сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-87-354

И.Л.Боголюбский

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ В МОДЕЛИ СКИРМА

1987

1. Топологические солитоны в модели Скирма [I] после появления работ [2] стали объектом интенсивного исследования (см., например, обзоры [3,4]). Большой интерес в последние годы привлекла высказанная еще в [I] идея о том, что топологическому инварианту в этой модели соответствует барионный заряд, так что солитоны с единичным топологическим зарядом ($Q_{top} = 1$) естественно рассматривать как барионы [2,4]. Следует отметить, что свойства топологических локализованных решений в модели Скирма не могут быть изучены достаточно полно без интенсивного использования ЭВМ. Наиболее перспективным здесь представляется метод исследования, основанный на минимизации функционала энергии E при заданном Q_{top}. Этим методом автором были обнаружены трехмерные топологические солитоны в модели ферромагнетика с конкурирующими взаимодействиями [5]. Подобный подход применялся для получения инстантонов в решеточной квантовой хромодинамике (см. [6,7] и цитированную там литературу) и двумерной σ-модели на решетке [8] как минимумов соответствующих функционалов действия.

В настоящей работе представлена методика численной минимизации разностного аналога функционала энергии в модели Скирма в трехмерном пространстве.

2. Плотность лагранжиана в модели Скирма записывается в виде:

$$L = \frac{1}{16} F_\pi^2 \mathrm{Tr}\left[\partial_\mu U \partial^\mu U^+\right] + \frac{1}{32e^2} \mathrm{Tr}\left\{\left[(\partial_\mu U)U^+, (\partial_\nu U)U^+\right]^2\right\} . \tag{I}$$

Здесь $U(x_\mu)$ – унитарные 2x2 матрицы группы $SU(2)$, $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0,1,2,3$, $x_0 = t$, $F_\pi = 186$ Mev – постоянная распада пиона, e – безразмерный параметр. Используя выражение U через матрицы Паули τ_a, $a = 1,2,3$

$$U = \varphi_0 \cdot E + i\, \tau_a \varphi_a , \quad \varphi_0^2 + \varphi_a^2 = 1 , \tag{2}$$

можно получить более удобную для исследования на ЭВМ запись [9]:

$$L = \frac{1}{8} F_\pi^2 \partial_\mu \varphi_\alpha \cdot \partial^\mu \varphi_\alpha - \frac{1}{4e^2}\left[(\partial_\mu \varphi_\alpha)^2 (\partial_\nu \varphi_\gamma)^2 - (\partial_\mu \varphi_\alpha \cdot \partial_\nu \varphi_\alpha)(\partial_\mu \varphi_\gamma \cdot \partial_\nu \varphi_\gamma)\right], \tag{3}$$

$$\mu, \nu, \alpha, \gamma = 0,1,2,3 .$$

В используемом подходе достаточно рассматривать стационарные конфигурации: $\partial_t \varphi_\alpha = \partial_o \varphi_\alpha = 0$. Для них

$$H_{CT} = - L_{CT} ,$$

$$H_{CT} = \frac{1}{8} F_\pi^2 (\partial_i \varphi^\alpha \cdot \partial_i \varphi^\alpha) + \frac{1}{4e^2} \left[(\partial_i \varphi^\alpha \cdot \partial_i \varphi^\alpha)^2 - (\partial_i \varphi^\alpha \cdot \partial_i \varphi^\alpha)^2 \right] \qquad (4)$$

$$i,j = 1,2,3 .$$

3. На трехмерной решетке интеграл энергии $E_{CT} = \int H_{CT}\, d^3x$ аппроксимируется суммой по всем узлам $M(x_c,y_c,z_c)$, расстояние между которыми h выберем одинаковым по всем осям Ox, Oy, Oz. Будем использовать шаблон из 24 точек, являющихся соседями центрального узла M. Пронумеруем этих соседей следующим образом:

$N(x_c+h,y_c,z_c) = 2$,	$N(x_c+2h,y_c,z_c) = 6$,	
$N(x_c-h,y_c,z_c) = 4$,	$N(x_c-2h,y_c,z_c) = 8$,	
$N(x_c,y_c,z_c+h) = 15$,	$N(x_c+h,y_c,z_c+h) = 19$,	
$N(x_c-h,y_c,z_c+h) = 20$,	$N(x_c,y_c,z_c+2h) = 16$,	
$N(x_c,y_c,z_c-h) = 14$,	$N(x_c+h,y_c,z_c-h) = 18$,	
$N(x_c-h,y_c,z_c-h) = 17$,	$N(x_c,y_c,z_c-2h) = 13$,	
$N(x_c,y_c+h,z_c) = 3$,	$N(x_c,y_c+h,z_c-h) = 22$,	(5)
$N(x_c,y_c+h,z_c+h) = 23$,	$N(x_c,y_c+2h,z_c) = 7$,	
$N(x_c,y_c-h,z_c) = 1$,	$N(x_c,y_c-h,z_c-h) = 21$,	
$N(x_c,y_c-h,z_c+h) = 24$,	$N(x_c,y_c-2h,z_c) = 5$,	
$N(x_c-h,y_c+h,z_c) = 11$,	$N(x_c+h,y_c+h,z_c) = 10$,	
$N(x_c+h,y_c-h,z_c) = 9$,	$N(x_c-h,y_c-h,z_c) = 12$.	

Заменяя производные в соотношении (4) конечными разностями и выполняя в бесконечной сумме несложные перегруппировки членов, получим для энергии E локализованного распределения поля Скирма выражение в виде суммы по всем узлам M трехмерной кубической решетки (нетрудно показать, что оно дает дискретную аппроксимацию $O(h^2)$ исходного непрерывного гамильтониана $E = \int H d^3x$ (см. (4)),

$$E = h^3 \sum_M H_M^{dis} ; \qquad H^{dis} = \frac{F_\pi^2}{8h^2} \left[C + (\varphi_c \cdot V) \right] , \qquad (6)$$

$$C = 6 + \frac{1}{2h^2 e^2 F_\pi^2} \left(6 - \frac{1}{8} D\right) ,$$

$$D = c_{fz}(\varphi_{23}-\varphi_{24})\varphi_7 + c_{uy}(\varphi_{23}-\varphi_{24})\varphi_{16} - c_{bz}(\varphi_{24}-\varphi_{21})\varphi_5 - c_{dy}(\varphi_{22}-\varphi_{21})\varphi_{13} +$$
$$+ c_{rz}(\varphi_{19}-\varphi_{18})\varphi_6 + c_{ux}(\varphi_{19}-\varphi_{20})\varphi_{16} - c_{\ell z}(\varphi_{20}-\varphi_{17})\varphi_8 - c_{dx}(\varphi_{18}-\varphi_{17})\varphi_{13} +$$
$$+ c_{ry}(\varphi_{10}-\varphi_9)\varphi_6 + c_{fx}(\varphi_{10}-\varphi_{11})\varphi_7 - c_{\ell y}(\varphi_{11}-\varphi_{12})\varphi_8 - c_{bx}(\varphi_9-\varphi_{12})\varphi_5 ,$$

$$c_{ry} = (\varphi_{10}-\varphi_9)(\varphi_6-\varphi_c) , \qquad c_{fx} = (\varphi_{10}-\varphi_{11})(\varphi_7-\varphi_c) ,$$
$$c_{\ell y} = (\varphi_{12}-\varphi_{11})(\varphi_8-\varphi_c) , \qquad c_{bx} = (\varphi_{12}-\varphi_9)(\varphi_5-\varphi_c) ,$$
$$c_{rz} = (\varphi_{19}-\varphi_{18})(\varphi_6-\varphi_c) , \qquad c_{ux} = (\varphi_{19}-\varphi_{20})(\varphi_{16}-\varphi_c) , \qquad (7)$$
$$c_{\ell z} = (\varphi_{17}-\varphi_{20})(\varphi_8-\varphi_c) , \qquad c_{dx} = (\varphi_{17}-\varphi_{18})(\varphi_{13}-\varphi_c) ,$$
$$c_{fz} = (\varphi_{23}-\varphi_{22})(\varphi_7-\varphi_c) , \qquad c_{uy} = (\varphi_{23}-\varphi_{24})(\varphi_{16}-\varphi_c) ,$$
$$c_{bz} = (\varphi_{21}-\varphi_{24})(\varphi_5-\varphi_c) , \qquad c_{dy} = (\varphi_{21}-\varphi_{22})(\varphi_{13}-\varphi_c) ,$$

$$V = V^{(2)} - (\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_2 + \varphi_4 + \varphi_{14} + \varphi_{15}) , \qquad (8)$$

$$V^{(2)} = c_5\varphi_5 + c_6\varphi_6 + c_7\varphi_7 + c_8\varphi_8 + c_{13}\varphi_{13} + c_{16}\varphi_{16}$$
$$+ \frac{1}{8}(c_9\varphi_9 + c_{10}\varphi_{10} + c_{11}\varphi_{11} + c_{12}\varphi_{12} + c_{17}\varphi_{17} + c_{18}\varphi_{18} +$$
$$c_{19}\varphi_{19} + c_{20}\varphi_{20} + c_{21}\varphi_{21} + c_{22}\varphi_{22} + c_{23}\varphi_{23} + c_{24}\varphi_{24}) ,$$

$$c_5 = (\varphi_9\varphi_{12} + \varphi_{21}\varphi_{24})\cdot\frac{1}{2} - 2 , \qquad c_6 = (\varphi_9\varphi_{10} + \varphi_{19}\varphi_{18})\cdot\frac{1}{2} - 2 ,$$
$$c_7 = (\varphi_{10}\varphi_{11} + \varphi_{22}\varphi_{23})\cdot\frac{1}{2} - 2 , \qquad c_8 = (\varphi_{11}\varphi_{12} + \varphi_{20}\varphi_{17})\cdot\frac{1}{2} - 2 ,$$
$$c_{13} = (\varphi_{21}\varphi_{22} + \varphi_{17}\varphi_{18})\cdot\frac{1}{2} - 2 , \qquad c_{16} = (\varphi_{23}\varphi_{24} + \varphi_{19}\varphi_{20})\cdot\frac{1}{2} - 2 ,$$

$$c_9 = - c_{bx} - c_{ry}, \quad c_{10} = c_{ry} + c_{fx}, \quad c_{11} = - c_{\ell y} - c_{fx},$$

$$c_{12} = c_{\ell y} + c_{bx}, \quad c_{17} = c_{\ell z} + c_{dx}, \quad c_{18} = - c_{dx} - c_{rz}, \qquad (9)$$

$$c_{19} = c_{rz} + c_{ux}, \quad c_{21} = c_{bz} + c_{dy}, \quad c_{20} = - c_{\ell z} - c_{ux},$$

$$c_{22} = - c_{dy} - c_{fz}, \quad c_{23} = c_{fz} + c_{uy}, \quad c_{24} = - c_{bz} - c_{uy}$$

Здесь φ, V, $V^{(2)}$ – четырехкомпонентные изотопические векторы, $|\varphi_i| = 1$, $i = 1,\ldots,24$, $|\varphi_c| = 1$, их парные произведения понимаются как скалярные, индекс 'c' соответствует "центральному" узлу M. Величина H^{dis} является полиномом второй степени по компонентам вектора φ_c. Поэтому для построения алгоритма минимизации энергии E была выбрана следующая итерационная процедура: для вычисления коэффициентов c_{ry}, $c_{fx},\ldots, c_{dy}$ (формулы (7)) использовалось значение φ_c до обновления. Далее из линейного относительно φ_c^{new} выражения для H^{dis} находилась величина

$$\varphi_c^{new} = - \frac{V}{|V|}, \qquad (10)$$

соответствующая минимальному значению

$$H^{dis}_{min} = \frac{F_\pi^2}{8h^2}\left[C(\varphi_c) - |V| \right] \qquad (11)$$

при фиксированных значениях φ_i, $i = 1,\ldots,24$. Локальная минимизация выполнялась последовательно во всех узлах решетки (итерация). Для численного нахождения минимума функционала следует выполнить необходимое число итераций.

4. В ходе вычислительных экспериментов с топологическими солитонами на решетке важно контролировать сохранение топологического заряда Q_{top}, который, вообще говоря, в решеточных вычислениях может не сохраняться /5/. Величина Q_{top} в модели Скирма определяет степень отображения на единичную сферу S^3 трехмерного пространства R^3 с условием $\varphi(|\vec{r}| = \infty) = \varphi_\infty = \mathrm{const}$. Мы использовали для вычисления Q_{top} методику работы /10/. Однако в нашем случае необходимо позаботиться, чтобы значение пробного вектора /10/ на сфере S^3 не совпадало со значениями векторов в узлах решетки. Такое совпадение происходит, например, если пробный вектор имеет вид $(0, \ell_i)$, ℓ_i – единичные орты осей Ox, Oy, Oz, например, $(0,0,0,1)$ /1,2/, а на решетке задан сферически-симметричный солитон Скирма /1,2/ ("скирмион"), см.ниже (13)).

5. Обсудим далее постановку граничных условий. "Внешние" граничные условия, аппроксимирующие на решетке конечного размера, $|x|, |y|, |z| \le R_{max}$, условие на пространственной бесконечности, $\varphi(\infty) = \varphi_\infty$ формулировалось следующим образом: в узлах, окружающих конечную расчетную решетку, $\varphi_M = \varphi_\infty$.

Вычислительные эксперименты с целью экономии ресурсов ЭВМ целесообразно проводить на четверти решетки, находящейся внутри двугранного угла между плоскостями Oxz и Oyz, проходящими через ось симметрии Oz. При этом на плоскостях Oxz и Oyz задаются "внутренние" граничные условия, отражающие предполагаемую симметрию исследуемого решения относительно поворотов на 90° вокруг оси Oz. При исследовании большинства задач в модели Скирма следует, кроме того, дополнительно учитывать симметрию относительно срединной плоскости Oxy, что позволяет еще почти вдвое сократить число расчетных узлов.

6. Введем удобные для численных расчетов безразмерные переменные $\tilde{x}_i, \tilde{r}, \tilde{h}, \tilde{E}, \tilde{R}_{max}$:

$$x_i = eF_\pi \tilde{x}_i, \quad r = eF_\pi \tilde{r}, \quad h = eF_\pi \tilde{h}, \quad E = \frac{F_\pi}{e}\tilde{E} \qquad (12)$$
$$R_{max} = eF_\pi \tilde{R}_{max}.$$

На основе описанного в п.п. 3-5 алгоритма был создан комплекс программ на фортране и проведены контрольные расчеты. Было проверено, что вакуумное состояние, например, $\varphi_M = (1,0,0,0)$ для всех узлов M, заложенное в качестве начального распределения для последующей численной минимизации, сохраняется в итерационном процессе. Далее было проверено, что различные пробные распределения с топологическими зарядами $Q_{top} = 0,1,2$, не являющиеся минимумами энергии при заданном Q_{top}, в процессе вычислений монотонно уменьшают свою энергию E.

Вопрос о минимальных допустимых размерах решетки решался заданием в качестве начального распределения скирмиона с $Q_{top} = 1$ /1,2/.

$$U_{sol} = \exp\left[iF(r)\vec{\tau}\,\vec{n} \right] = \cos F(r) + i\vec{\tau}\,\vec{n}\,\sin F(r), \qquad (13)$$
$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad F(0) = \pi, \quad F(\infty) = 0,$$

Здесь $F(r)$ – профильная функция солитона, найденная численно в /2b/. Доказано /11/, что на распределении (13) достигается абсолютный минимум функционала E в классе функций с $Q_{top} = 1$. В наших расчетах использовалась трехмерная кубическая решетка с числом узлов по осям вида

$$L_x = N+1, \quad L_y = N+1, \quad L_z = 2N+1 \qquad (14)$$

(если предполагается симметрия относительно плоскости Oxy , то $L_z = N+1$). Оказалось, что при $\tilde{R}_{max}=5$, $N=12$ солитон (I3) быстро разрушается в итерационном процессе, причем энергия распределения уменьшается, стремясь к нулю. При увеличении числа N скорость уменьшения энергии быстро падает: при $N = 15$ относительное изменение E за четыре итерации составило 0.007 . При $\tilde{R}_{max} = 5$, $N = 15$ в узлах внешних граничных плоскостей решетки, например, $\tilde{x} = \tilde{x}_{max} = 5$ при задании начального распределения (I3) в первой итерации возникают значения $H_M^{dis} < 0$, что объясняется возникающим вследствие малости $\tilde{R}_{max}$ большим разрывом значений φ на границе. Действительно, увеличение $\tilde{R}$ max до $\tilde{R}_{max} = 6{,}5$ при прежнем $N = 15$ сразу более чем на порядок уменьшает этот эффект конечного размера решетки.

Далее, рассмотрим значения $\tilde{E}_{sol}$, вычисляемые по начальному распределению (I3) на решетках вида (I4) при фиксированном $N = 15$ с различными $\tilde{R}_{max}$: при $\tilde{R}_{max} = 5$ $\tilde{E}_{sol} = 35{,}7$, при $\tilde{R}_{max} = 6{,}5$ $\tilde{E}_{sol} = 33{,}2$. Сравнение их с величиной $\tilde{E}_{sol} \cong 37$, полученной вычислением на ЭВМ одномерного интеграла E по солитонной профильной функции $F(r)$ (см.(I3)), показывает, что шаг решетки $\tilde{h} = \tilde{R}_{max}/N$ во всяком случае не должен быть больше, чем 5/I5=I/3.

Приведенные выше оценки позволяют сделать заключение, что для исследования на ЭВМ солитонов в модели Скирма трехмерные решетки должны иметь шаг $\tilde{h} \geq 1/3$ и линейный размер по осям $\tilde{R}_{max} \geq 6{,}5$.

Когда это сообщение готовилось к печати, автору стало известно, о работах [I2,I3], также посвященных численному исследованию модели Скирма, применяемые в них подходы существенно отличаются от использованного в настоящей работе.

Автор благодарен профессорам М.Г.Мещерякову, Е.П.Жидкову, В.Г.Маханькову за интерес к работе, Н.В.Махалдиани, М.Мюллер-Пройскеру, В.А.Николаеву и М.Х.Ханхасаеву за полезные обсуждения, А.А.Боголюбской за помощь в численных исследованиях.

Литература

I. Skyrme T.H.R, Proc.Roy.Soc.,1961,A260 ,127 .
2. a)Witten E. Nucl.Phys.,1983,B223,422,433 .
   b)Adkins G.,Nappi C.,Witten E. Nucl.Phys.,1983,B228,552 .
3. Dyakonov D.I.,Petrov V.Yu. LNPI preprint N°967,Leningrad,1984 .
4. Balanchandran A.P. Syracuse University,SU-4222-314,Syracuse,1985.
5. Боголюбский И.Л. ОИЯИ, Р5-85-482, Р5-85-588, Дубна, 1985.
6. Ilgenfritz E.-M.,Iaursen M.L.,Müller-Preussker M.,Schierholz G., Schiller H. Nucl.Phys.,1986,B268 ,693 .

7. Веселов А.И., Поликарпов М.И. Письма в ЖЭТФ, 1987, 45, II3.
8. Iwasaki Y.,Yoshiè. Phys.Lett.,1983,B125 ,197 .
9. Фаддеев Л.Д. В поисках многомерных солитонов. В сборнике материалов IX Международного совещания по нелокальным теориям поля, Алушта, 1976. ОИЯИ, Д-29788, Дубна, 1976, с.207-223.
I0. Woit P. Phys.Rev.Lett.,1983,51 ,638 .
II. Rybakov Yu.P.,Sanyuk V.I. NBI,University of Conephagen,NBI-HE-81-49, Copenhagen,1981.
I2. Зенкин С.В., Копелиович В.Б., Штерн Б.Е. ЯФ, 1986, 45, I65.
I3. Klebanov I. Princeton University preprint,Princeton,1985 .

Рукопись поступила в издательский отдел
20 мая 1987 года.