сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

5-82-69

П.Е.Жидков

О СУЩЕСТВОВАНИИ В $\mathbf{R}^n$ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1982

В работе изучается следующее уравнение:

$$u - \Delta u = f(x,u), \qquad x \in R^n, \quad n \geq 2 \tag{I}$$

с граничными условиями

$$u\big|_{|x| \to \infty} = 0. \tag{2}$$

К задаче (I)-(2) приводят многие проблемы физики (см. /I,2/).

Существует большое количество работ, посвященных задаче (I)-(2) в ограниченной области /6,7/, а также если область - R^n, но функция f не зависит от x (или зависит лишь от $|x|$ и u). Во втором случае рассматривались лишь радиально-симметричные решения вида $u = u(|x|)$ (см. /3-5/).

В данной работе указанные ограничения на функцию f не налагаются.

В первом параграфе доказывается существование положительного решения задачи (I)-(2). При этом предполагается, что $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x,u) = 0$ равномерно по любому отрезку $u \in [a,b]$, $a \geq 0$.
Остальные предположения относительно f мало отличаются от случая ограниченной области.

В § 2 приводится пример, в котором $f(x,u) = K(x) \cdot f_1(u)$, $k(x)$- гладкая функция, $0 < a^2 \leq K(x) \leq b^2$, $f_1(u) = u^3$, но решения задача (I)-(2) не имеет.

§ I. Существования положительного решения

Пусть выполняются следующие условия при $u \geq 0$:

(а) $f(x,u) > 0$ для $(x,u) \in R^3 \times (0,\infty)$;

(б) $f(x,u)$ непрерывно удовлетворяет условию Гельдера по x, дифференцируема по u.

(в) $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x,u)=0$ равномерно по любому отрезку $0<u\leq a$;

(г) $f(x,u)=o(|u|)$ при $u\to 0$ равномерно по $x\in R^n$;

(д) функция $f(x,u)\cdot u^{-(1+\sigma)}$ $(\sigma>0)$ монотонно возрастает при $u>0$, $f(x,u)\cdot u^{-(1+\sigma)}\to\infty$ при $u\to+\infty$ равномерно по любому компакту $K\in R^3$; $f'_u(x,u)$ возрастает по u при любом фиксированном x;

(е) пусть $F(x,u)=\int_0^u f(x,t)dt$, тогда $F(x,u)\leq\theta f(x,u)\cdot u$, где $\theta\in(0,\frac{1}{2})$;

(ж) $f(x,u)\leq a_1+a_2\cdot u^s$, где $a_1,a_2>0$, $s\in(1,\frac{n+2}{n-2})$ при $n\geq 3$, $f(x,u)\leq a_3 e^{\varphi(u)}$, где $\varphi(u)\cdot u^{-2}\to 0$ при $u\to+\infty$, если $n=2$;

(з) $|f'_u(x,u)|\leq a_4 f(x,u)\cdot u^{-1}$.

Теорема. Пусть $n\geq 2$, выполняются условия (а)-(з). Тогда существует положительное решение задачи (I)-(2).

Доказательство. Доопределим функцию f нечетно для $u<0$.

Рассмотрим функционал

$$I(u)=\int_{R^n}\left\{\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n u^2_{x_i}+u^2\right)-F(x,u)\right\}dx\,, \qquad (3)$$

определенный для $u\in W_2^1(R^n)$ (см. /7/). Функционал слабо дифференцируем на $W_2^1(R^n)$ (см. /7/).

Критические точки этого функционала являются обобщенными решениями уравнения (I) (см. /7/).

Пусть S – единичная сфера в пространстве $W_2^1(R^n)$. Рассмотрим $I(\tau\cdot v)$, где $\tau\in R^1$, $v\in S$. Ясно, что множество критических ненулевых точек функционала $I(u)$ содержится в множестве Q точек вида $\tau\cdot v$, где $v\in S$, $\tau\neq 0$ определяется из уравнения $I'_\tau(\tau v)=0$, рассматриваемого для каждого фиксированного $v\in S$. Подробнее это уравнение выглядит так:

$$\int_{R^n}\left\{\tau\cdot\left(\sum_{i=1}^n v^2_{x_i}+v^2\right)-v\cdot F'_u(x,\tau v)\right\}dx=0. \qquad (4)$$

Из условия (г) вытекает, что $v\cdot F'_u(x,\tau v)=v\cdot f(x,\tau v)=o(\tau)$ при $\tau\to 0$. Из условия (д) следует, что $\int_{R^n} v\cdot f(x,\tau v)dx$ растет по τ не медленнее $\tau^{1+\sigma}$ при $\tau\to\infty$, $\int_{R^n} v\cdot f(x,\tau v)dx>0$ (в силу нечетности f по второму аргументу). Отсюда вытекает, что найдется $\tau(v)>0$ такое, что $I'_\tau(\tau(v)\cdot v)=0$, причем такое $\tau(v)$ единственно.

Нетрудно заметить, что в силу второй части условий (д) и (з) производная

$$\frac{d}{d\tau}\int_{R^n} v\cdot f(x,\tau\cdot v)dx$$

существует, положительна и возрастает при $\tau>0$.

Поэтому

$$\frac{d}{d\tau}\int_{R^n}\left\{\tau\cdot\left(\sum_{i=1}^n v^2_{x_i}+v^2\right)-v\cdot f(x,\tau v)\right\}dx\Big|_{\tau=\tau(v)}\neq 0,$$

следовательно, по теореме о неявной функции, $\tau=\tau(v)$ – гладкая функция аргумента $v\in S$. В работе /7/ также показано, что

$$\tau(v)\geq\tau_0, \qquad (5)$$

где $\tau_0>0$ не зависит от v.

Умножив (4) на $\tau(v)$, получаем:

$$\|u\|^2_{W_2^1(R^n)}=\int_{R^n} f(x,u)\cdot u\,dx, \qquad (6)$$

где $u(x)=\tau\cdot v(x)$, $\|u\|^2_{W_2^1(R^n)}=\int_{R^n}\left(u^2+\sum_{i=1}^n u^2_{x_i}\right)dx$.

Таким образом, любая критическая точка функционала $I(u)$ должна удовлетворять равенству (6).

Из (5) следует:

$$\|u\|^2_{W_2^1(R^n)}\geq\tau_0^2 \qquad (7)$$

для всех $u\in Q$.

Рассмотрим задачу минимизации функционала $I(u)$ на множестве Q. Ввиду условий (е) и (7) имеем

$$I(u)\geq\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\|u\|^2_{W_2^1(R^n)}\geq\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\tau_0>0 \qquad (8)$$

для всех $u\in Q$.

Пусть Ω_n – монотонно возрастающая последовательность шаров, исчерпывающая все пространство:

$$\Omega_m\subset\Omega_{m+1}\,,\quad \bigcup_{m=1}^{\infty}\Omega_m=R^n.$$

Рассмотрим на каждом шаре Ω_m задачу минимизации функционала

$$I_m(u)=\int_{\Omega_m}\left\{\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2+u^2\right)-\bar F(x,u)\right\}dx$$

на множестве Q_n функций $u\neq 0$, удовлетворяющих равенству

$$\|u\|^2_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}=\int_{\Omega_m}\bar f(x,u)\cdot u\,dx, \tag{9}$$

где $\bar f(x,u)=f(x,u)$ при $u>0$, $\bar f(x,u)=0$ при $u<0$, $\bar F(x,u)=\int_0^u \bar f(x,t)\,dt.$

<u>Лемма I</u>. Минимум функционала $I_m(u)$ на множестве Q_m достигается на некоторой функции $u_m\in Q_m$. Функция u_m является классическим решением задачи

$$u_m-\Delta u_m=\bar f(x,u_m),\quad x\in\Omega_m \tag{1_m}$$

$$u_m\big|_{\partial\Omega_m}=0\quad, \tag{2m}$$

причем $u_m(x)\geq 0$.

<u>Доказательство</u>. Возьмем произвольную минимизирующую последовательность $\{u_m^k\}_{k=1,2,\dots}$

В силу (e) и (9)

$$\|u_m^k\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}\leq C_n\quad, \tag{I0}$$

где $C_n=\mathrm{const}>0.$

Поэтому последовательность $\{u_m^k\}_{k=1,2,\dots}$ слабо компактна в $\mathring{W}^1_2(\Omega_m)$ и сильно компактна в $L_{s+1}(\Omega_m)$.

Далее, так же, как в /7/, можно доказать оценку

$$\|u_m^k\|^2_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}=\left|\int_{\Omega_m}u_m^k\cdot\bar f(x,u_m^k(x)\,dx\right|\geq b_m>0.$$

Поэтому некоторая подпоследовательность последовательности $\{u_m^k\}$ (будем считать, что это сама последовательность) сходится слабо в $\mathring{W}^1_2(\Omega_m)$ и сильно в $L_{s+1}(\Omega_m)$($s>0$ – произвольное, если $n=2$) к некоторой функции $u_m\neq 0$.

При этом (см./7/) $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\Omega_m}u_m^k\,\bar f(x,u_m^k)\,dx=$

$$=\int_{\Omega_m}u_m\bar f(x,u_m)dx,\quad \lim_{k\to\infty}\int_{\Omega_m}\bar F(x,u_m^k)\,dx=\int_{\Omega_m}\bar F(x,u_m)\,dx.$$

Ввиду слабой полунепрерывности снизу величины $\|u\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}$ (см./7/)

$$\|u_m\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}\leq\lim_{k\to\infty}\|u_m^k\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}.$$

Не ограничивая общности рассуждений, будем считать:

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\|u_m^k\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}=\lim_{k\to\infty}\|u_m^k\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}.$$

Предположим, что $\|u_m\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}=\alpha\lim\limits_{k\to\infty}\|u_m^k\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}$, где $0<\alpha<1$.

Рассмотрим

$$I_m\left(\tau\frac{u_m}{\|u_m\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}}\right)=\frac{1}{2}\tau^2-\int_{\Omega_m}\bar F\left(x,\frac{\tau u_m}{\|u_m\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\tau^2-\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega_m}\bar F\left(x,\frac{\tau u_m^k}{\|u_m\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\tau^2-\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega_m}\bar F\left(x,\frac{\tau u_m^k}{\alpha\|u_m^k\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}}\right)dx=$$

$$=\lim_{k\to\infty}I_m\left(\tau\cdot\frac{u_m^k}{\|u_m^k\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}}\right)-\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega_m}\left\{\bar F\left(x,\frac{\tau u_m}{\alpha\|u_m^k\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega_m)}}\right)-\right.$$

$$-\bar{F}\left(x, \frac{\tau u_m}{\|u_m^k\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega_m)}}\right)\Bigg\} dx < I_m\left(\tau \cdot \frac{u_m^k}{\|u_m^k\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega_m)}}\right)$$

для достаточно больших номеров K , $\tau > 0$.
Но тогда

$$\max_{\tau>0} I_m\left(\tau \cdot \frac{u_m}{\|u_m^k\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega_m)}}\right) = I_m\left(\tau_0 \frac{u_m}{\|u_m\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega_m)}}\right) <$$

$$< I_m\left(\tau_0 \frac{u_m^k}{\|u_m^k\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega_m)}}\right) = \max_{\tau>0} I_m\left(\tau \cdot \frac{u_m^k}{\|u_m^k\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega_m)}}\right)$$

для достаточно больших номеров K , и мы получаем противоречие с тем, что $\{u_m^k\}$ – минимизирующая последовательность.

Итак, $\|u_m\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega_m)} = \lim\limits_{K\to\infty} \|u_m^k\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega_m)}$

и

$$I_m(u_m) = \min_{u \in Q_m} I(u)$$

Используем теорему 2.2 из /8/. Пусть функционал f , дифференцируемый на банаховом пространстве X , такой, что уравнение $f'_\tau(\tau \vartheta) = 0$ при любом $\vartheta \in S$ – единичной сфере в пространстве X – имеет решение $\tau = \tau(\vartheta)$ класс $C^1(S)$.

Тогда каждой условно стационарной точке $\vartheta_c \in S$ с $\tau_c = \tau(\vartheta_c) \neq 0$ функционала $f(\tau(\vartheta)\cdot\vartheta)$, рассматриваемого на единичной сфере S , соответствует стационарная точка $u_c = \tau_c \cdot \vartheta_c$ исходного функционала f.

Из этой теоремы вытекает, что u_m – критическая точка функционала $I_m(u)$ на всем пространстве $\mathring{W}_2^1(\Omega_m)$.

Далее, так же , как в /7/, u_m – классическое решение задачи (1_m)–(2_m) . В силу принципа максимума $u_m(x) \geq 0$ в Ω_m .

<u>Лемма I доказана</u>.

Как нетрудно заметить, $Q_m \subset Q_{m+1}$ для всех номеров m , поэтому

$$I(u_m) \geq I(u_{m+1}). \tag{II}$$

Поэтому последовательность $\{u_m\}$ слабо компактна в $W_2^1(R^n)$ и сильно компактна в $L_{s+1}(\Omega)$, где Ω – любое компактное подмножество R^n. Доопределим нулем каждую функцию u_m вне Ω_m.

Из последовательности $\{u_m\}$ можно выделить последовательность, слабо сходящуюся в $W_2^1(R^n)$ и сильно сходящуюся в $L_{s+1}(\Omega_{m'})$ для любого номера m'. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что этим свойством обладает сама последовательность $\{u_m\}$ и пусть u – ее предел.

Зафиксируем произвольный номер m' и пусть $\varphi \in \mathring{W}_2^1(\Omega_{m'})$, $\varphi = 0$ вне $\Omega_{m'}$.

Сделаем предельный переход в тождестве

$$\int_{\Omega_{m''}} \left\{\sum_{i=1}^n u_{m x_i}\varphi_{x_i} + u_m\cdot\varphi - f(x,u_m)\cdot\varphi\right\} dx = 0 ,$$

которое справедливо для всех $m'' \geq m'$, поскольку при $m'' \geq m'$, $\varphi(x) = 0$ при $x \in R^n \setminus \Omega_{m''}$, при $m'' \to \infty$.
Получим:

$$\int_{\Omega_m} \left\{\sum_{i=1}^n u_{x_i}\varphi_{x_i} + u\cdot\varphi - f(x,u)\cdot\varphi\right\} dx = 0.$$

Таким образом, u – обобщенное решение уравнения (I) в Ω_m , $m = 1, 2, \ldots$. Далее, как и раньше, u – классическое решение уравнения (I) в R^n . Остается доказать, что $u \neq 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} u = 0$.

На основании теоремы I3.I из /9/ величины $u_m(x)$ равномерно по m и x ограничены. Обозначим через x_m точку глобального максимума функции $u_m(x)$. На основании принципа максимума

$$u_m(x_m) - f(x_m, u_m(x_m)) \leq 0.$$

На основании условий (в) и (г) теоремы, для любого $a > 0$ найдется шар O такой, что $u - f(x,u) > 0$ для всех $u \in [0,a]$, $x \bar{\in} O$. Положим $a = \sup\limits_{m,x} u_m(x) + 1$. Получаем, что $x_m \in O$ для всех номеров m . На основании теоремы I5.I из /9/ в области $u \geq \frac{u_0}{2} > 0$, где u_0 – минимальное положительное такое, что существует $x \in R^n$: $u_0 = f(x, u_0)$, величины

$|\nabla u_m(x)|$ равномерно по m и x ограничены. Следовательно, существует $A>0$ такое, что

$$\| u_m \|_{L_{s+1}(0)} \geqslant A$$

для всех $m=1,2,\ldots$.

Следовательно, $u \neq 0$.

Докажем еще, что $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)=0$. Предположим противное. Тогда существуют $u_1>0$ и последовательность $x_k \to \infty$ такие, что $u(x_k)>u_1$. Как и выше, величины $|\nabla u(x)|$ ограничены в области $u(x)>\frac{u_1}{2}$.

Поэтому получаем $\| u \|_{W_2^1(R^n)} = +\infty$, что противоречиво.

Теорема I доказана.

Замечание. Теорема I справедлива, например, для случая $f(x,u)=K(x)\cdot u^3$, где $K(x)\in C^2(R^n)$, $\lim\limits_{x\to\infty} K(x)=0$

§ 2. В этом параграфе будет приведен пример функции f вида $f(x,u)=K(x)\cdot u^3$, где $0<a^2\leq K(x)\leq b^2$, $K(x)\in C^1(R^3)$, но задача (I)-(2) не имеет решения.

Положим $K(x)=P(x_3)$, где $P(x_3)$ - произвольная гладкая монотонно возрастающая функция,

$$\lim_{x_3\to-\infty} P(x_3)=P_1>0 , \quad \lim_{x_3\to+\infty} P(x_3)=P_2 , \quad P'(x_3)>0$$

для всех $x_3\in R^1$.

Предположим, что задача (I)-(2) имеет решение для такой функции f . Обозначим его $u_0(x)$.

Лемма 3

$$|u_0(x)|\leq C_1\cdot e^{-\frac{|x|}{2}}, \quad |u_{0x_i}(x)|\leq C_2\cdot e^{-\frac{|x|}{2}} ,$$

$$|u_{0x_ix_j}(x)|\leq C_3\cdot e^{-\frac{|x|}{2}} , \quad i,j=1,2,3 , \quad C_1,C_2,C_3>0$$

Доказательство

В силу (2) найдется $R>0$ такое, что

$$d(x)=(1-P(x_3)\cdot u_0^2(x))>\frac{1}{2} \quad \text{при} \quad |x|\geq R .$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta v=\frac{1}{2}v , \qquad |x|>R$$
$$v(x)\Big|_{|x|=R}=d_1>\max_{|x|=R}|u_0(x)| , \quad v(x)\Big|_{|x|=+\infty}=0 . \tag{I9}$$

Докажем, что $v(x)\geq u_0(x)$ для всех $x: |x|>R$. Предположим противное. Тогда найдется $x_0: |x_0|>R$ такое, что $u_0(x_0)-v(x_0)=\max\limits_{|x|\geq R}[u_0(x)-v(x)]>0$.

Для разности u_0-v получаем:

$$\Delta(u_0-v)\Big|_{x=x_0}=d(x_0)\,u_0(x_0)-\frac{1}{2}v(x_0)>0 ,$$

что противоречит условию $\frac{\partial^2(u_0-v)(x_0)}{\partial x_i^2}\leq 0$, $i=\overline{1,3}$.

Поэтому $u_0(x)\leq v(x)$ (20)

для $|x|\geq R$.

Аналогично получаем

$$u_0(x)\geq -v(x) \tag{2I}$$

для $|x|\geq R$.

Неравенства (20) и (2I) с учетом того, что $v(x)=C_1\cdot\frac{e^{-\frac{|x|}{2}}}{|x|}$, дают неравенство

$$|u_0(x)|\leq C_1\cdot\frac{e^{-\frac{|x|}{2}}}{|x|} \tag{22}$$

для $|x|\geq R$.

Увеличивая, если это необходимо, C_1 , получим первое неравенство леммы 3 во всем пространстве R^3.

Ввиду быстрого убывания $u_0(x)$ при $|x|\to\infty$ так же, как для случая ограниченной области,

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_i}=\int_{R^3}\frac{\partial G(x,y)}{\partial x_i}P(y_3)\,u_0^3(y)\,dy , \tag{23}$$

где $G(x,y)=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}$ - функция Грина

$$\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\right|\leq\int_{R^3}\left|\frac{\partial G(x,y)}{\partial x_i}\cdot P(y_3)\cdot u_0^3(y)\right|dy\leq$$

$$\leq \frac{C_1 P_2}{4\pi} \int_{R^3} \left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)\cdot \frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}\cdot\frac{|x_i-y_i|}{|x-y|}\cdot e^{-\frac{3}{2}|y|}dy \leq$$

$$\leq \frac{C_1 P_2}{4\pi}\, e^{-\frac{2}{3}|x|}\cdot\int_{R^3} e^{-\frac{1}{3}|x-y|}\cdot\left(\frac{1}{|x-y|^2}+\frac{1}{|x-y|}\right)dy \quad . \tag{24}$$

Отсюда получаем неравенство леммы 3 для производных $\left|\frac{\partial u_o(x)}{\partial x_i}\right|$.

Оценим вторые производные функции u_o.

Положим $\frac{\partial u_o(x)}{\partial x_i} = V_1 + V_2$, где

$$V_2 = \int_{R^3-T_\rho} \frac{\partial G(x,y)}{\partial x_i} p(y_3)\cdot u_o^3(y)\,dy\ ,\quad V_1 = \int_{T_\rho}\frac{\partial G(x,y)}{\partial x_i} p(y_3)\, u_o^3(y)\,dy ,$$

где T_ρ – шар радиуса ρ с центром в точке x.

Тогда, как легко убедиться, для $\frac{\partial V_2}{\partial x_j}$ $(j=\overline{1,3})$ справедливы оценки, аналогичные оценкам (24) , причем все подынтегральные функции в этих оценках ограничены.

Дифференцируемость V_1 доказывается так же, как это делается для ограниченной области (см. /10/). Преобразуем теперь V_1 по формуле Остроградского:

$$V_1 = +\int_{T_\rho}\frac{\partial G(x,y)}{\partial x_i}\, p(y_3)\, u_o^3(y)\,dy =$$

$$= -\int_{T_\rho}\left\{\frac{\partial[G(x,y)p(y_3)u_o^3(y)]}{\partial y_i} - G(x,y)\frac{\partial[p(y_3)u_o^3(y)]}{\partial y_i}\right\}dy =$$

$$= -\int_{\Sigma_\rho} G(x,y)\, p(y_3)\, u_o^3(y)\cos\alpha\, dy + \int_{T_\rho} G(x,y)\frac{\partial[p(y_3)u_o^3(y)]}{\partial y_i}\,dy .$$

Здесь Σ_ρ – поверхность шара T_ρ , α – угол между внешней нормалью к T_ρ и осью Ox_i.

Асимптотика второго слагаемого здесь при $|x|\to\infty$ исследуется так же, как для $\left|\frac{\partial u_o(x)}{\partial x_i}\right|$; при этом используются полученные оценки для $|u_o(x)|$ и $\left|\frac{\partial u_o(x)}{\partial x_i}\right|$.

Рассмотрим первое слагаемое.

$$\left|\int_{\Sigma_\rho}\frac{\partial}{\partial x_j} G(x,y)\, p(y_3)\, u_o^3(y)\cos\alpha\, dy\right| \leq$$

$$\leq \int_{\Sigma_\rho} e^{-|x-y|}\left(\frac{1}{|x-y|}+\frac{1}{|x-y|^2}\right)\cdot\frac{|x_j-y_j|}{|x-y|}\cdot|u_o^3(y)|\cdot|\cos\alpha|\,dy \leq$$

$$\leq C_1\cdot\int_{\Sigma_\rho} e^{-|x-y|-\frac{3}{2}|y|}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}\right)dy \leq$$

$$\leq C_1\cdot e^{-\frac{2}{3}|x|}\cdot\int_{\Sigma_\rho} e^{-\frac{1}{3}|x-y|}\cdot\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}\right)dy \leq C_3'\cdot e^{-\frac{|x|}{2}} .$$

<u>Лемма 3 доказана</u>.

<u>Следствие</u>. Любое решение u_o задачи (1)-(2) принадлежит $W_2^1(R^3)$ и, следовательно, определен функционал $I(u_o)$.

Рассмотрим функции $u_h = u_o(x_1, x_2, x_3 - h)\cdot\tau(h)$, $h>0, \tau(h)$ выбирается из условия $u_h \in Q$.

Лемма 4 $\|U_h - U_0\|_{W_2^1(R^3)} = O(h)$ при $h \to 0$.

Доказательство. Положим $\bar{U}_h = U_0(x_1, x_2, x_3 - h)$.

$$\|\bar{U}_h - U_0\|^2_{W_2^1(R^3)} = \int_{R^3} \left\{ \left[\bar{U}_h(x) - U_0(x)\right]^2 + \sum_{i=1}^{3} \left[\bar{U}'_{hx_i}(x) - U'_{0x_i}(x)\right]^2 \right\} dx$$

$$= h^2 \cdot \int_{R^3} \left[U'^2_{0x_3}(y(x)) + \sum_{i=1}^{3} U''^2_{0x_ix_3}(z_i(x)) \right] dx,$$

где $y(x), z_i(x) \in (x, x+h), i = \overline{1,3}$ (была использована теорема Лагранжа).

Из леммы 3 вытекает, что интеграл в правой части (25) равномерно (по h) ограничен, следовательно,

$$\|\bar{U}_h - U_0\|_{W_2^1(R^3)} = O(h) \tag{26}$$

Рассмотрим

$$\left| \int_{R^3} P(x_3)\left[\bar{U}_h^4 - U_0^4(x)\right] dx \right| = \left| \int_{R^3} \left[P(x_3+h) - P(x_3)\right] U_0^4(x)\, dx \right| \leq$$

$$\leq C_4 \cdot h \cdot \int_{R^3} U_0^4(x)\, dx, \tag{27}$$

где $C_4 = \max\limits_{x_3 \in R^1} |P'(x_3)| > 0$.

Из (27):

$$\tau(h) = \left\{ \frac{\int_{R^3} U_0^4(x) \cdot P(x_3)\, dx}{\int_{R^3} \bar{U}_h^4(x) \cdot P(x_3)\, dx} \right\}^{1/2} = 1 - C_5 \cdot h + o(h), \tag{28}$$

где $C_5 > 0$.

Из (26) и (28) получаем:

$$\|U_h - U_0\|_{W_2^1(R^3)} = \|U_h - \bar{U}_h + \bar{U}_h - U_0\|_{W_2^1(R^3)} \leq$$

$$\leq \|U_h - \bar{U}_h\|_{W_2^1(R^3)} + \|\bar{U}_h - U_0\|_{W_2^1(R^3)} =$$

$$= C_5 \cdot h \cdot \|\bar{U}_h\|_{W_2^1(R^3)} + O(h) = O(h). \tag{29}$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5 $\tau(h) \leq 1 - \bar{c} \cdot h$, где $\bar{c} > 0$ для всех достаточно малых $h > 0$.

Доказательство.

Рассмотрим

$$\int_{R^3} P(x_3)\, \bar{U}_h^4(x)\, dx - \int_{R^3} P(x_3)\, U_0^4(x)\, dx = \int_{R^3} \left[P(x_3+h) - P(x_3)\right] U_0^4(x)\, dx =$$

$$= h \cdot \int_{R^3} P'(t(x_3))\, U_0^4(x)\, dx,$$

где $t(x_3) \in (x_3, x_3 + h)$.

Найдется такой параллелепипед $\Pi \in R^3$, что в нем

$U_0^4(x) \geq a_1 > 0$, $P'(x_3) \geq b_1 > 0$.

Тогда

$$\int_{R^3} P(x_3)\, \bar{U}_h^4(x)\, dx - \int_{R^3} P(x_3)\, U_0^4(x)\, dx \geq h \cdot \int_{\Pi} P'(t(x_3)) \cdot U_0^4(x)\, dx \geq C_7 \cdot h, \tag{31}$$

где $C_7 > 0$.

$$\tau(h) = \left\{ \frac{\int_{R^3} p(x_3)\, \bar{u}_h^4(x)\, dx}{\int_{R^3} p(x_3)\, u_0^4(x)\, dx} \right\}^{1/2}, \quad \text{отсюда}$$

$$\tau(h) \le (1 - C_7 \cdot h)^{1/2} \le 1 - \frac{C_7}{3} \cdot h$$

для достаточно малых $h > 0$.

__Лемма 5 доказана__.

Рассмотрим $I(u)$ при $u \in Q$.

$$I(u) = \int_{R^3} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} u^2_{x_i}(x) + \frac{1}{2} u^2(x) - \frac{1}{4} p(x_3)\, u^4(x) \right\} dx = \frac{1}{4} \| u \|^2_{W_2^1(R^3)}. \tag{32}$$

__Лемма 6__ $|I(u_h) - I(u_0)| \ge \bar{\bar{c}} \cdot h$, где $\bar{c} > 0$,

$|h| \le h_0$, $h_0 > 0$.

__Доказательство__. В силу (32) леммы 4

$$|I(u_h) - I(u_0)| = \left| \|u_h\|^2_{W_2^1(R^3)} - \|u_0\|^2_{W_2^1(R^3)} \right| =$$

$$= |\tau(h) - 1| \cdot \|u_0\|^2_{W_2^1(R^3)} \ge \bar{c} \cdot h \cdot \|u_0\|^2_{W_2^1(R^3)} = \bar{\bar{c}} \cdot h,$$

и лемма 6 доказана.

Из лемм 4 и 6 следует, что

$$\lim_{h \to +0} \frac{I(u_h) - I(u_0)}{\|u_h - u_0\|_{W_2^1(R^3)}} > 0,$$

следовательно, u_0 не является стационарной точкой функционала $I(u)$ и, следовательно, задача (I)-(2) не имеет нетривиальных решений.

Пример § 2 показывает, что известные результаты о существовании решений в ограниченных областях $\mathcal{Y}$ уравнений данного типа /6,7/ не переносятся, вообще говоря, на неограниченные области.

Литература

1. Makhankov V.G. Phys. Reports, 35, 1, 1978.
2. Faddeev L.D., Korepin V.E. Phys. Reports, 42, 1, 1978.
3. Nehari Z., Proc. Royal Arish. Acad., 1963, No.9, A62, 118-135.
4. Жилков Е.П., Жилков П.Е. ОИЯИ, Р5-I2609, Р5-I26I0, Дубна, I979.
5. Strauss W. Commun. in math. phys.,1977, No.55, c. 149-162.
6. Ambrosetti A., Rabinowitz P.H. J. of functional analysis, 1973, No.4, vol. 14.
7. Rabinowitz P.H. Indiana Univ. Math. 1974, vol. 23, c. 729-754.
8. Похожаев С.И. ДАН, СССР, I979, №6, т.247, с.I327-I33I.
9. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. "Наука", М., I973.
10. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. "ИЛ", М., I957.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 января I982 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Жидков Е.П.

5-82-69

О существовании в R^n положительного решения задачи Дирихле для одного нелинейного эллиптического уравнения

Изучаются вопросы существования решения нелинейного эллиптического уравнения $u-\Delta u=f(x,u)$, $x\in R^n$, $n\geq 2$. Полученные результаты обобщают известные теоремы о существовании решения для случая ограниченной области. Показано, что условия существования решения в ограниченной области и условие $\lim_{|x|\to\infty} f(x,u)=0$ равномерно по любому конечному интервалу (a,b) изменения u обеспечивают существование положительного решения задачи. Приведен пример, показывающий, что достаточных условий существования решения в ограниченной области недостаточно, если область неограничена.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Zhidkov P.E.

5-82-69

On the Existence in R^n of Positive Solution of Derechlet Problem for One Nonlinear Elliptic Equation

Some problems of the existence of the solution of nonlinear elliptic equation $u-\Delta u=f(x,u)$ are studied. The results generalize the known theorems about the existence of a solution for the case of bounded domain. It is proved that the conditions needed for the solution in the bounded domain to exist and the condition $\lim_{|x|\to\infty} f(x,u)=0$ uniformly by any finite interval (a,b) for u endure the existence of the positive solution of the problem. An example is given which shows that the conditions for a solution in the bounded domain to exist are not sufficient for unbounded domain.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.