сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-87-373

П.Е.Жидков

ЗАДАЧА КОШИ
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

1987

1°. Рассмотрим задачу Коши для нелинейного уравнения Шредингера

$$iu_t + u_{xx} + f(t,x,u) = 0, \qquad x \in R^1 , \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) . \tag{2}$$

Уравнение (1) описывает многочисленные физические явления, такие как поведение неидеального бозе-газа со слабым взаимодействием между частицами, распространение теплового импульса в твердом теле, ленгмюровские волны в плазме, а также различные гидродинамические процессы /1-5/. Интерес, который вызывает это уравнение, во многом связан с тем, что при $f(t,x,u)=\pm |u|^2 u$ оно обладает специальными решениями-солитонами и может быть исследовано методом обратной задачи теории рассеяния /1,4/.

Вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости от начального условия решения задачи (1)-(2) различными методами изучались в работах /6-11/. В работах /6-8,10/ для функции $f(u)$, удовлетворяющей некоторым ограничениям, установлены существование и единственность глобального (определенного для всех $t \geqslant 0$) обобщенного решения, лежащего при каждом t в пространстве $W_2^1(R^1)$ как функция x. Наиболее полные результаты относительно локальной разрешимости задачи (1)-(2) получены в работах /9,11/, в которых доказаны локальное существование и единственность решения в весовых пространствах Соболева, обеспечивающих высокую гладкость и быстрое убывание решения и его производных при $|x| \to \infty$.

Настоящая работа имеет целью получение аналогичных теорем в более широких классах функций, чем используемые в указанных работах, элементы которых не стремятся к нулю при $|x| \to \infty$, вообще говоря. В многочисленных физических задачах возникает потребность в изучении таких решений /1,5/.

Известно /12/, что для линейного однородного уравнения Шредингера $(f(t,x,u) \equiv 0)$ задача Коши некорректно поставлена в норме пространства $C(R^1)$ $\left(|u|_C = \sup_{x \in R^1} |u(x)|\right)$. Из результатов настоящей работы вытекает, в частности, корректность постановки линейной однородной задачи Коши на произвольном промежутке $[0,T)$, где $T > 0$,

в пространствах X_n с нормой $\|u\|_n = |u|_c + \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{d^k u}{dx^k} \right|_2$,
где $|v|_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |v|^2 \, dx \right\}^{1/2}$, $n \geqslant 1$.

В работе изучается одномерное уравнение Шредингера. На многомерный случай полученные результаты не переносятся. В частности, не верна теорема 3.2.

2^0. Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t) u_0(y) dy + i \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t-s) \; f(s,y,u(y)) dy \, ds \quad , \quad (3)$$

где
$$k(x,t) = \begin{cases} (4\pi i t)^{-1/2} \exp(ix^2/4t), & t \neq 0, \\ \delta(x) \quad \text{при} & t = 0, \end{cases}$$

фундаментальное решение оператора $L = i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $(4\pi i t)^{1/2}$ – комплексный корень, лежащий в первой четверти при $t > 0$ и в четвертой при $t < 0$.

<u>Определение</u>

Решение интегрального уравнения (3) назовем обобщенным решением задачи Коши (I)-(2).

Пусть теперь X – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $u_0 \in X$ – некоторый элемент пространства, $A(t)$ – линейный оператор, действующий из X в X при каждом t, $u(t)$ – функция аргумента t со значениями в X, $J(t,u)$ – нелинейное отображение множества $R^1 x X$ в X. Рассмотрим вместо (3) абстрактное уравнение

$$u(t) = A(t)u_0 + \int_0^t A(t-s) \; J(s,u(s)) ds \quad . \qquad (4)$$

Пусть (T_1, T_2) – некоторый интервал, причем $T_1 < 0 < T_2$. Предположим, что семейство операторов $A(t)$ удовлетворяет следующим условиям: (A_1) $A(0)=E$ – тождественный оператор; (A_2) при каждом $t \in (T_1, T_2)$ $A(t) \in L(X,X)$ – пространству линейных ограниченных операторов, действующих из X в X, причем $\|A(t)\| \leqslant A_0$ для всех t; (A_3) для произвольного $\varphi \in X$ функция $A(t)\varphi$: $(T_1, T_2) \longrightarrow X$ непрерывна.

Пусть также нелинейное отображение J удовлетворяет условиям: (J_1) отображение J: $\{(T_1,T_2) \times X\} \longrightarrow X$ непрерывно; (J_2) отображение $J(t,u)$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу на множестве $\{ (t,u) \; t \in (T_1,T_2), \; \|u\| \leqslant r \}$ при любом $r > 0$, т.е. $\|J(t,u_1) - J(t,u_2)\| \leqslant C_r \|u_1 - u_2\|$.

Имеет место теорема существования решения.

<u>Теорема 2.I</u> (существование)

Существует $T > 0$, такое, что на отрезке $[-T,T]$ существует решение $u(t)$ уравнения (4), непрерывное как функция аргумента t, причем можно указать общее T для всех u_0 из произвольного ограниченного множества в X.

<u>Доказательство</u>

Обозначим через $C[-T,T]$ множество непрерывных функций $u(t)$: $[-T,T] \longrightarrow X$ для которых

$$\|u(\cdot)\|_T = \sup_{t \in [-T,T]} \|u(t)\| < \infty .$$

Известно, что $C[-T,T]$ – банахово пространство /8/.

Пусть $T < \min\{-T_1; T_2\}$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество

$$M = \left\{ u(t) \mid u \in C[-T,T], \; u(0)=u_0, \; \|u(\cdot) - A(t)u_0\|_T \leqslant \varepsilon \right\}$$

(функция $A(t)u_0 \in C[-T,T]$ благодаря условию (A_3)). Ясно, что M – полное метрическое пространство относительно метрики $\rho(u,v) = \|u - v\|_T$. Докажем, что при достаточно малых ε, T отображение из правой части (4) $(Bu)(t) = A(t)u(0) + \int_0^t A(t-s) J(s,u(s)) ds$ действует из M в M и является сжимающим. Сначала установим, что B определено на $C[-T,T]$. Достаточно установить непрерывность функции $A(t-s) \; J(s,u(s))$ по s, где $u \in C[-T,T]$ (см. /13/). Зафиксируем $h \in R^1$ и рассмотрим

$$\|A(t-s-h) \; J(s+h,u(s+h)) - A(t-s) \; J(s,u(s))\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A(t-s-h)[J(s+h,u(s+h)) - J(s,u(s))]\| + \|[A(t-s-h) - A(t-s)] J(s,u(s))\| \leqslant$$
$$\leqslant A_0 \|J(s+h,u(s+h)) - J(s,u(s))\| + \|A(t-s-h)J(s,u(s)) - A(t-s)J(s,u(s))\| .$$

При $h \longrightarrow 0$ первое слагаемое стремится к нулю в силу (J_1), а второе – в силу (A_3). Тем самым непрерывность $A(t-s)J(s,u(s))$ доказана.

Теперь докажем, что B действует из $C(-T,T)$ в $C(-T,T)$. Рассмотрим

$$\|(Bu)(t+h) - (Bu)(t)\| \leq \|A(t+h)u_0 - A(t)u_0\| + \Big\|\int_0^{t+h} A(t+h-s)J(s,u(s))ds - \int_0^t A(t-s)J(s,u(s))ds\Big\| = \|A(t+h)u_0 - A(t)u_0\| +$$

$$+ \Big\|\int_0^t A(t-s)J(s+h,u(s+h))ds + \int_{-h}^0 A(t-s)J(s+h,u(s+h))ds - \int_0^t A(t-s)J(s,u(s))ds\Big\| \leq \|A(t+h)u_0 - A(t)u_0\| + \Big\|\int_{-h}^0 A(t-s)J(s+h,u(s+h))ds\Big\| +$$

$$+ \Big\|\int_0^t A(t-s)\big[J(s+h,u(s+h)) - J(s,u(s))\big]ds\Big\| \leq \|A(t+h)u_0 - A(t)u_0\| +$$

$$+ hA_0 \max_{s\in[0,h]}\|J(s,u(s))\| + tA_0 \max_{s\in[0,t]}\|J(s+h,u(s+h)) - J(s,u(s))\|.$$

При $h \to 0$ первое слагаемое стремится к нулю в силу (A_3), второе – в силу (J_1). Поскольку $|t| < T$, функция $J(s,u(s))$ непрерывна на $[0,t]$, поэтому (см. /I3/) равномерно непрерывна, а следовательно, третье слагаемое стремится к нулю при $h \to 0$. Поэтому B действует из $C(-T,T)$ в $C(-T,T)$. Далее

$$\|B(u(t)) - A(t)u_0\|_T = \Big\|\int_0^t A(t-s)J(s,u(s))ds\Big\|_T \leq TA_0 \sup_{\substack{t\in[-T,T] \\ \|u\|\leq A_0\|u_0\|+\varepsilon}} \|J(t,u)\|.$$

Отсюда в силу условия (J_1) видно, что $\|Bu - A(t)u_0\| \leq \varepsilon$, если T достаточно мало, т.е. B действует из M в M.

В силу оценки

$$\|B(u_1) - B(u_2)\|_T = \Big\|\int_0^t A(t-s)\big[J(s,u_1(s)) - J(s,u_2(s))\big]ds\Big\|_T \leq$$

$$\leq T\, C_r A_0 \|u_1 - u_2\|_T,$$

где C_r – постоянная Липшица из (J_2) на множестве $\{(t,u) \mid t\in(T_1,T_2),\ \|u\| \leq A_0\|u_0\| + \varepsilon\}$, отображение B является сжимающим на множестве M, если T достаточно мало. По принципу сжатых отображений уравнение (4) имеет решение $u(t)$ на некотором отрезке $[-T,T]$, непрерывное по t. Из доказательства вытекает, что можно указать одно и то же T для любого ограниченного множества значений u_0. Тем самым теорема 2.I доказана.

<u>Теорема 2.2</u> (единственность)

Пусть выполнены предположения $(A_1) - (A_3), (J_1), (J_2)$. Тогда на любом интервале $(a,b) \in (T_1,T_2)$, где $a < 0 < b$, уравнение (4) может иметь не более одного ограниченного решения.

<u>Доказательство</u>

Предположим, что на некотором интервале $(a,b) \subset (T_1, T_2)$, где $a < 0 < b$, имеется два ограниченных решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Пусть $u_1(\bar t) \neq u_2(\bar t)$ для некоторого $\bar t \in (a,b)$ и пусть для определенности $\bar t > 0$. Обозначим через t_0 точную нижнюю грань множества всех таких положительных точек. Зафиксируем некоторое $t_1 \in (t_0,b)$ и рассмотрим

$$\sup_{t\in(t_0,t_1)} \|u_1(t) - u_2(t)\| = \sup_{t\in(t_0,t_1)} \Big\|\int_{t_0}^t A(t-s)\big[J(s,u_1(s)) - J(s,u_2(s))\big]ds \leq \tag{5}$$

$$\leq A_0 C_r (t-t_0) \sup_{t\in(t_0,t_1)} \|u_1(t) - u_2(t)\|,$$

где C_r – постоянная Липшица из (J_2) с $r = \sup_{t\in[t_0,t_1]} \{\|u_1(t)\| + \|u_2(t)\|\}$.

Из (5) видно, что $\sup_{t\in(t_0,t_1)} \|u_1(t) - u_2(t)\| = 0$ для $t_1 > t_0$, t_1, достаточно близких к t_0, что противоречит выбору t_0.

Теорема 2.2 доказана.

Пусть $u(t)$, $v(t)$ – решения уравнения (4), определенные на интервалах (a,b) и (a_1, b_1) соответственно, где $a_1 < a < 0 < b < b_1$. Ясно, что функция $v(t)$ является решением уравнения (4) на интервале (a,b). Пусть $u(t) = v(t)$ на (a,b). Решение $v(t)$ назовем продолжением решения $u(t)$ на интервал (a_1, b_1). Аналогично можно определить продолжения решения $u(t)$ на интервалы (a_1,b) и (a,b_1).

<u>Теорема 2.3</u> (непрерывная зависимость решения от начального условия)

Пусть выполнены предположения (A1) – (A3), (J1), (J2) и пусть непрерывное решение $\bar u(t)$ уравнения (4), отвечающее некоторому $u_0 = \bar u_0$, определено на интервале $(\bar a, \bar b)$, где $T_1 \leq \bar a < 0 < \bar b \leq T_2$. Тогда для любых a, b, таких, что $\bar a < a < 0 < b < \bar b$, для всех u_0, достаточно близких к $\bar u_0$, решения уравнения (4) могут быть продолжены непрерывным образом на отрезок $[a,b]$ и имеет место равенство

$$\lim_{u_0 \to \bar u_0} \max_{t\in[a,b]} \|u(t) - \bar u(t)\| = 0.$$

<u>Доказательство</u>

Обозначим через a_1 точную нижнюю грань точек a, а через b_1 – точную верхнюю грань точек b, таких, что при всех значениях u_0, достаточно близких к $\bar u_0$, соответствующие решения уравнения

(4) могут быть продолжены на отрезок $[a,b]$ и имеет место равенство

$$\lim_{u_0\to\bar u_0}\ \max_{t\in[a,b]}\|u(t)-\bar u(t)\| = 0.$$

Предположим, что теорема неверна. Тогда либо $a_1>\bar a$, либо $b_1<\bar b$. Пусть для определенности $b_1<\bar b$.

По определению a_1 и b_1 для любого $\varepsilon>0$ найдется $\alpha=\alpha(\varepsilon)>0$, такое, что для любого u_0: $\|u_0-\bar u_0\|\le\alpha(\varepsilon)$ соответствующее решение $u(t)$ уравнения (4) может быть продолжено на отрезок $[a_1+\varepsilon,\ b_1-\varepsilon]$ и имеет место неравенство

$$\max_{t\in[a_1+\varepsilon,b_1-\varepsilon]}\|u(t)-\bar u(t)\|\le 1. \tag{6}$$

Можно считать $\alpha(\varepsilon)$ ограниченной функцией. Для каждого $\varepsilon\in\min\{-a_1;b_1\}$ и каждого решения $u(t)$ уравнения (4), удовлетворяющего условию $\|u_0-\bar u_0\|\le\alpha(\varepsilon)$, рассмотрим множество

$$M=\Big\{v(t)\,\Big|\,v\in([a_1+\varepsilon,b_1+T],\ v(t)=u(t)\ \text{ на } [a_1+\varepsilon,b_1-\varepsilon],$$
$$\Big\|v(t)-A(t)u_0-\int_0^{b_1-\varepsilon}A(t-s)J(s,u(s))ds\Big\|\le k\ \text{ при } t\in(b_1-\varepsilon,b_1+T]\Big\},$$

где $k>0$, $T\in(0,\bar b-b_1)$.

Заметим, что в силу (6) для всех функций $u(t):\|u(0)-\bar u_0\|\le\alpha(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\max_{t\in[a_1+\varepsilon,b_1-\varepsilon]}\|u(t)\|\le R_1, \tag{7}$$

где $R_1=1+\max\limits_{t\in[a_1+\varepsilon,b_1-\varepsilon]}\|\bar u(t)\|$.

Далее для любой функции $v(t)\in M$ и любого $t\in(b_1-\varepsilon,b_1+T]$ имеем, используя (A2), (J1):

$$\|v(t)\|\le k+A_0\|u_0\|+(b_1-\varepsilon)A_0\max_{\|u\|\le R_1,\,0\le s\le b_1-\varepsilon}\|J(s,u)\|\le R_2, \tag{8}$$

где R_2 не зависит от ε и $\|u_0\|$. Объединяя оценки (7), (8), получим

$$\sup_{t\in[a_1+\varepsilon,b_1+T]}\|v(t)\|\le R_3 \tag{9}$$

для всех $v\in M$, где $R_3=\max\{R_1;R_2\}$.

Так же, как при доказательстве теоремы 2.I, можно доказать, что найдутся $k>0$, $T\in(0,\bar b-b_1)$, такие, что для всех достаточно малых $\varepsilon>0$ отображение B (см. доказательство теоремы 2.I) действует из M в M и является сжимающим. Следовательно, при всех достаточно малых $\varepsilon>0$ решения $u(t)$: $\|u(0)-\bar u_0\|\le\alpha(\varepsilon)$ могут быть продолжены на промежуток $[a_1+\varepsilon,\ b_1+T]$, причем в силу (9) равномерно ограничены на $[a_1+\varepsilon,\ b_1+T]$:

$$\sup_{t\in[a_1+\varepsilon,b_1+T]}\|u(t)\|\le R_3. \tag{I0}$$

Зафиксируем любое $\beta\in(0,T)$. По определению b_1 имеем

$$\overline{\lim_{u_0\to\bar u_0}}\ \max_{t\in[0,b_1+\beta]}\|u(t)-\bar u(t)\|>0. \tag{II}$$

В силу уравнения (4)

$$\max_{t\in[0,b_1+\beta]}\|u(t)-\bar u(t)\|\le A_0\|u_0-\bar u_0\|+(b_1-\beta)A_0C_r\max_{t\in[0,b_1-\beta]}\|u(t)-\bar u(t)\|+$$
$$+2\beta A_0C_r\max_{t\in[0,b_1+\beta]}\|u(t)-\bar u(t)\|,$$

где C_r – постоянная Липшица из условия (J2) с $r=R_3$. Учитывая, что $\lim\limits_{u_0\to\bar u_0}\max\limits_{t\in[0,b_1-\beta]}\|u(t)-\bar u(t)\|=0$ по определению b_1, получаем из последнего неравенства

$$\overline{\lim_{u_0\to\bar u_0}}\ \max_{t\in[0,b_1+\beta]}\|u(t)-\bar u(t)\|\le 2\beta A_0C_r\ \overline{\lim_{u_0\to\bar u_0}}\ \max_{t\in[0,b_1+\beta]}\|u(t)-\bar u(t)\|.$$

В силу (II) это неравенство противоречиво, если β достаточно мало. Тем самым теорема 2.3 доказана.

3^0. Вернемся к уравнению (3). Присутствующий в этом уравнении интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}k(x-y,t)g(y)dy$ будем понимать как $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}k(x-y,t)g(y)dy$.

Положим $[A(t)u](x)=\int_{-\infty}^{\infty}k(x-y,t)u(y)dy$ для $t\ne0$,

$[A(0)u](x)=u(x)$ – тождественный оператор.

Имеет место

<u>Теорема 3.I</u> (см. /8/)

Пусть $u\in L_2(-\infty,\infty)$. Тогда для любого t $A(t)u\in L_2(-\infty,\infty)$ и имеет место неравенство

$$|A(t)u|_2\le|u|_2.$$

Обозначим через X_ℓ пространство ℓ раз дифференцируемых на R^1 п.в. функций $u(x)$, производные которых до порядка $(\ell-1)$ абсолютно непрерывны, для которых конечна норма $\|g\| = |g|_c + \sum_{k=1}^{\ell} \left| \frac{d^k g}{dx^k} \right|_2$.
Ясно, что X_ℓ – банахово пространство.

Проверим, что для $A(t)$ выполнены условия (A_1) – (A_3).

Теорема 3.2

Семейство операторов $A(t)$ удовлетворяет условиям (A_1) –(A_3) на любом конечном интервале (T_1, T_2), где $T_1 < 0 < T_2$, с $X = X_\ell$, $\ell \geq 1$.

Доказательство

По определению $[A(0)u](x) = u(x)$. Пусть $t \neq 0$ и пусть для определенности $t > 0$. Рассмотрим

$$[A(t)u](x) = (4\pi i t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)^2/4t}\, u(y)\, dy =$$

$$= (\pi i)^{-1/2} \left\{ \int_{-\infty}^{-\beta} e^{iz^2} u(x+2\sqrt{t}\, z)\, dz + \int_{-\beta}^{\beta} e^{iz^2} u(x+2\sqrt{t}\, z)\, dz + \int_{\beta}^{+\infty} e^{iz^2} u(x+2\sqrt{t} z)\, dz = \right.$$

$$= (\pi i)^{-1/2} \left\{ \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} \right\}, \tag{I2}$$

где $\beta > 0$ – произвольное. (Ниже будет показано, что несобственные интегралы здесь сходятся).

Не оговаривая этого каждый раз, будем использовать c_i $(i=1,2,\ldots)$ для обозначения некоторых положительных постоянных.

Из (I2) получаем

$$\left| [A(t)u](x) \right| \leq c_1 \beta |u|_c + \pi^{-1/2} \left\{ |\mathrm{I}| + |\mathrm{III}| \right\}. \tag{I3}$$

Оценим $|\mathrm{I}|$. Используя формулы замены переменного, интегрирование по частям и неравенство Шварца, получаем

$$|\mathrm{I}| = \left| \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{-\beta} e^{iz^2} u(x+2\sqrt{t} z)\, dz \right| = \left| \lim_{\alpha \to \infty} \int_{\beta^2}^{\alpha^2} e^{is} \frac{u(x-2\sqrt{ts})}{2\sqrt{s}}\, ds \right| \leq \tag{I4}$$

$$\leq \left| \lim_{\alpha \to \infty} \left[-ie^{is} \frac{u(x-2\sqrt{ts})}{2\sqrt{s}} \right] \Big|_{s=\alpha^2}^{s=\beta^2} \right| + \frac{1}{2} \lim_{\alpha \to \infty} \left| \int_{\beta^2}^{\alpha^2} e^{is} \left\{ \frac{\sqrt{t} u'(x-2\sqrt{ts})}{s} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{u(x-2\sqrt{ts})}{2s^{3/2}} \right\} ds \right| \leq c_2 \beta^{-1} |u|_c + \frac{1}{2} \lim_{\alpha \to +\infty} \left\{ \frac{|u|_c}{2} \int_{\beta^2}^{\alpha^2} \frac{ds}{s^{3/2}} + \sqrt{t} \int_{-2\alpha\sqrt{t}}^{-2\beta\sqrt{t}} \frac{|u'(x+z)|}{z} dz \right\} \leq$$

$$\leq c_3 t^{-1} |u|_c + \frac{1}{4} \sqrt{t} |u'|_2 \left\{ \int_{-\infty}^{-2\beta\sqrt{t}} z^{-2}\, dz \right\}^{1/2} = c_3 \beta^{-1} |u|_c + c_4 t^{1/4} (2\beta)^{-\frac{1}{2}} |u'|_2.$$

Аналогично оценивая $|\mathrm{III}|$, получаем

$$|\mathrm{III}| \leq c_5 \beta^{-1} |u|_c + c_6 t^{1/4} (2\beta)^{-1/2} |u'|_2. \tag{I5}$$

Из неравенств (I2)–(I5) с $\beta = 1$ вытекает следующее неравенство:

$$|A(t)\, u|_C \leq c_7 \|u\|_\ell. \tag{I6}$$

Оценим $\left| \frac{d}{dx} [A(t)u] \right|_2$. Методами, развитыми в /I4/, легко доказать, что $\frac{\Delta u}{\Delta} = \frac{u(x+\Delta)-u(x)}{\Delta} \in L_2(R^1)$ и $\frac{\Delta u}{\Delta} \xrightarrow{L_2(R^1)} u'$ при $\Delta \to 0$. Далее, по теореме 3.1, $\frac{\Delta [A(t)u]}{\Delta} = A(t) \frac{\Delta u}{\Delta} \xrightarrow{L_2(R^1)} A(t)u'$, и следовательно, $A(t)u$ имеет обобщенную производную, которая почти везде в R^1 равна $A(t)u'$.

Из полученного результата, теоремы 3.1 и неравенства (I6) следует ограниченность оператора $A(t)$: $X_1 \to X_1$. Если $\ell > 1$, то, повторяя приведенные рассуждения, получим, что $\frac{d^k}{dx^k}[A(t)u] = A(t) \frac{d^k u}{dx^k}$ $(k = \overline{1, \ell})$, а отсюда из теоремы 3.1 и неравенства (I6), как и раньше, вытекает свойство (A_2).

Докажем свойство (A_3). Будет доказано лишь, что $A(t)\varphi \to \varphi$ при $t \to 0$, так как свойство $A(t)\varphi \to A(t_0)\varphi$ при $t \to t_0$ доказывается аналогично. Указанное свойство равносильно тому, что

$$\|A(t)\varphi - \varphi\|_\ell \to 0 \tag{I7}$$

при $t \to 0$.

Докажем (I7). Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Из неравенств (I4) и (I5) вытекает, что найдется $\beta > 0$, такое, что для всех t : $|t| < 1$ выполняются два неравенства:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} (|\mathrm{I}| + |\mathrm{III}|) < \varepsilon/3(\ell+1) \tag{I8}$$

и

$$\left| (\pi i)^{-1/2} \int_{-\beta}^{\beta} e^{ix^2}\, dx - 1 \right| < \varepsilon/3(\ell+1). \tag{I9}$$

(Неравенство (I9) справедливо для достаточно больших $\beta > 0$, поскольку $(\pi i)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2}\, dx = 1$). В силу непрерывности функции $u(x)$ функция $u(x+2\sqrt{t} \cdot z)$ равномерно по $z \in [-\beta, \beta]$ стремится к $u(x)$ при $t \to 0$, поэтому и в силу (I9) найдется $t_0 > 0$, такое, что при $|t| < t_0$ выполняется неравенство

$$\left|(\pi i)^{-1/2}\int_{-\beta}^{\beta} e^{iz^2}u(x+2\sqrt{t}\,z)dz - u(x)\right| < 2\varepsilon/3(\ell+1) \,. \qquad (20)$$

Далее, $\dfrac{d^k A(t)u}{dx^k} = A(t)\dfrac{d^k u}{dx^k}$ $(k=\overline{1,\ell})$ и свойство

$\left|\dfrac{d^k[A(t)\varphi]}{dx^k} - \dfrac{d^k\varphi}{dx^k}\right|_2 \to 0$ при $t \to 0$ вытекает из сильной непрерывности унитарной группы e^{iBt} на $L_2(R^1)$ (где $B=-\dfrac{d^2}{dx^2}$)/8/. Поэтому найдется $t_1 \in (0,t_0)$, такое, что при $|t| \leqslant t_1$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{d^k[A(t)\varphi]}{dx^k} - \frac{d^k\varphi}{dx^k}\right|_2 \leqslant \varepsilon/(\ell+1) \qquad (k=\overline{1,\ell}). \qquad (21)$$

Из неравенств (18), (20), (21) получаем для всех t: $|t| \leqslant t_1$

$$\|A(t)\varphi - \varphi\|_\ell = |A(t)\varphi - \varphi|_C + \sum_{k=1}^{\ell}\left|\frac{d^k}{dx^k}[A(t)\varphi - \varphi]\right|_2 < \varepsilon$$

и теорема 3.2 доказана.

Перейдем теперь к выяснению условий на функцию f, обеспечивающих выполнение условий (J_1), (J_2). В дальнейшем будем рассматривать функции $f = f(u)$, , понимаемые как отображение $R^2 \to R^2$, т.е. будем считать $u = (u_1,u_2) \in R^2$, $f = (f_1,f_2) \in R^2$, где $u_1 = \operatorname{Re} u$, $u_2 = \operatorname{Im} u$, $f_1 = \operatorname{Re} f$, $f_2 = \operatorname{Im} f$. Таким образом, например, f'_u есть матрица Якоби

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}.$$

<u>Теорема 3.3</u>

Пусть $\ell \geqslant 1$, $f \in C^{\ell+1}_{loc}(R^2)$. Тогда отображение $J(u)=if(u)$ удовлетворяет условиям (J_1), (J_2) для пространства X_ℓ.

<u>Доказательство</u> тривиально и основано на формуле конечных приращений Лагранжа.

4^0. В заключение докажем, что для достаточно "хороших" функций f, u_0 решение интегрального уравнения (3) удовлетворяет задаче Коши (1)-(2).

Сначала докажем две леммы.

<u>Лемма 4.1</u>

Пусть $u_0 \in X_3$. Тогда для всех t, $x \in R^1$ производные $\dfrac{\partial}{\partial t}[A(t)u_0]$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}[A(t)u_0]$ определены и непрерывны, причем

$$L[A(t)u_0] = \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)[A(t)u_0] = 0.$$

<u>Доказательство</u>

Из результатов п.3^0 вытекает, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[A(t)u_0] = A(t)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2},$$

причем эта функция непрерывна. Докажем, что существует $\dfrac{\partial}{\partial t}[A(t)u_0]$, причем $L[A(t)u_0] = 0$. Делая замену переменного $z = (y-x)^2/4t$ и считая $t > 0$, получаем

$$A(t)u_0 = (4\pi i)^{-1/2}\int_0^\infty e^{iz}\,\frac{u_0(x+2\sqrt{tz}) + u_0(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{z}}\,dz,$$

откуда формально

$$\frac{\partial[A(t)u_0]}{\partial t} = (4\pi i)^{-1/2}\int_0^\infty e^{iz}\,\frac{u'_0(x+2\sqrt{tz}) - u'_0(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{t}}\,dz \,. \qquad (22)$$

Согласно известной теореме полученная формула справедлива для некоторого $t = t_0$, если несобственный интеграл $A(t)u_0$ сходится в некоторой окрестности точки $t = t_0$ и если несобственный интеграл из правой части (22) сходится равномерно по указанной окрестности. Первое условие теоремы, очевидно, выполнено. Проверим второе.

Рассмотрим некоторое $c > 0$, тогда

$$\int_0^c e^{iz}\,\frac{u'_0(x+2\sqrt{tz}) - u'_0(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{t}}\,dz =$$

$$= -ie^{ic}\,\frac{u'_0(x+2\sqrt{tc}) - u'_0(x-2\sqrt{tc})}{\sqrt{t}} + i\int_0^c e^{iz}\,\frac{u''_0(x+2\sqrt{tz}) + u''_0(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{z}}\,dz.$$

Поскольку $u'_0(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, при любом фиксированном x первое слагаемое стремится к нулю при $c \to +\infty$ равномерно по любому конечному интервалу изменения t, не содержащему нуль. Далее, второе слагаемое при $c = +\infty$ представляет собой несобственный интеграл, который сходится равномерно по любому конечному интервалу изменения t, не содержащему нуль, это доказывается методами, развитыми при доказательстве теоремы 3.2 (см. неравенство (I4)). Таким образом, доказано, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[A(t)u_o\right] = i(4\pi i)^{-1/2}\int_0^{\infty} e^{iz}\,\frac{u_o''(x+2\sqrt{tz}) + u_o''(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{z}}\,dz =$$

$$= i(4\pi i t)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i(y-x)^2}{4t}}\,u_o''(y)\,dy = i\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[A(t)u_o\right] u\ ,$$

таким образом, $L\left[A(t)u_o\right] = 0$.

Остается доказать формулу $L\left[A(t)u_o\right]\Big|_{t=0} = 0$. Поскольку $A(0)u_o = u_o$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[A(t)u_o\right]\Big|_{t=0} = u_o''(x)$. Как доказано выше, $A(t)u_o$ непрерывна как функция t при всех t, а для $t \neq 0$ $\frac{\partial}{\partial t}\left[A(t)u_o\right] = iA(t)u_o''$, т.е. $\frac{\partial}{\partial t}\left[A(t)u_o\right]$ непрерывна при всех $t \neq 0$ и существует $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\partial}{\partial t}\left[A(t)u_o\right] = iu_o''$. Следовательно, существует производная $\frac{\partial}{\partial t}\left[A(t)u_o\right]\Big|_{t=0}$, причем $L(A(t)u_o)\Big|_{t=0} = 0$.

Лемма 4.I доказана.

Лемма 4.2

Пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы 3.3 с $\ell = 3$ и пусть $u(t)$ – непрерывная функция t со значениями в X_3, определенная на интервале (a,b), где $a < 0 < b$. Тогда для любого $t \neq 0$, $t \in (a,b)$ и любого $x \in R^1$ имеет место равенство

$$L\left\{i\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t-s)\, f(u(s,y))\,dy\,ds\right\} = -\,f(u(t,x)).$$

Доказательство

В силу леммы 4.I функции $\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t-s)\, f(u(s,y))\,dy\right\}$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t-s) f(u(s,y))\,dy\right\}$ непрерывны и $L\left\{\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t-s)\, f(u(s,y))\,dy\right\} = 0$. Кроме того, в силу результатов п.3 функция $\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t-s)\, f(u(s,y))\,dy$ непрерывна по x, t и s. Следовательно,

$$L\left\{i\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t-s)\, f(u(s,y))\,dy\,ds\right\} = -\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t-s)\, f(u(s,y))\,dy\,ds\Big|_{s=t^+}$$
$$+\, i\int_0^t L\left\{\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y,t-s)\, f(u(s,y))\,dy\,ds\right\} = -\,f(u(t,x))$$

и лемма 4.2 доказана.

Из лемм 4.I и 4.2 вытекает

Теорема 4.I

Пусть $u_o \in X_3$ и пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы 3.2. Тогда решение $u(x,t)$ интегрального уравнения (3) непрерывно, $u(x,0) = u_o(x)$ и удовлетворяет уравнению (I), т.е. $u(x,t)$ является решением задачи Коши (I)-(2).

Литература

I. Тахтаджан Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М., Наука, I986.

2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., Мир, I977.

3. Солитоны в действии. Под ред. К.Лонгрена и Э.Скотта. М., Мир, I98I.

4. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М., Наука, I980.

5. Маханьков В.Г. Солитоны и численный эксперимент. ЭЧАЯ, I983, т.I4, вып.I, с. I23-I80.

6. Genebre J., Velo G. On a class of nonlinear Schrödinger equations. J. of Funct.Anal., 1979, vol.32, p.1-32.

7. Strauss W.A. Mathematical aspects of classical nonlinear field equations. Lect. Notes in Phys., 1979, vol.98, p.123-149.

8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т.I, М., Мир, I977; т.2, М., Мир, I978; т.3, М., Мир, I982.

9. Tsutsumi M.Weighted Sobolev spaces and repeadly decreased solutions of some nonlinear dispersive wave equations. J of Differ. Equat., 1981, vol.42, No.2, p.260-281.

I0. Weinstein M.I. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates. - Commun. Math. Phys., 1983, vol.87, p.567-576.

II. Насибов Ш.М. Об устойчивости, разрушении, затухании и самоканализации решений одного нелинейного уравнения Шредингера. Докл. АН СССР, I985, т.285, № 4, с. 807-8II.

I2. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики, т.I. М., Мир, I982.

I3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М., Наука, I965.

I4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., Наука, I983.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 мая I987 года.