text{при } t \geqslant t_0 \qquad (18)$$

В случае указанном в теореме Лиувилля формула (16) будет:

$$\frac{dV}{dt} = \int_{C_0} \mathrm{Div}\,\vec{F}\,\delta V_0 = 0 \qquad (19)$$

Таким образом,объём фазового пространства,заключающий данную систему частиц,является интегральным инвариантом движения. Объём фазового пространства это только один из интегральных инвариантов Пуанкаре /12/,/14/,подобные интегральные инварианты доказываются и для подпространства пространства меньшего числа измерений,а также и для подсистем системы частиц. Примерами подобных интегральных инвариантов могут служить энергетические поверхности в фазовом пространстве.

Энергетические поверхности постоянной энергии $\mathcal{H}(q_i, p_i) = E = const$ являются инвариантными областями фазового пространства и преобразуются в себя при движении фазового пространства. В частности, для изолированной системы частиц, ограниченного объёма в физическом пространстве, энергетическая поверхность является замкнутой гиперповерхностью, которая замыкает односвязную область (в $2n$ мерном пространстве это будет $(2n-1)$ мерная поверхность). В процессе движения системы частиц энергетическая поверхность как то изменяется. Так например, сфера может превратиться в очень сложную поверхность /1/,/14/, хотя фазовый объём, который она отсекает остается постоянным.

В связи с этим возникает вопрос об интегрировании в фазовом пространстве. Доказывается следующая теорема.

Пусть S_0 некоторая начальная гиперповерхность в фазовом пространстве Γ, пусть $\Delta(X_{t_0} t_0 t)$ -якобиан фазового отображения $f(X_{t_0} t_0 t)$ и пусть в момент t мы знаем фазовое отображение $S = f(S_0 t_0 t)$. Рассмотрим функцию $\varphi(X)$ интегрируемую на S. Можно показать, что $\varphi\{f(X_{t_0} t_0 t)\}$ интегрируема на S_0 и выполняется следующее соотношение

$$\int_S \varphi(x)\, d\Omega = \int_{S_0} \varphi\{f(X_{t_0} t_0 t)\}\Delta(X_{t_0} t_0 t)\, d\Omega_0 \qquad (20)$$

где $d\Omega$ элемент гиперповерхности.

В частности, для отображений, сохраняющих меру будет

$$\int_S \varphi(x)\, d\Omega = \int_{S_0} \varphi\{f(X_{t_0} t_0 t)\}\, d\Omega_0 \qquad (21)$$

В случае, когда функция $\varphi(x)$ задана в объёме мы можем переформулировать (20) в форме

$$\int_V \varphi(x)\,dV = \int_{V_0} \varphi\left\{ f(X_{t_0} t_0 t)\right\} \Delta(X_{t_0} t_0 t)\,dV_0 \tag{22}$$

(Эту теорему в математике формулируют на языке Лебеговских подсистем /3/). Как следствие этих соотношений мы получаем закон преобразования для целого ряда функций в фазовом пространстве.

До сих пор предполагалось, что начальная фазовая точка X_{t_0} данной механической системы известна и находится в определенной области V_0 фазового пространства Γ. В действительности, если мы имеем дело с очень большим числом частиц и хотим знать поведение отдельной частицы, то положение фазовой точки, мы должны определить с некоторой вероятностью. Таким образом, мы приходим с необходимостью к понятию статистического ансамбля, введенного Гиббсом. Статистический ансамбль вводится как множество совершенно одинаковых (в смысле уравнений движения) невзаимодействующих механических систем с начальными значениями X_{t_0}, которые являются случайными величинами.

Обычно считается:

а) что все вероятности для X_{t_0} не отрицательные функции. Кроме того, считается;

б) что вероятность найти точку X_{t_0} в какой либо точке всего Γ пространства равна единице;

Полагают в) что вероятности для начальных значений составляют абсолютно непрерывную систему функций.

Наконец считается, г) что вероятность найти фазовую точку на траектории равна вероятности для начальной точки. Иными словами,если частица не пропадает и не рождается,то вероятность найти её в точке $X' = f(X_{t_0}, t_0, t)$ равна вероятности найти её в точке X_{t_0} .

Используя вышесказанное,мы можем ввести понятие плотности вероятности в каждой точке,т.е. можно ввести не отрицательную функцию точки $w_0(X_{t_0})$,которая определена для всех точек из Γ (исключения здесь не рассматриваются),интегрируема на Γ и для которой можно написать вероятность:

$$P_0(V_0) = \int_{V_0} w_0(X_{t_0})\, dV_0' \tag{23}$$

где V_0 некоторая область фазового пространства,где задана вероятность найти начальную точку X_{t_0} . Следовательно,для всего Γ пространства будет:

$$\int_{\Gamma} w_0(X_{t_0})\, dV_0' = 1 \tag{24}$$

Таким образом,вся совокупность фазовых точек движущаяся в Γ пространстве представляется как жидкость,обладающая в любой точке этого пространства определенной плотностью w .

Линии тока этой жидкости идентичны траекториям частиц /3/ По определению w это плотность вероятности того,что система находится в некоторой бесконечно малой области dV фазового пространства Γ и удовлетворяет условию нормировки (24).

Заметим,кстати,что w является симметричной функцией относительно фазовых координат отдельных частиц,если все рассматриваемые частицы тождественны.

Можно показать,что плотность вероятности $w(xt)$ для движущейся фазовой точки со временем t дается следующей формулой

$$w(xt) = \frac{w_0\{f(xtt_0)\}}{\Delta\{f(xtt_0),t_0,t\}} \tag{25}$$

здесь $w_0(x_{t_0})$ означает плотность распределения начальной вероятности,а $\Delta(x_{t_0}t_0t)$ - якобиан фазового отображения $x=f(x_{t_0}t_0t)$ Доказательство проводится почти мгновенно,если вспомнить (22) и,что вероятность найти точку на траектории равна начальной. Тогда

$$\int\limits_V w(xt)\,dV = \int\limits_{V_0} w(x_{t_0})\,dV_0 \tag{26}$$

или

$$\int\limits_{V_0} w\{f(x_{t_0}t_0t),t\}\,\Delta(x_{t_0}t_0t)\,dV_0 = \int\limits_{V_0} w(x_{t_0})\,dV_0$$

откуда получается (25).

Как следствие уравнения (25) нетрудно получить уравнение непрерывности для плотности вероятности. Во многих работах это уравнение фигурирует в качестве исходного. Однако,можно сформулировать точные условия /3/,когда для плотности вероятности существует дифференциальное уравнение,в виде следующего предложения. Пусть начальная плотность вероятности $w_0(x_{t_0})$ допускает производные по $x_{(0)1}, x_{(0)2}, \ldots x_{(0)2n}$,которые являются непрерывными функциями x_{t_0} . Далее,пусть правые части $F_i(xt)$ $(i=1,2\ldots 2n)$ уравнений движения $\dot{x}_i = F_i(xt)$ допускают вторые производные по $x_1, x_2 \ldots x_{2n}$,которые являются непрерывными функциями (Xt) .

Тогда плотность вероятности $w(Xt)$ двигающейся фазовой точки X в момент t допускает производные по $X_1, X_2 .. X_{2n}, t$,которые являются непрерывными функциями(Xt) и $w(Xt)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial X_i}(w F_i) = 0 \tag{27}$$

Доказательство следует из существования и непрерывности производных $w(Xt)$прямым дифференцированием уравнения (25) по t .

Частным видом уравнений непрерывности (27) являются уравнения,получившие название уравнений Лиувилля. В частности,для Гамильтоновых систем с уравнениями движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{28}$$

плотность вероятности удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{\partial w}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial w}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial w}{\partial t} + [wH] = 0 \tag{29}$$

где квадратная скобка означает скобку Пуассона. В этом случае можно сформулировать и обратное предложение,доказательство которого приводится в работах /3/,/5/.

Больше того,для механической системы с гамильтоновыми уравнениями движения плотность вероятности $w(Xt)$ для фазовой точки X в пространстве Γ является инвариантом движения (точнее: инварианта по отношению к фазовому потоку f)

$$w(xt) \equiv w_0\{f(x,t,t_0)\} \tag{30}$$

что показывается из теоремы Лиувилля, если вспомнить, что в этом случае якобиан $\Delta(x_{t_0} t_0 t) = 1$.

Это означает, что совокупность фазовых точек движется в пространстве подобно несжимаемой жидкости, обладающей в любой точке фазового пространства инвариантной плотностью $w(xt) = inv$. Фазовый объём некоторой выделенной области будет сохраняться, хотя ограничивающая его поверхность должна, в принципе, деформироваться.

Возвращаясь к конкретному рассмотрению поведения негамильтоновых систем, необходимо, прежде всего, заметить, что наиболее последовательный материал, на русском языке, касающийся эволюции нелагранжевых систем содержится в работах И.П.Павлоцкого. К сожалению, в этих работах ряд известных из математики теорем выводится заново. Аналогичные рассмотрения уравнений непрерывности для негамильтоновых систем были проведены в работах /1/,/17/.

Рассмотрим некоторую систему с квазиканоническими уравнениями движения:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i(pq\dot{p}t) \tag{31}$$

Показано, что в случае, когда $\sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \neq 0$ система (31) не может быть приведена к гамильтоновой никаким преопределением H . Во всех остальных случаях система приводится к гамильтоновой /18/.

Заметим здесь, что вышеприведенное утверждение вызывает некоторые сомнения, поскольку имеется исключение /19/ для случая, когда $Q_i = \alpha p_i$. В этом случае удается искусственным приемом свести систему (31) к Гамильтоновой форме.

Итак, пусть нам задана негамильтонова система уравнений движения (31) для системы частиц. Плотность вероятности в этом случае будет $w = w(p_1 \dots p_{3N}, q_1 \dots q_{3N}, t)$, эта функция предполагается нормированной на единицу:

$$\int_\Gamma w(pqt) \prod_{i=1}^{3N} dp_i \, dq_i = 1 \tag{32}$$

Вспоминая уравнение непрерывности (27) и расписывая аналогично (29) напишем:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{dp_i}{dt} \frac{\partial w}{\partial p_i} + \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) = - \sum_{i=1}^{3N} w \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \tag{33}$$

Запишем это еще так:

$$\frac{dw}{dt} = - \sum_{i=1}^{3N} w \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \tag{34}$$

т.е. плотность вероятности в этом случае меняется вдоль фазовой траектории. Непосредственно интегрируя (34) вдоль траектории найдем

$$w = w_0 \exp \left[- \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} dt' \right] \tag{35}$$

Обращаясь к формуле (25) мы видим, что якобиан преобразования в данном случае будет

$$\Delta = \exp \left[\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} dt' \right] \tag{36}$$

Согласно (16) и (8) напишем для фазового объёма

$$\frac{dV}{dt} = \int\limits_{V_0} \Delta \cdot \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \prod_{j=1}^{3N} dp_{(0)j}\, dq_{(0)j} \qquad (37)$$

Отсюда нетрудно получить формулу аналогичную (14) для самого фазового объема в момент t :

$$V = \int\limits_{V_0} \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} dt'\right] \prod_{j=1}^{3N} dp_{(0)j}\, dq_{(0)j} \qquad (38)$$

В таком виде эта формула фигурирует в работах /2/,/16/, /17/ .

Из полученной формулы мы видим,что фазовый объём системы частиц будет уменьшаться или увеличиваться со временем в зависимости от знака суммарной производной $\frac{\partial Q_i}{\partial p_i}$ (обобщенной дивергенции негамильтоновых сил). В частности,нужно например,различать два случая; случай систем теряющих энергию и случай систем приобретающих энергию.

Для систем теряющих энергию (например:излучение) будет

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial |Q_i|}{\partial p_i} \qquad (39)$$

и изменение объема

$$\frac{dV}{dt} = -\int_{V_0} \Delta \cdot \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial |Q_i|}{\partial p_i}\, dV_0 \qquad (40)$$

следовательно,фазовый объём уменьшается. Для систем приобретающих энергию (например:ударное ускорение)

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} = \frac{\partial |Q_i|}{\partial p_i} > 0 \qquad (41)$$

получаем увеличение фазового обьёма. Уместно сделать следующее замечание:хотя,приведенные выше,заключения относятся ко всему $6N$ мерному фазовому пространству,можно показать, что они верны и для редуцированного шестимерного пространства где рассматривается одночастичная функция распределения. В этом случае все выводы,разумеется,относятся к процессам связанным с одной частицей,а не к плотности систем частиц.

12 XII 72 Обухов

ЛИТЕРАТУРА

1. J E Farquhar „Ergodic theory in statistical mechanics" Inters. Pub com (New York 1964г)

2. А.Лихтенберг "Динамика частиц в фазовом пространстве" Атомиздат 1972 год.

3. R Kurth „Axiomatics of classical statistical mechanics" Pergamon Press (Oxford 1960г)

4. В.В.Степанов "Курс обыкновенных дифференциальных уравнений".

5. В.В.Немыцкий,В.В.Степанов "Качественная теория дифференциальных уравнений".

6. R Hakim Journal of Math Phys v 8 №6

7. J Liouville Journ de math pures et appl 3, 342 (1838г) (ссылка взята из работы /10/).

8. А.И.Хинчин "Математические основы статистической механики" Труды Инст. им. Стеклова (1946г.).

9. Л.Д.Ландау,Е.Л.Лифшиц "Статистическая физика". (1957г.)

10. J Frontenau „Le theoreme de Liouville et le probleme general de la stabilite" (Geneve 1965г)

11. Ш.Пуанкаре "Избранные труды" (небесная механика). Академкнига (1971г.).

12. Э.Картан "Интегральные инварианты" (1940г.).

13. Э.Гурса "Курс математического анализа" т.2 (1940г.)

14. Дж.Уленбек и Дж.Форд "Лекции по статистической механике". Изд. "Мир" (1965г.).

15. И.П.Павлоцкий "Проблемы статистической механики нелагранжевых систем". Препринт ИПМ 1 (1969г.).

16. И.П.Павлоцкий. Rev Roumaine de Math pures et appl T XIV N8 (1969г)

17. S Guiaşu Aplicatii ale teoriei informatiei (1968г) (ссылка взята из работы /16/).

18. И.П.Павлоцкий ДАН том 182 1 4 (1968г.).

19. P Caldirola Nuovo Cimento vol XLVI B N2 (1966г)