сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

5-82-67

П.Е.Жидков

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛИ ЛИНДНЕР -ФЕДЯНИНА

1982

В данной работе изучается вопрос о существовании солитоноподобных решений для одной системы двух нелинейных дифференциальных уравнений, возникающей в физике элементарных частиц /1-4/:

$$
\begin{aligned}
& i \tilde{u}_t - a_u \tilde{u} - \Delta \tilde{u} - \tilde{u}\left(|\tilde{u}|^2 - \beta(x)\cdot|\tilde{v}|^2\right) = 0, \\
& i \tilde{v}_t + a_v \tilde{v} + \Delta \tilde{v} - \tilde{v}\left(|\tilde{v}|^2 - \beta(x)\cdot|\tilde{u}|^2\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{I}
$$

Подстановка $\tilde{u}(x,t) = u(\xi)\cdot e^{\{i(\omega_u t - \frac{c}{2}x)\}}$, $\tilde{v}(x,t) = v(\xi)\, e^{\{i(\frac{c}{2}x - \omega_v t)\}}$,

где $\xi = x - ct$,

дает стационарную задачу:

$$
\begin{aligned}
& \Delta u + (\omega_u + a_u) u + u\left(|u|^2 - \beta(x)|v|^2\right) = 0, \\
& \Delta v + (\omega_v + a_v) v + v\left(|v|^2 - \beta(x)|u|^2\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$.

В дальнейшем будем считать $\beta(x)$, ω_u, a_u, ω_v, a_v вещественными, $\beta(x) > 0$, функции $u(x)$ и $v(x)$ также будем считать вещественными.

Ограничиваясь рассмотрением сферически-симметричных решений системы уравнений (2), получаем:

$$
\begin{aligned}
& u_{tt} + \frac{n-1}{t} u_t + (\omega_u + a_u) u + \left(|u|^2 - \beta(t)|v|^2\right) u = 0, \\
& v_{tt} + \frac{n-1}{t} v_t + (\omega_v + a_v) v + \left(|v|^2 - \beta(t)|u|^2\right) v = 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь $t = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Кроме того,

$$
u_t(0) = 0, \quad v_t(0) = 0. \tag{4}
$$

Из физических соображений краевые условия на бесконечности

$$u\big|_{t=+\infty} = v\big|_{t=+\infty} = 0. \tag{5}$$

Введем еще обозначения

$$-(\omega_u + a_u) = \alpha_u \quad , \quad -(\omega_v + a_v) = \alpha_v \; .$$

В случае $n=1$, $\beta \equiv 1$ известны точные решения задачи (3)-(5) (см. /4/).

В настоящей работе изучается случай $n=3$. Будем считать в дальнейшем $\alpha_u > 0$, $\alpha_v > 0$. Положим $y(t) = t\cdot u(t)$, $z(t) = t\cdot v(t)$, получим:

$$\begin{aligned} y_{tt} &= \alpha_u y - \frac{y^2 - \beta(t) z^2}{t^2}\, y \\ z_{tt} &= \alpha_v z - \frac{z^2 - \beta(t)\cdot y^2}{t^2}\, z \; , \end{aligned} \tag{6}$$

$$y(0) = z(0) = 0 \; , \tag{7}$$

$$y(+\infty) = z(+\infty) = 0 \; . \tag{8}$$

Условие (8) следует из того факта, что если $(u(t), v(t))$ – решение задачи (3)-(5), то $u(t) = O(e^{-\sqrt{\alpha_u} t})$, $v(t) = O(e^{-\sqrt{\alpha_v} t})$ при $t \to +\infty$ (см. теорему 8 на с.64 из /5/).

Система уравнений (6) является системой уравнений Эйлера для функционала

$$\mathcal{H} = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2}\left(y_t^2 + \alpha_u y^2 + z_t^2 + \alpha_v z^2 + \beta(t)\frac{y^2 z^2}{t^2}\right) - \frac{y^4 + z^4}{4t^2} \right\} dt \; .$$

Рассмотрим функционал $\mathcal{H}$ на функциях вида $y(t) = a\cdot y_0(t)$, $z(t) = b\cdot z_0(t)$, где

$$y_0 \in S_u \quad , \quad z_0 \in S_v \quad , \text{ где}$$

$$S_u = \{ p(t) \mid p \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\infty) \, , \ \|p\|_u = 1 \} \, ,$$

$$S_v = \{ p(t) \mid p \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\infty) \, , \ \|p\|_v = 1 \} \, ,$$

$$\|p\|_u^2 = \int_0^\infty \{ p'^2(t) + \alpha_u p^2(t) \} \, dt \; ,$$

$$\|p\|_v^2 = \int_0^\infty \{ p'^2(t) + \alpha_v p^2(t) \} \, dt \; .$$

Тогда условия $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} = 0$ и $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial b} = 0$ являются необходимыми условиями того, что $\{y, z\}$ – критическая точка функционала $\mathcal{H}$. Отсюда получаем нормировочные условия для $y(t)$ и $z(t)$

$$\begin{aligned} \|y\|_z^2 &= \int_0^\infty \frac{y^4}{t^2}\, dt, \\ \|z\|_y^2 &= \int_0^\infty \frac{z^4}{t^2}\, dt \; . \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь

$$\|y\|_z^2 = \|y\|_u^2 + \int_0^\infty \beta(t) \frac{y^2(t)\, z^2(t)}{t^2}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty (y_t'^2 + \alpha_u y^2)\, dt + \int_0^\infty \beta(t) \frac{y^2(t)\, z^2(t)}{t^2}\, dt \; ,$$

$$\|z\|_y^2 = \|z\|_v^2 + \int_0^\infty \beta(t) \frac{y^2(t)\, z^2(t)}{t^2}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty (z_t'^2 + \alpha_v z^2)\, dt + \int_0^\infty \beta(t) \frac{y^2(t)\, z^2(t)}{t^2}\, dt \; .$$

<u>Лемма I</u>. Пусть $0 \le \beta(t) \le 1$ для всех $t \geqslant 0$. Тогда для любых $y_0 \in S_u$, $z_0 \in S_v$ таких, что $y_0^2 \ne c\, z_0^2$, $c = \mathrm{const} > 0$ (как элементы пространства $L_2(0,\infty)$), существуют единственные $a > 0$, $b > 0$ такие, что $y(t) = a\, y_0(t)$, $z(t) = b\cdot z_0(t)$ удовлетворяют нормировочным условиям (9). При этом $a = a(y_0, z_0)$, $b = b(y_0, z_0)$ являются гладкими функционалами на множестве $S_u \times S_v$ для всех $(y_0, z_0) \in S_u \times S_v$ таких, что $y_0^2 \ne c z_0^2$ для любого $c > 0$.

Если для некоторого $c > 0$ $y_0^2 = c\, z_0^2$, то либо не существует $a > 0$, $b > 0$ таких, что функции $a y_0$, $b z_0$ удовлетворяют условиям (9), либо такие $a > 0$, $b > 0$ единственные и гладкие функции y_0, z_0.

<u>Доказательство</u>. Зафиксируем произвольные $y_0 \in S_u$, $z_0 \in S_v$. Пусть сначала $y_0^2 \ne c\, z_0^2$ для всех $c > 0$. Для функций $a\cdot y_0$, $b\cdot z_0$ условия (9) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} 1 + b^2 \int_0^\infty \beta(t)\cdot \frac{y_0^2(t)\cdot z_0^2(t)}{t^2}\, dt &= a^2 \int_0^\infty \frac{y_0^4(t)}{t^2}\, dt, \\ 1 + a^2 \int_0^\infty \beta(t) \frac{y_0^2(t)\cdot z_0^2(t)}{t^2}\, dt &= b^2 \int_0^\infty \frac{z_0^4(t)}{t^2}\, dt \; . \end{aligned} \tag{10}$$

Из физических соображений краевые условия на бесконечности

$$u\Big|_{t=+\infty} = v\Big|_{t=+\infty} = 0. \qquad (5)$$

Введем еще обозначения

$$-(\omega_u + a_u) = \alpha_u \quad , \quad -(\omega_v + a_v) = \alpha_v \ .$$

В случае $n=1$, $\beta \equiv 1$ известны точные решения задачи (3)-(5) (см. /4/).

В настоящей работе изучается случай $n=3$. Будем считать в дальнейшем $\alpha_u > 0$, $\alpha_v > 0$. Положим $y(t) = t \cdot u(t)$, $z(t) = t \cdot v(t)$, получим:

$$y_{tt} = \alpha_u y - \frac{y^2 - \beta(t) z^2}{t^2} y$$
$$z_{tt} = \alpha_v z - \frac{z^2 - \beta(t) \cdot y^2}{t^2} z \ , \qquad (6)$$

$$y(0) = z(0) = 0 \ , \qquad (7)$$

$$y(+\infty) = z(+\infty) = 0 \ . \qquad (8)$$

Условие (8) следует из того факта, что если $(u(t), v(t))$ – решение задачи (3)-(5), то $u(t) = O(e^{-\sqrt{\alpha_u} t})$, $v(t) = O(e^{-\sqrt{\alpha_v} t})$ при $t \to +\infty$ (см. теорему 8 на с.64 из /5/).

Система уравнений (6) является системой уравнений Эйлера для функционала

$$\mathcal{H} = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2}\left(y_t^2 + \alpha_u y^2 + z_t^2 + \alpha_v z^2 + \beta(t) \frac{y^2 z^2}{t^2} \right) - \frac{y^4 + z^4}{4t^2} \right\} dt \ .$$

Рассмотрим функционал $\mathcal{H}$ на функциях вида $y(t) = a \cdot y_0(t)$, $z(t) = b \cdot z_0(t)$, где

$$y_0 \in S_u \ , \quad z_0 \in S_v \ , \text{ где}$$

$$S_u = \{ \rho(t) \mid \rho \in \mathring{W}_2^1(0,\infty), \ \|\rho\|_u = 1 \},$$
$$S_v = \{ \rho(t) \mid \rho \in \mathring{W}_2^1(0,\infty), \ \|\rho\|_v = 1 \},$$
$$\|\rho\|_u^2 = \int_0^\infty \{ \rho'^2(t) + \alpha_u \rho^2(t) \} \, dt \ ,$$
$$\|\rho\|_v^2 = \int_0^\infty \{ \rho'^2(t) + \alpha_v \rho^2(t) \} \, dt \ .$$

Тогда условия $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} = 0$ и $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial b} = 0$ являются необходимыми условиями того, что $\{y, z\}$ – критическая точка функционала $\mathcal{H}$. Отсюда получаем нормировочные условия для $y(t)$ и $z(t)$

$$\|y\|_z^2 = \int_0^\infty \frac{y^4}{t^2} \, dt,$$
$$\|z\|_y^2 = \int_0^\infty \frac{z^4}{t^2} \, dt \ . \qquad (9)$$

Здесь

$$\|y\|_z^2 = \|y\|_u^2 + \int_0^\infty \beta(t) \frac{y^2(t) z^2(t)}{t^2} \, dt =$$
$$= \int_0^\infty (y_t'^2 + \alpha_u y^2) \, dt + \int_0^\infty \beta(t) \frac{y^2(t) z^2(t)}{t^2} \, dt \ ,$$
$$\|z\|_y^2 = \|z\|_v^2 + \int_0^\infty \beta(t) \frac{y^2(t) z^2(t)}{t^2} \, dt =$$
$$= \int_0^\infty (z_t'^2 + \alpha_v z^2) \, dt + \int_0^\infty \beta(t) \frac{y^2(t) z^2(t)}{t^2} \, dt \ .$$

<u>Лемма I</u>. Пусть $0 \le \beta(t) \le 1$ для всех $t \ge 0$. Тогда для любых $y_0 \in S_u$, $z_0 \in S_v$ таких, что $y_0^2 \ne c z_0^2$, $c = const > 0$ (как элементы пространства $L_2(0,\infty)$), существуют единственные $\alpha > 0$, $b > 0$ такие, что $y(t) = a\, y_0(t)$, $z(t) = b \cdot z_0(t)$ удовлетворяют нормировочным условиям (9). При этом $a = a(y_0, z_0)$, $b = b(y_0, z_0)$ являются гладкими функционалами на множестве $S_u \times S_v$ для всех $(y_0, z_0) \in S_u \times S_v$ таких, что $y_0^2 \ne c z_0^2$ для любого $c > 0$.

Если для некоторого $c > 0$ $y_0^2 = c z_0^2$, то либо не существует $a > 0$, $b > 0$ таких, что функции $a y_0$, $b z_0$ удовлетворяют условиям (9), либо такие $a > 0$, $b > 0$ единственные и гладкие функции y_0, z_0.

<u>Доказательство</u>. Зафиксируем произвольные $y_0 \in S_u$, $z_0 \in S_v$. Пусть сначала $y_0^2 \ne c z_0^2$ для всех $c > 0$. Для функций $a \cdot y_0$, $b \cdot z_0$ условия (9) примут следующий вид:

$$1 + b^2 \int_0^\infty \beta(t) \cdot \frac{y_0^2(t) \cdot z_0^2(t)}{t^2} \, dt = a^2 \int_0^\infty \frac{y_0^4(t)}{t^2} \, dt,$$

$$1 + a^2 \int_0^\infty \beta(t) \frac{y_0^2(t) \cdot z_0^2(t)}{t^2} \, dt = b^2 \int_0^\infty \frac{z_0^4(t)}{t^2} \, dt \ . \qquad (10)$$

Введем обозначения

$$\int_0^\infty \beta(t)\,\frac{y_0^2(t)\,z_0^2(t)}{t^2}\,dt = S, \quad \int_0^\infty \frac{y_0^4(t)}{t^2}\,dt = p,$$

$$\int_0^\infty \frac{z_0^4(t)}{t^2}\,dt = q.$$

В силу условий $0 \le \beta(t) \le 1$ и $y_0^2(t) \ne c\,z_0^2(t)$ для всех $c>0$ и в силу неравенства Гельдера

$$S^2 < p\cdot q. \tag{II}$$

Положив $a' = a^2$, $b' = b^2$, из (10) получаем:

$$\begin{aligned} 1 + s\,b' &= p\,a', \\ 1 + s\,a' &= q\,b'. \end{aligned} \tag{I2}$$

В силу неравенства (II) главный определитель этой системы уравнений относительно неизвестных a', b' отличен от нуля. Как нетрудно убедиться, решение этой системы

$$a' = \frac{q+s}{pq - s^2},$$

$$b' = \frac{p+s}{pq - s^2}.$$

В силу условия (II) $a'>0$, $b'>0$, следовательно, система уравнений (10) имеет единственное решение $a = \sqrt{a'} > 0$, $b = \sqrt{b'} > 0$. Кроме того, как нетрудно видеть,

$$a = a(y_0, z_0) \in C^1(S), \quad b = b(y_0, z_0) \in C^1(S),$$

где $S = \{ (y_0, z_0) \mid y_0 \in S_u,\ z_0 \in S_v,\ y_0^2 \ne c\,z_0^2$ для всех $c > 0 \}$.

Пусть теперь $y_0^2 = c\,z_0^2$ для некоторого $c>0$. Тогда $p = c^2 q$. Если $S^2 < pq$, то, рассуждая как раньше, получаем, что существуют единственные гладкие функции $a(y_0, z_0)$, $b(y_0, z_0)$ такие, что $a y_0$, $b z_0$ удовлетворяют условиям (9).

Если же $S^2 = pq$, то, как нетрудно видеть, $\beta(t) = 1$ во всех точках t, в которых $y_0(t) \ne 0$. Тогда $S^2 = c^2 q^2$ и из (I2) получаем

$$\begin{aligned} 1 + cq\,b' &= c^2\,q\,a', \\ 1 + cq\,a' &= q\,b'. \end{aligned} \tag{I3}$$

Умножая второе уравнение в (I3) на c и складывая уравнения, получаем $1 + c = 0$, т.е. $c = -1 < 0$, что противоречиво. Таким образом, в этом случае система (II) несовместна.

Лемма I доказана.

Положим $T = \{ (y,z) \mid y, z \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\infty),\ y \ne 0,\ z \ne 0,\ y, z$ удовлетворяют (9)$\}$.

Используя (9), можно получить для $(y,z) \in T$:

$$\mathcal{H}(y,z) = \frac{1}{4}\left\{ \|y\|_z^2 + \|z\|_y^2 \right\} > 0. \tag{I4}$$

<u>Лемма 2</u>. $\inf\limits_{(y,z)\in T} \mathcal{H}(y,z) = \mathcal{H}_0 > 0.$

<u>Доказательство</u>. Достаточно доказать, что $\|y\|_z^2 \ge C > 0$, $\|z\|_y^2 \ge C > 0$ при $(y,z) \in T$ (в силу (I4)).

Рассмотрим множество

$$T' = \left\{ h \in \overset{\circ}{W}{}_2^1,\ h \ne 0,\ \|h\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} = \int_0^\infty \frac{h^4}{t^2}\,dt \right\}.$$

В работе [6] доказано: $\|h\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\infty)} \ge C > 0$.

Для любого $y_0 \in S_u$ и произвольного z имеем:

$$\|a y_0\|_z^2 - \int_0^\infty \frac{(a y_0)^4}{t^2}\,dt \ge \|a y_0\|_u^2 - \int_0^\infty \frac{(a y_0)^4}{t^2}\,dt.$$

Поэтому, если $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ таковы, что $(a_1 y_0, z) \in T$, $a_2 y_0 \in T'$, $a_1 \ge a_2$, а поэтому $\inf\limits_{(y,z)\in T} \|y\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\infty)} \ge \inf\limits_{y \in T'} \|y\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\infty)}$.

Лемма 2 доказана.

Пусть $\{y_n, z_n\} \subset T$ – минимизирующая последовательность для функционала $\mathcal{H}$ на множестве T, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{H}(y_n, z_n) = \mathcal{H}_0$.

<u>Лемма 3</u>. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех n

$$\int_0^\delta \frac{y_n^4}{t^2}\,dt < \varepsilon, \quad \int_0^\delta \frac{z_n^4}{t^2}\,dt < \varepsilon, \quad \int_0^\delta \beta(t)\,\frac{y_n^2 z_n^2}{t^2}\,dt < \varepsilon. \tag{I5}$$

<u>Доказательство</u>. Для любых t_1, t_2: $0 < t_1 < t_2$

$$|y_n(t_1) - y_n(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} y_n'(t)\,dt \right| \le \int_{t_1}^{t_2} |y_n'(t)|\,dt \le$$

$$\le (t_2 - t_1) \left\{ \int_{t_1}^{t_2} (y_n'(t))^2\,dt \right\}^{1/2} \le (t_2 - t_1) \cdot \|y_n\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\infty)}.$$

Следовательно, поскольку $y_n(0) = 0$, имеем

$$|y_n(t)| \le C\sqrt{t},$$

где C не зависит от n.

Отсюда:

$$\int_0^\delta \frac{y_n^4(t)}{t^2}\,dt \le c^4\int_0^\delta dt = c^4\cdot\delta \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta\to+0.$$

Аналогичные оценки справедливы для двух других интегралов.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Для любого $\varepsilon>0$ найдется $R>0$ такое, что для всех номеров n

$$\int_R^\infty \frac{y_n^4}{t^2}\,dt<\varepsilon,\quad \int_R^\infty \frac{z_n^4}{t^2}\,dt<\varepsilon,\quad \int_R^\infty \beta(t)\frac{y_n^2 z_n^2}{t^2}\,dt<\varepsilon .$$

Доказательство. В силу (I4) последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ ограничены в $W_2^1(0,\infty)$.

По теореме вложения

$$|y_n(t)|<c_1,\quad |z_n(t)|<c_1, \tag{I6}$$

для всех $t\geq 0$ и всех номеров n.

Отсюда получаем:

$$\int_R^\infty \frac{y_n^4}{t^2}\,dt \le c_1^4\int\frac{dt}{t^2}=\frac{c_1^4}{R}\to 0 \qquad R\to\infty .$$

Лемма 4 доказана.

В силу ограниченности последовательностей $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ в $\mathring{W}_2^1(0,\infty)$ из них можно выделить подпоследовательности, слабо сходящиеся в $\mathring{W}_2^1(0,\infty)$ и сильно сходящиеся в $L_{4,\frac{1}{t^2}}(a,b)$ для любых $a,b:\ 0<a<b<\infty$, где $L_{4,\frac{1}{t^2}}$ – пространство Лебеча с весом $\frac{1}{t^2}$.

Будем считать, не ограничивая общности рассуждений, что этим свойством обладают сами последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$. Пусть $\bar y$ и $\bar z$ – их пределы соответственно (в указанном выше смысле). Тогда, в силу лемм 3 и 4 и сильной сходимости этих последовательностей в $L_{\frac{1}{t^2}}(a,b)$,

$$\int_0^\infty \frac{\bar y^4}{t^2}\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{y_n^4}{t^2}\,dt,\quad \int_0^\infty\frac{\bar z^4}{t^2}\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{z_n^4}{t^2}\,dt, \tag{I7}$$

$$\int_0^\infty \beta(t)\,\frac{\bar y^2\bar z^2}{t^2}\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\beta(t)\,\frac{y_n^2(t)\,z_n^2(t)}{t^2}\,dt .$$

Кроме того,

$$\|\bar y\|_n\le\lim_{n\to\infty}\|y_n\|_n,\quad \|\bar z\|_v\le\lim_{n\to\infty}\|z_n\|_v \tag{I8}$$

(см./7/).

В силу (I7) и (I8)

$$\mathcal{H}(\bar y,\bar z)\le\mathcal{H}_0 . \tag{I9}$$

Подставим $\left(\frac{a\bar y}{\|\bar y\|_u},\frac{b\bar z}{\|\bar z\|_v}\right)$ в равенства (9), получим:

$$a^2+\frac{a^2b^2}{\|\bar y\|_u^2\,\|\bar z\|_v^2}\cdot\int_0^\infty\beta(t)\,\frac{\bar y^2(t)\,\bar z^2(t)}{t^2}\,dt=\frac{a^4}{\|\bar y\|_u^4}\cdot\int_0^\infty\frac{\bar y^4(t)}{t^2}\,dt,$$

$$b+\frac{a^2b^2}{\|\bar y\|_u^2\cdot\|\bar z\|_v^2}\cdot\int_0^\infty\beta(t)\,\frac{\bar y^2(t)\cdot\bar z^2(t)}{t^2}\,dt=\frac{b^4}{\|\bar z\|_v^4}\int_0^\infty\frac{\bar z^4(t)}{t^2}\,dt.$$

Отсюда, положив $\bar S=\int_0^\infty\beta(t)\,\bar y^2(t)\,\bar z^2(t)\,dt$, $\bar p=\int_0^\infty\frac{\bar y^4(t)}{t^2}\,dt$,

$\bar q=\int_0^\infty\frac{\bar z^4(t)}{t^2}\,dt$, $a'=a^2$, $b'=b^2$:

$$\left.\begin{aligned}1+\frac{b'\cdot\bar S}{\|\bar y\|_u^2\cdot\|\bar z\|_v^2}&=\frac{a'}{\|\bar y\|_u^4}\cdot\bar p\\ 1+\frac{a'\cdot\bar S}{\|\bar y\|_u^2\cdot\|\bar z\|_v^2}&=\frac{b'}{\|\bar z\|_v^4}\cdot\bar q\end{aligned}\right\}. \tag{20}$$

При условии $\bar p\bar q-\bar S^2\neq 0$ решение системы уравнений (20) следующее:

$$\begin{aligned}b_0'&=\frac{\|\bar z\|_v^2\,(\bar p\,\|\bar z\|_v^2+\bar S\,\|\bar y\|_u^2)}{\bar p\bar q-\bar S^2},\\ a_0'&=\frac{\|\bar y\|_u^2\,(\bar q\,\|\bar y\|_u^2+\bar S\,\|\bar z\|_v^2)}{\bar p\bar q-\bar S^2}.\end{aligned} \tag{21}$$

Подставив $\left(\frac{a_n y_n}{\|y_n\|_u^2},\frac{b_n z_n}{\|z_n\|_v^2}\right)$ в равенства (9) и повторяя все приведенные выше выкладки, получаем для $a_n'=a_n^2$, $b_n'=b_n^2$:

$$\left.\begin{aligned}1+\frac{b_n' S_n}{\|y_n\|_u^2\,\|z_n\|_v^2}&=\frac{a_n'}{\|y_n\|_u^4}\cdot p_n\\ 1+\frac{a_n'\cdot S_n}{\|y_n\|_u^2\cdot\|z_n\|_v^2}&=\frac{b_n'}{\|z_n\|_v^4}\cdot q_n\end{aligned}\right\}, \tag{20n}$$

$$a'_{on} = \frac{\|y_n\|_u^2 \left(q_n \|y_n\|_u^2 + s_n \|z_n\|_v^2\right)}{p_n q_n - s_n^2}$$

$$b'_{on} = \frac{\|z_n\|_v^2 \left(p_n \|z_n\|_v^2 + s_n \|y_n\|_u^2\right)}{p_n q_n - s_n^2} \qquad (21n)$$

Отметим, что $s_n^2 \neq p_n q_n$, т.к. в противном случае, как показано в лемме I, $(a_n y_n, b_n z_n) \in T$ для всех a_n, b_n.

Предположим, что справедливо хотя бы одно из двух неравенств

$$\|\bar y\|_u^2 < \lim_{n\to\infty} \|y_n\|_u^2 \quad \text{и} \quad \|\bar z\|_v^2 < \lim_{n\to\infty} \|z_n\|_v^2 .$$

В силу (I4) и того, что $\mathcal{H}(y_n, z_n) \geq a_{on}^2 + b_{on}^2$, а также в силу леммы 2

$$p_n q_n - s_n^2 \geq c_0 = const > 0.$$

В силу (I7)

$$\bar p \bar q - \bar s^2 \geq c_0 > 0 .$$

Кроме того, в силу (I7) и нашего предположения

$$\frac{a_0^2}{\|\bar y\|_u^2} < \lim_{n\to\infty} \frac{a_{on}^2}{\|y_n\|_u^2}, \quad \frac{b_0^2}{\|\bar z\|_v^2} < \lim_{n\to\infty} \frac{b_{on}^2}{\|z_n\|_v^2} .$$

Но тогда (поскольку $\left(\frac{a_0 \bar y}{\|\bar y\|_u}, \frac{b_0 \bar z}{\|\bar z\|_v}\right) \in T$) и в силу (I7):

$$\mathcal{H}\left(\frac{a_0 \bar y}{\|\bar y\|_u}, \frac{b_0 \bar z}{\|\bar z\|_v}\right) = \frac{1}{4}\left\{a_0^2 + b_0^2 + a_0^2 b_0^2 \int_0^\infty \beta(t) \frac{\bar y^2(t)\cdot \bar z^2(t)}{\|\bar y\|_u^2 \|\bar z\|_v^2 t^2} dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{a_0^2 + b_0^2 + \frac{a_0^2 b_0^2}{\|\bar y\|_u^2 \|\bar z\|_v^2} \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \beta(t) \frac{y_n^2(t)\, z_n^2(t)}{t^2} dt\right\} <$$

$$< \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left\{a_{on}^2 + b_{on}^2 + \frac{a_{on}^2 b_{on}^2}{\|y_n\|_u^2 \|z_n\|_v^2} \int_0^\infty \beta(t) \frac{y_n^2(t)\, z_n^2(t)}{t^2} dt\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(y_n, z_n) = \inf_{(y,z)\in T} \mathcal{H}(y,z),$$

что протеворечиво.

Таким образом, доказано, что $(\bar y, \bar z) \in T$.

Кроме того, $\mathcal{H}(\bar y, \bar z) = \inf\limits_{(y,z)\in T} \mathcal{H}(y,z)$, т.е. доказана

Лемма 5. Существует точка $(\bar y, \bar z) \in T$ такая, что

$$\mathcal{H}(\bar y, \bar z) = \inf_{(y,z)\in T} \mathcal{H}(y,z).$$

Таким образом, $(\bar y, \bar z)$ – критическая точка функционала $\mathcal{H}$ на множестве T.

Отметим, что в силу того, что $\bar p \bar q - \bar s^2 \neq 0$, а также в силу лемм 2 и 3 величина $pq - s^2 \neq 0$ для всех точек (y, z) , близких $\left(\frac{\bar y}{\|\bar y\|_u}, \frac{\bar z}{\|\bar z\|_v}\right)$ в топологии пространства $W_2^1(0,\infty) \times W_2^1(0,\infty)$, причем $pq - s^2 \to \bar p \bar q - \bar s^2$ при $(y,z) \to \left(\frac{\bar y}{\|\bar y\|_u}, \frac{\bar z}{\|\bar z\|_v}\right)$, следовательно, существуют $a = a(y,z)$, $b = b(y,z)$ такие, что $(ay, bz) \in T$ для всех точек (y,z) достаточно близких $\left(\frac{\bar y}{\|\bar y\|_u}, \frac{\bar z}{\|\bar z\|_v}\right)$.

Кроме того, в силу формул (I7), $a(y,z)$ и $b(y,z)$ – гладкие функции y и z.

По теореме 2.2 из работы /8/ $(\bar y, \bar z)$ – критическая точка функционала $\mathcal{H}$. Следовательно, $(\bar y, \bar z)$ – слабое решение системы уравнений (6)-(8). Используя то обстоятельство, что $\bar y, \bar z$ – непрерывны, так же, как в работе /9/, можно доказать, что $(\bar y, \bar z)$ – классическое решение задачи (6)-(8).

Докажем, что функции $\bar y$, $\bar z$ – положительны при $t > 0$. Как нетрудно убедиться, точка $(|\bar y|, |\bar z|) \in T$ и $\mathcal{H}(|\bar y|, |\bar z|) = \inf\limits_{(y,z)\in T} \mathcal{H}(y,z)$, поэтому $(|\bar y|, |\bar z|)$ также является классическим решением задачи (6)-(8), что возможно лишь, если $\bar y(t) > 0$, $\bar z(t) > 0$ при $t > 0$.

Из теоремы 8 на с.64 книги /5/ получаем: $\bar y(t) = O(e^{-\sqrt{\omega_u} t})$, $\bar z(t) = O(e^{-\sqrt{\omega_v} t})$ при $t \to \infty$. Точно так же, как в работе /6/ это делается для одного уравнения, можно доказать, что $\bar y'(0) < \infty$, $\bar z'(0) < \infty$, и, следовательно, функции $\frac{\bar y(t)}{t}$, $\frac{\bar z(t)}{t}$ удовлетворяют задаче (3)-(5).

Итак, доказана теорема. Если функция $\beta(t)$ удовлетворяет условию $0 < \beta(t) \leq 1$, то система уравнений (3)-(5) имеет решение $(\bar u, \bar v)$, где $\bar u(t) > 0$, $\bar v(t) > 0$ при $t > 0$.

Литература

1. Hubbard J. Roc. Roy. Soc., 1963, A 276, p. 238.
2. Lindner U., Fedyanin V. phys. stat. sol. (b), 1978, 89, p.123.
3. Lindner U., Fedyanin V. phys. stat. sol. (b), 1979, 95, p.83 k.
4. V.G.Makhankov. ОИЯИ. E2-80-2I4. Дубна, I980.

5. Беллман Р. Теория устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1954.

6. G.Ryder. Pacific J. Math. 22 (1967), 477-503.

7. Rabinowitz P.H. Indiana Univ. Math. J. 23, 729-754 (1974) .

8. Похожаев С.И. ДАН СССР 6(247), 1979, 1327-1331.

9. Strauss W. Commun. Math. Phys. 55, 149-162 (1977).

Рукопись поступила в издательский отдел
28 января 1982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Жидков П.Е. 5-82-67

Существование положительных решений в модели Линднер -Федянина

Исследуется трехмерная модель Линднер -Федянина. Обобщается вариационный метод, применявшийся для одного уравнения. Для стационарного нелинейного уравнения эллиптического типа, которое возникает при рассмотрении решений модели специального вида, получены достаточные условия существования нетривиального решения (u, v) задачи, где $u > 0$, $v > 0$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Zhidkov P.E. 5-82-67

On Positive Solutions in the Lindner-Fedyanin Model

The 3-dimensional Lindner-Fedyanin model is studied. The variational method applied to one problem is generalized. For the nonlinear elliptical equation which appears at considering solutions of special type sufficient conditions of the existence of nontrivial solution (u, v) of the problem, where $u > 0$, $v > 0$ are investigated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.